Pubblicazione bimensile. N. 1.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIX

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 1°

Seduta dell'8 gennaio 1922

1° Semestre.

ROMA
TIP. DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accade mia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 gennaio 1922.

Presidenza del Socio anziano E. Paternò.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Paleontologia. — *Silicospongie fossili nella Liguria occidentale.* Nota II del Socio Carlo De Stefani.

Conclusioni e fine.

Finora in Italia, salvo qualche eccezione, gli Spongiari sono poco noti.

Nel Postpliocene d'acqua dolce è nota qualche *Spongilla* dei dintorni di Roma, vista, se non erro, dal Clerici. Nel Pliocene della stessa Liguria occidentale il Malfatti illustrò la bella fauna di Sestri Ponente cui appartengono altre specie tuttora nuove. Nel Miocene è la ricca fauna dell'Emilia studiata da Manzoni, Mazzetti e Malfatti, cui si potrebbero aggiungere la *Craticularia* raccolta da Alessandro Martelli nei dintorni di S. Vito Romano, la *Hexasterophora Lychniscosa* nuova (*Manzonia aprutina* Giattini) di San Valentino (Chieti), qualche integra inedita forma della Porretta nel Bolognese, e qualche gemmula e altro illustrati come Radiolarie nei Tripoli della Sicilia (Stöhr) e dell' Italia meridionale. Nell'Eocene superiore son noti qualche *Oxyhexaster* descritto come spicule indeterminate nei Diaspri di Pietra, le spicule di *Monactinella* convertite in calcare nell'Emilia (Pantanelli) e spicule consimili indicate dal Parona nei calcari a fucoidi di Bordighera, di Val Trebbia, Cocconato e Brozolo, M. Granaglione, Sarzanello e nel calcare ad *Helminthoida* di Ronco Scrivia. Nell'Eocene medio conosco due belli esemplari di *Rhizomorina* entro il calcare di Monte Fiesole in Val di Sieve, descritti come tutt'altra cosa dal Meneghini, ed una grossa *Hexactinella*

trovata da me e dal Ristori entro i galestri equivalenti al *Macigno* di S. Cerbone nei poggi dell'Incontro in Val d'Arno. La *Pietraforte* di Rignano e d'altri luoghi della Provincia di Firenze, da non confondere col *Macigno* di origine meccanica e con la *Pietraforte* Cretacea, riceve la Silice colloide da residui di *Hexasterophora* simili a quelli degli Schisti cristallini del Savonese.

Così il Calcare a cemento delle stesse regioni, per il quale l'origine prima della Silice da Radiolarie e Spongiari fu bene indicata dal Ristori (1901).

Nella Creta sono qualche specie di Lombardia e qualche residuo di *Hexasterophora Dictyonina* nei Diaspri del M. Bastione sul Serchio presso Pisa. Al Parona hanno presentato svariati residui di Spongiari i calcari e scisti fossiliferi del Giurese di Gozzano, del Monfenera, dei Bacini del Ceresio e del Lario, della Prealpe Bergamasca, ed io ne vidi tracce nel calcare del Lias medio di Sassorosso in Garfagnana. In Sardegna a Sud di Alghero, sul mare ed intorno alla miniera di Colabona, i calcari siliciferi del Trias medio a *Myophoria* ed *Encrinus* sono costituiti in molta parte di Spongiari come indicai nel 1891 separando però quei calcari dagli altri del Trias ed attribuendoli al Lias [1].

Nell'*Hauptdolomit* triassica del Niski Verh in Valle dell'Isonzo ed in alcune masse d'idrossido di ferro dello stesso luogo e piano geologico, entro esemplari raccolti dal mio discepolo dott. Egidio Feruglio, sono pure resti di *Hexasterophora*.

Finalmente nel Cambriano dell'Iglesiente in Sardegna Bornemann descrisse *Palaeospongiae*, oltre *Archaeocyathus* e *Coscinocyaththus* che alcuni dubitano siano Hexacoralli. Questi fossili nell'America settentrionale ed in Germania si trovano nel Cambriano inferiore e ritengo che al medesimo piano appartengano quelli di Sardegna, differentemente da altri che li ritengono meno antichi.

[1] Tornquist (*Ergebnisse einer Bereisung der Insel Sardinien*, 1902), p. 821 ricopiato dal Frech (*Die mesozoische* ecc.), p. 76 dice « i calcari della Sardegna centrale (con Halobìa e *Daonella*) ritenuti triassici dal De Stefani appartengono al Giura superiore e gli strati Carboniferi sottostanti al Permiano inferiore ». Le rettificazioni erano già state fatte dal mio assistente L. Pampaloni nel 1900. Le *Halobìa* etc., non furono da me citate dalla Sardegna centrale ma dai terreni veramente triassici a Sud di Alghero.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale.* Nota II del dottor Alberto Mario Bedarida, presentata dal Corrisp. Guido Fubini.

3. — Sia H una classe di forme di Dirichlet a determinante D; le forme, i cui coefficienti sono coniugati dei coefficienti delle forme di H, costituiscono una classe di forme, a determinante D, che diremo *classe coniugata* alla forma H e s'indicherà con H_0.

Abbiamo ora il lemma I): *componendo una classe* H *con la sua coniugata* H_0 *si ottiene una classe razionale.*

La questione è ovvia se H è razionale. Sia dunque H complessa e determiniamo in H ed in H_0 due forme coniugate e *concordanti* (¹). Consideriamo una forma (a, b, c) di H, la forma (a_0, b_0, c_0) apparterrà ad H_0 e non siano concordanti, cioè i numeri a, a_0 e $b+b_0$ non siano primi tra di loro. Si può ritenere a primo con 2D e quindi con $2b = 2b_1 + 2ib_2$: gli interi razionali a_1, a_2, $2b$ e $2b_2$ ove a_1 ed a_2 sono la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di a, saranno primi tra di loro. Ciò posto, applichiamo alla forma (a, b, c) la sostituzione aritmetica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, ove x è un intero razionale: si otterrà (a'_1, b'_1, c); applicandola alla (a_0, b_0, c_0) si avrà la forma (a'_0, b'_0, c). Si tratta di vedere che si può scegliere x in modo che i coefficienti a', a'_0 e $b'+b'_0$ siano primi tra di loro, cioè che lo siano a'_1, a'_2 e $2b'_1$, essendo a'_1 ed a'_2 rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di a' e b'_1 la parte reale di b'.

Per le relazioni che sussistono tra i coefficienti di due forme equivalenti, si può scrivere:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + 2b_1x + c_1x^2 \\ a'_2 &= a_2 + 2b_2x + c_2x^2 \\ 2b'_1 &= 2b_1 + 2c_1x , \end{aligned}$$

ove c_1 e c_2 sono rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di c. Ora, manifestamente, a'_1. a'_2 e $2b'_1$ saranno primi tra di loro se tali sono i tre numeri: $a_1 = a_1 - 2b'_1x$, $2b_1 + 2c_1x$, $a_2 + 2b_2x + c_2x^2$.

(¹) Cfr. Dirichlet-Dedekind: *Teoria dei numeri*, traduzione di A. Faifofer, pag. 379; oppure Bianchi, op. cit.

A quest'ultima condizione si può soddisfare disponendo opportunamente di x. Infatti, basterà provare che, preso un fattore primo u_i di a_1, si può scegliere un valore α_i di x, per modo che si abbia una delle incongruenze:

$$2b_1 + 2c_1\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{u_i}$$
$$a_2 + 2b_2\alpha_i + c_2\alpha_i^2 \not\equiv 0 \pmod{u_i}.$$

Ciò è sempre possibile: perchè, nel caso opposto, u_i dovrebbe dividere $2b_1$, $2b_2$, a_2, ed a_1 contro l'ipotesi. Procedendo nel medesimo modo per tutti i fattori primi diversi di a_1, u_1, u_2, ..., u_m e prendendo poi:

$$x \equiv \alpha_1 \pmod{u_1},\ x \equiv \alpha_2 \pmod{u_2},\ \dots,\ x \equiv \alpha_m \pmod{u_m},$$

sarà raggiunto lo scopo.

Se dunque (a, b, c) ed (a_0, b_0, c_0) sono due forme rispettivamente di H e di H_0, coniugate e concordanti, si potrà considerare un intero razionale B, che soddisfi alle congruenze:

$$B \equiv b \pmod{a},\ B \equiv b_0 \pmod{a_0},\ B^2 \equiv D \pmod{aa_0}$$

e quindi, ponendo $C = \dfrac{B^2 - D}{a\,a_0}$, C è intero razionale, e la classe composta H-H_0, contenendo la forma (aa_0, B, C) è razionale, c. v. d.

Della classe H consideriamo ora l'opposta della coniugata, H_0^{-1}: procedendo in modo analogo a quello seguito nel lemma precedente, si prova l'esistenza di due forme (a, b, c) ed $(a_0, -b_0, c_0)$, appartenenti ad H ed H_0^{-1} rispettivamente e concordanti. Si ha allora il lemma II): *componendo una classe* H, *con l'opposta della coniugata* H_0^{-1}, *si ottiene una classe del tipo* P [1].

4. — Le considerazioni del numero precedente ci permettono ora di dimostrare che non esistono altre categorie, oltre quelle notate al n. 2, di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi delle specie principale.

Sia K una classe di forme di Dirichlet, appartenente ai generi suddetti, ed indichiamo con f una sua forma.

Se $D \equiv 3 \pmod{4}$ oppure $D \equiv 0 \pmod{2}$, esiste certamente una forma di Gauss f_1, a determinante D, primitiva di prima specie, la quale

[1] Questo lemma e il suo precedente risultano pure, come è ben naturale, ricorrendo alle formule generali di composizione delle forme date da Gauss nelle sue *Disquisitiones*. Noi però abbiamo preferito seguire il metodo di composizione delle forme dato da Dirichlet, e cioè ricorrendo alla nozione di forme concordanti, perchè appunto sotto questa forma più elegante viene comunemente esposta la teoria della composizione delle forme aritmetiche.

abbia gli n caratteri [1] relativi agli n fattori primi razionali, dispari, diversi, soddisfacenti alle condizioni:

$$(3) \qquad \left(\frac{f_1}{p_1}\right)=+1,\left(\frac{f_1}{p_2}\right)=+1,\ldots,\left(\frac{f}{p_r}\right)=+1,$$
$$\left(\frac{f_1}{q_1}\right)=\left[\frac{f}{\pi_1}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{1_0}}\right],\left(\frac{f_1}{q_2}\right)=\left[\frac{f}{\pi_2}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{2_0}}\right],\ldots$$
$$\left(\frac{f}{q_s}\right)=\left[\frac{f}{\pi_s}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{s_0}}\right],$$

perchè i caratteri delle forme di Gauss sono, nel caso attuale, $n+1$ oppure $n+2$ e possiamo quindi disporre di almeno uno oltre i caratteri $\left(\frac{f_1}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f_1}{q_j}\right)$ per rendere soddisfatta la nota relazione fra i caratteri. La forma f_1, considerata nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ha anche i caratteri α, β e γ (od alcuni di essi) aventi per valori $+1$. Consideriamo la classe R_1 di forme di Dirichlet a cui f_1 appartiene; R_1 sarà razionale. La classe $K.R_1$ appartiene al genere principale; perchè dalle (2) e (3), si ha subito:

$$\left[\frac{ff_1}{p_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{p_2}\right]=+1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{p_r}\right]=+1,$$
$$\left[\frac{ff_1}{\pi_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_2}\right]=+1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{\pi_s}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_{1_0}}\right]=-1,$$
$$\left[\frac{ff_1}{\pi_{2_0}}\right]=-1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{\pi_{s_0}}\right]=+1,\alpha=+1,\beta=+1.\gamma=+1$$

ove, circa i caratteri α, β, γ si deve ripetere la solita osservazione. La classe KR_1 è quindi una classe duplicata, e si potrà scrivere:

$$KR_1 = H^2 = HH_0 H_0^{-1} H\,;$$

ma, per il lemma del numero precedente, HH_0 è una classe R_2, razionale, $H_0^{-1}H$ è una classe P_1, del tipo P e perciò si ha:

$$KR_1 = R_2P_1$$

onde $K = R_2R_1^{-1}P_1$. Ora, essendo $R_2R_1^{-1}$ una classe razionale, si ha che K risulta dalla composizione di una classe razionale con una classe del tipo P: non potrà dunque essere che razionale, complessa del tipo P, oppure composta di due tali tipi, secondochè sia, rispettivamente: P_1 razionale, $R_2R_1^{-1}$ del tipo P e P_1 complessa, oppure $R_2R_1^{-1}$ non del tipo P e P_1 complessa.

Sia $D\equiv 1 \pmod 4$, allora è $-D\equiv 3 \pmod 4$. Tra le forme di Gauss a determinante $-D$, primitive di prima specie, esisterà una forma $f'=(a, b, c)$ per la quale si abbiano le relazioni (3), perchè tra i caratteri delle forme di Gauss, a determinante $-D\equiv 3 \pmod 4$ vi è uno in

[1] Cfr. La teoria dei generi delle forme di Gauss; ad es. in Bachmann: *Die Arithmetik der quadratischen Formen*. pag. 108 e seg.

più oltre i caratteri $\left(\frac{f'}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f'}{q_j}\right)$ per cui è ancora possibile soddisfare alla relazione tra i caratteri. Ora, la forma $f \equiv (a\,, ib\,, -c)$, a determinante D, apparterrà, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ad una classe di forme di Dirichlet P_1, del tipo P e sarà tale, che, la classe KP_1 appartenga al genere principale. Segue dunque la stessa conclusione dei casi precedenti.

Le considerazioni svolte in questo numero, e quelle del numero 2, ci conducono al risultato seguente, oggetto dell'attuale studio:

Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet, del corpo $K(\sqrt{-1})$, *a determinante* D (*intero razionale*), *primitive di prima specie, appartenenti ai generi della specie principale* (2), *sono di tre sole categorie*: *le classi razionali, le classi complesse del tipo* P *e le classi* (*complesse*) *che si ottengono componendo una classe razionale, non del tipo* P, *con una classe complessa del tipo* P.

A questo risultato aggiungiamo ancora l'osservazione: *le classi appartenenti ai generi delle specie principale formano un sotto-gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, che contiene a sua volta, come sotto-gruppo, quello delle classi appartenenti al genere principale.*

Si noti che se il determinante D contiene fattori primi, razionali, dispari, che siano soltanto $\equiv 3$ (mod. 4), questi due sotto-gruppi coincidono, ed inversamente.

Matematica. — *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni.* Nota di ALDO FINZI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Di recente ho trattato il problema della rappresentabilità conforme di una varietà qualunque ad n dimensioni sulla euclidea con altrettante dimensioni [1], e sono pervenuto a due serie di condizioni: la prima costituita di equazioni algebriche lineari nei simboli di Riemann, la seconda di equazioni differenziali di 1° ordine nei simboli stessi. Tali gruppi di equazioni, che qui riporto, senz'altro, dalla mia Nota, sono i seguenti:

$$\text{(A)}\qquad a_{ij,hk} + \frac{1}{n-2}\left(a_{ih}\,G_{jk} - a_{ik}\,G_{jh} + a_{jk}\,G_{ih} - a_{jh}\,G_{ik}\right) + \\ + \frac{G}{(n-1)(n-2)}\left(a_{ik}\,a_{jh} - a_{ih}\,a_{jk}\right) = 0\,,$$

$$\text{(B)}\qquad a_{ik}\,G_l - a_{il}\,G_k - 2(n-1)\left(G_{ik/l} - G_{il/k}\right) = 0\,.$$

[1] A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull'altra.* Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2ª, 1921.

in cui è

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} a_{ij,hk} \quad , \quad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a^{(ik)} G_{ik} .$$

Per $n = 3$ le (A) si riducono ad identità.

Contemporaneamente a me, e con metodi proprî, lo Schouten ha trattato lo stesso problema [1], ed è giunto, naturalmente, a due sistemi di equazioni equivalenti ad (A) e (B), espressi con gli speciali simboli di cui l'autore da alcun tempo si vale. Lo Schouten ha fatto, però, un'ulteriore e feconda osservazione, che a me era sfuggita. Si tratta precisamente di questo. Nella mia Nota io ho asserito (omettendone la facilissima dimostrazione) che le relazioni del Bianchi per i simboli di Riemann sono identicamente soddisfatte, quando sono verificate le (A) e le (B). Lo Schouten, invece, ha dimostrato che, per $n > 3$, dalle relazioni del Bianchi e dal gruppo delle condizioni algebriche si può ottenere il gruppo delle condizioni differenziali, le quali diventano quindi superflue per la rappresentabilità conforme di una V_n $(n > 3)$ sopra lo spazio piano. Tale risultato può trarsi molto rapidamente anche dalle mie equazioni (A), associandovi le identità del Bianchi e di alcune loro combinazioni già costruite dal Levi Civita [2].

Ciò mi propongo di mostrare in questa Nota [3], in cui aggiungo alcuna delle applicazioni consentite allo Schouten dalla osservazione sopra esposta, ritenendone non inutile la trattazione con i metodi del Calcolo differenziale assoluto, dato che lo speciale simbolismo usato da quell'autore richiede una iniziazione tutta propria.

2. Con le posizioni

$$\mathcal{A}_{rs} = a_{rs} G - 2(n-1) G_{rs} , \tag{1}$$

$$A_{rst} = \mathcal{A}_{rs|t} - \mathcal{A}_{rt|s} , \tag{2}$$

già da me introdotte nel citato lavoro, le (A) e (B) prendono la forma

$$2(n-1)(n-2)\, a_{ij,hk} + (a_{ik} \mathcal{A}_{jh} - a_{ih} \mathcal{A}_{jk} + a_{jh} \mathcal{A}_{ik} - a_{jk} \mathcal{A}_{ih}) = 0 , \tag{A$_1$}$$

$$A_{rst} = 0 . \tag{B$_1$}$$

Derivando le (A_1) e tenendo conto delle relazioni del Bianchi

$$a_{ij,hkl} + a_{ij,klh} + a_{ij,lhk} = 0 ,$$

(1) J. A Schouten, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*. Mathem. Zeitschrift, Band 11, Heft 1/2. 1921, pp. 58-88.

(2) T. Levi-Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale*. Rend. R Acc. Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem. 1917, pag. 381, formole (12).

(3) Il risultato dello Schouten fu ottenuto poi, per altra via, anche dal Weyl in *Einordnung der projekt. und der Konf. Auffassung*. Nach. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1921, s. 9.

dalle (A_1) si passa alle

$$a_{ih} A_{jkl} + a_{ik} A_{jlh} + a_{il} A_{jhk} = a_{jh} A_{ikl} + a_{jk} A_{ilh} + a_{jl} A_{ihk},$$

e da queste, moltiplicando per $a^{(ih)}$ e sommando rispetto ad i, h, si deducono le

$$(n-3) A_{jkl} = a_{jk} \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} A_{ilh} + a_{jl} \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} A_{ihk}.$$

Se si tiene conto delle posizioni (1) e (2), e delle identità del Levi-Civita

$$2 \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} G_{ilh} = G_l,$$

dianzi citate, si riconosce facilmente che le due sommatorie del 2° membro delle equazioni precedenti sono identicamente nulle; per cui da esse si trae

$$(n-3) A_{jkl} = 0,$$

e per $n > 3$ si hanno, quindi, le (B_1).

3. Quando $n > 3$, le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una varietà V_n sia rappresentabile conformemente sulla varietà euclidea, sono dunque date dalle sole equazioni (A), che nel precedente lavoro ho messo sotto la seguente forma intrinseca:

$$(A') \qquad \gamma_{pq,rt} = 0,$$

$$(A'') \qquad \gamma_{pq,pt} = \sum_1^n {}_r \gamma_{rq,rt},$$

$$(A''') \qquad \gamma_{pq,pq} = \frac{1}{n-2} \sum_1^n {}_r (\gamma_{rp,rp} + \gamma_{rq,rq}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_1^n {}_{rs} \gamma_{rs,rs}.$$

(indici tutti distinti), con riferimento ad una qualunque ennupla di congruenze ortogonali della varietà data.

Se, in particolare, ci si riferisce ad una ennupla principale [1], dovendo per essa aversi

$$\sum_1^n {}_r \gamma_{rq,rt} = 0 \quad (q \neq t) \quad , \quad \sum_1^n {}_r \gamma_{rp,rp} = \varrho_p,$$

in cui ϱ_p sono gli invarianti principali, le precedenti assumono l'aspetto più semplice

$$\gamma_{pq,rt} = 0 \;,\; \gamma_{pq,pt} = 0 \;,\; (n-1)(n-2)\gamma_{pq,pq} = (n-1)(\varrho_p + \varrho_q) - \sum_1^n {}_r \varrho_r.$$

[1] G. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, parte 2ª, 1903-04, pp. 1233-1239, cfr. pag. 1236.

4. Si voglia ora trovare per quali varietà V_n $(n > 3)$, immerse nello spazio piano ad $n + 1$ dimensioni (ipersuperficie), le condizioni (A'), (A''), (A''') siano verificate.

Basterà ricordare che ogni ennupla che risulti delle linee di curvatura di una ipersuperficie ad n dimensioni, è per essa una ennupla principale, e che fra le ennuple principali ne esiste una almeno per cui sono soddisfatte le equazioni

$$\gamma_{pq,rt} = 0 , \tag{3}$$

ogni volta che la combinazione semplice (rt) degli indici $1, 2, \ldots, n$, è distinta dalla (pq), e alle equazioni

$$\gamma_{pq,pq} = \beta_p \beta_q , \tag{4}$$

in cui $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono indeterminate ([1]).

Le (A') ed (A'') sono senz'altro soddisfatte, se lo sono le (3); le (A'''), in virtù delle (4), diventano

$$(n-1)(n-2)\beta_p \beta_q - \tag{5}$$
$$-(n-1)\{\beta_p(\mathrm{B}-\beta_p) + \beta_q(\mathrm{B}-\beta_q)\} = \sum_1^n{}_r \beta_r^2 - \mathrm{B}^2 ,$$

ove $\mathrm{B} = \sum_1^n{}_r \beta_r^2$. Le (5) si mutano in identità, non solo se si suppongono tutte uguali le β_r, ma anche se si suppongono uguali $n-1$ di esse.

Ponendo nelle (5), in luogo della combinazione (p, q), successivamente, le combinazioni $(i, j), (i, k)$ e sottraendo, indi (j, l) e (k, l) e sottraendo, si ricavano le equazioni

$$(\beta_j - \beta_k)\{(n-2)\beta_i + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\} = 0 ,$$

$$(\beta_j - \beta_k)\{(n-2)\beta_l + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\} = 0 ,$$

da cui si passa alle

$$(\beta_i - \beta_k)(\beta_i - \beta_l) = 0.$$

Queste, e l'osservazione fatta sopra, esprimono il teorema: *Fra le ipersuperficie ad n dimensioni $(n > 3)$ sono rappresentabili conformemente sulla varietà euclidea ad n dimensioni tutte e soltanto quelle per le quali $n-1$ almeno delle β_i sono uguali* ([2]).

5. Dal Ricci fu dimostrata questa notevole proposizione ([3]): *Ammettono terne ortogonali costituite di congruenze normali e isotrope tutte e sole*

([1]) G. Ricci, loc. cit., pag. 1238.

([2]) J. A. Schouten, loc. cit., pp. 87-88. Il caso $n = 3$ fu trattato da me nella Nota: *Le ipersup. a tre dimensioni che si possono rappresentare conform. sullo spazio euclideo.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXII, parte 2ª, 1903.

([3]) G. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Rend. R. Accad. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910, pp. 181-187.

le varietà a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo.

Il teorema si estende facilmente alle varietà con un numero qualunque di dimensioni maggiore di tre [1]. Se si suppone infatti che la V_n ammetta una ennupla ortogonale (che potrà assumersi come ennupla di riferimento) costituita di congruenze normali ed isotrope, per essa saranno soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\gamma_{hij} = 0 \quad , \quad \gamma_{hii} = \gamma_{hjj} \, ,$$

per ogni terna di indici h, i, j distinti.

In tale ipotesi, per gli invarianti γ a 4 indici, varranno le relazioni

$$\gamma_{hi,kj} = 0 \quad , \quad \gamma_{hi,hj} = \gamma_{ki,kj} \, ,$$
$$\gamma_{hi,hi} + \gamma_{kj,kj} = \gamma_{hk,hk} + \gamma_{ij,ij} \, ,$$

in cui h, i, k, j sonó da intendere variabili da 1 ad n, ma tutti distinti. Le relazioni del 1° gruppo coincidono con le (A'); da quelle del 2° (dando a k tutti i valori da 1 ad n, diversi da i e j, e sommando) si ottengono le (A''); e infine da quelle del 3° gruppo (dando a j tutti i valori da 1 ad n, diversi da i e k, e sommando, indi a k tutti i valori da 1 ad n, eccetto h, e sommando) si hanno le (A''').

Risulta pertanto che ogni V_n, nella quale esiste una ennupla ortogonale di congruenze normali e isotrope, è in rappresentazione conforme con la varietà euclidea; la proposizione reciproca non ha bisogno di dimostrazione, e però il teorema di Ricci risulta generalizzato, come si voleva.

Matematica. — *Sulla equazione funzionale $f(x+y)=f(x)\,f(y)$.* Nota I di Silvio Minetti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

I. Introduzione. — È noto [3] che se una $f(x)$, funzione della x nel senso di Dirichlet, soggiace alle seguenti ipotesi:

1) è definita in tutto il campo reale;

2) in un intervallo prefissato, $a \leq x \leq b$, si mantiene reale, ed inferiore in valore assoluto ad un numero positivo M;

3) in tutto il campo reale soddisfa all'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \, , \tag{1}$$

ovvero all'altra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \, , \tag{1'}$$

[1] Di questa generalizzazione lo Schouten fa cenno nella nota 33 a piè di pag. 88 del citato suo lavoro.

[2] Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

[3] Darboux, Math. Annal., Bd XVII, 1880, pag. 55.

essa risulta necessariamente continua e quindi (Cauchy) coincide rispettivamente con la funzione e^{kx} o Kx (K costante).

È noto altresì come la questione di trovare il minimo di condizioni da imporre alla $f(x)$ perchè risulti necessariamente continua, ha dato origine a varii lavori, e come forse il risultato più importante in merito sia quello ottenuto dal Darboux [1].

In esso però, come in tutti gli altri lavori sull'argomento, si ammette l'ipotesi 1).

Ci proponiamo di mostrare qui che [escluso il caso banale in cui la $f(x)$ sia zero dappertutto, tranne in un punto] alla 1) si può sostituire l'ipotesi più lata che la $f(x)$ sia definita soltanto nell'intervallo (a, b).

Con ciò, notiamo bene, in forza della (1), o rispettivamente, della (1'), essa viene subordinatamente determinata anche nell'intervallo $(2a, 2b)$, che in generale risulterà staccato dal primo [2].

Senza ledere la generalità, potremo supporre a e b ambedue positivi poichè, in caso contrario, si perverrebbe alla conclusione enunciata ancor più direttamente, come sarà facile riconoscere dal seguito della presente Nota.

Qui tratteremo il caso della (1), ma è ovvio far notare che la conclusione accennata vale anche per il caso in cui la $f(x)$ soddisfi, anzichè alla (1), alla (1').

Lo stesso teorema vale per una $f(z)$, funzione della variabile complessa z, sempre beninteso nel senso di Dirichlet; esso si riconduce in modo semplicissimo al caso del campo reale che stiamo per trattare, e sarà oggetto di una brevissima comunicazione che avrò l'onore di presentare a codesta Accademia [3].

[1] Loc. cit. Sull'argomento, che si riconnette intimamente al postulato della continuità della risultante di due vettori, ed alla ben ordinabilità del continuo (post. di Zermelo), vedi: Volpi, Giorn. di Batt., v. XXXV, 1897, pag. 104, a cui però sono state sollevate varie obiezioni; Levi Beppo, Rend. R. Acc. Lincei, ser. V, tom. IX, 2° sem. 1900; Hamel, Math. Ann., Bd. LX, 1905, pag. 459; vedi pure uno studio del prof. Roncagli brevemente riassunto nei Rend. del Semin. Matem. della R. Univ. di Roma, 1913-14, in cui afferma illusoria e scorretta la soluzione discontinua proposta dall'Hamel.

Dal punto di vista della comp. dei vettori vedi l'estesa bibl. nella *Meccanica razionale del Marcolongo*. man. Hoepli, II ediz., vol. I, 1917.

[2] Per la validità della conclusione cui si giunge, basta del resto supporre la $f(x)$ definita in un intervallo (a, b), in esso limitata, e godente della proprietà che il prodotto $f(x_1)\, f(x_2)$ o rispettivamente la somma $f(x_1) + f(x_2)$ (se x_1 ed x_2 sono due punti compresi nell'intervallo di definizione) resti costante quando, pur variando x_1 ed x_2, non varii però la loro somma $(x_1 + x_2)$.

[3] In proposito vedi: Segre, Atti Acc. Scienze Torino, tom. 25 e 26, an. 1890 e 1891; Segre, Math. Ann., Bd 40, an. 1890-91; Segre, Interm. des Mathem., tom. I, pag. 182, an. 1894; Lebesgue, Atti Acc. Scienze Torino, tom. XLII, 1906-07, pag. 532; E. Noether, Math. Ann., Bd LXXII, 1916; Terracini, Math. Ann. Bd. 80, an. 1921.

II. Legittimità dell'ipotesi $f(a) \neq 0$. — Osserviamo innanzi tutto come sia lecito supporre $f(a) \neq 0$.

Invero, se fosse $f(a) = 0$, dall'eguaglianza

$$f(a)\, f(x) = f(a + x)$$

che vale per $a \leq x \leq b$, si trarrebbe che la $f(x)$ sarebbe sempre nulla. intanto, da $2a$ ad $(a + b)$.

In causa poi dell'altra eguaglianza

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

intesa applicata per $2a \leq x \leq (a + b)$, si trarrebbe che la $f(x)$ è conseguentemente nulla pure da a ad $\frac{a + b}{2}$, cioè in tutta la prima metà dell'intervallo (a, b).

Se dunque la $f(x)$ è nulla nell'estremo inferiore, a, dell'intervallo, è nulla pure necessariamente in tutti i punti della prima metà di esso (estremo superiore compreso).

Ragionando poi sulla seconda metà di (a, b), come abbiam fatto per la prima, e così di seguito, scorgiamo facilmente come l'ipotesi $f(a) = 0$ tragga la conseguenza $f(x) = 0$ per $a \leq x < b$, cadendo nel caso banale.

III. Riduzione a zero dell'estremo inferiore dell'intervallo di definizione. — Si consideri una nuova funzione definita nell'intervallo chiuso $[0, (b - a)]$ (di cui cioè fan parte anche l'estremo inferiore 0 e l'estremo superiore $[b - a]$) dalla posizione

$$\varphi(x) = \frac{f(x + a)}{f(a)}. \tag{2}$$

posizione legittima, in quanto, come abbiam visto, $f(a) \neq 0$.

La $\varphi(x)$ nell'intervallo $[0, (b - a)]$ soddisferà alle ipotesi cui soggiace la $f(x)$; in particolare soddisferà in quel campo alla (1).

Invero, se x_1 ed x_2 sono due punti tali che

$$0 \leq x_1 \leq (b - a)\ ,\ 0 \leq x_2 \leq (b - a)\ ,\ 0 \leq (x_1 + x_2) \leq (b - a),$$

sarà

$$\varphi(x_1)\, \varphi(x_2) = \frac{f(x_1 + a)}{f(a)} \frac{f(x_2 + a)}{f(a)} = \frac{f(x_1 + x_2 + a + a)}{f(a)\, f(a)} =$$

$$= \frac{f(x_1 + x_2 + a)}{f(a)} = \varphi(x_1 + x_2).$$

Inoltre $\varphi(0) = 1$, e poi dalla relazione $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ risulterà essere φ sempre positiva.

Essa inoltre, a meno di essere sempre nulla da 0 a $(b - a)$ (0 escluso), non può mai annullarsi.

Invero, se fosse $\varphi(x') = 0$, potendosi scrivere, per ogni $x'' > x'$ e compreso fra 0 e $(b - a)$,

$$\varphi(x'') = \varphi(x')\,\varphi(x'' - x'),$$

dovrebbe essere $\varphi(x'') = 0$, e quindi, se la $\varphi(x)$ s'annulla in un punto, essa si annulla pure per tutti i punti compresi fra quello e l'estremo superiore dell'intervallo.

In forza poi dell'eguaglianza $\varphi(x') = \varphi\left(\frac{x'}{2}\right)^2$, seguirebbe $\varphi\left(\frac{x'}{2}\right) = 0$ e quindi la funzione si annullerebbe anche in tutti i punti dell'intervallo $\left(\frac{x'}{2}, x'\right)$.

Così ragionando, si arriva a concludere che la $\varphi(x)$, tranne per $x = 0$, sarebbe sempre nulla. In conseguenza di ciò, si annullerebbe anche $f(x)$ per $a < x \leq b$, ricadendo nel caso banale.

Nel seguito della presente Nota mostreremo dapprima che la continuità in un punto generico dell'intervallo può ricondursi alla continuità a destra del punto zero.

Successivamente dimostreremo che la nostra $f(x)$ è necessariamente continua alla destra dell'origine, rimanendo così affermato il nostro assunto.

La presente Nota ha avuto occasione di esser redatta da uno studio sul problema generale della propagazione elettrica lungo le linee col metodo simbolico di Heaviside.

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota I di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il seguente tipo di equazioni integrali non lineari

$$u(x) = h(x) + \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; h(y)]\,dy, \tag{1}$$

nel caso che sia $p = 1$, $\mu_r(x) = 0$, $g_r(x) = x$, il nucleo sia regolare e soddisfi a certe condizioni, venne risoluto dal Volterra [1].

[1] *Leçons sur les équations intégrales* ecc., Gauthier Villars, Paris, 1913, pag. 90. L'equazione lineare del Volterra, col limite superiore generalizzato, venne considerata più tardi dall'Andreoli nella sua Memoria *Sulle equazioni integrali*, inserita nel vol. XXXVII dei Rend. del Circ. mat. di Palermo, pp. 76-112. Ivi l'A. dimostra che, se la funzione incognita è assoggettata soltanto ad operazioni di un certo gruppo, l'equazione data può ricondursi, mediante una trasformazione, ad un'equazione di Fredholm di 1ª specie, nella quale la funzione incognita figuri soggetta a sole operazioni elementari. Altri tipi di equazioni non lineari vennero studiati dal Bratu e dal Lévy P. in parecchie Note apparse nei *Comptes Rendus* negli anni 1909-'10-'11.

Qui noi ci proponiamo di studiare la (1) che appartiene ad un tipo alquanto più generale di quello ora menzionato, supponendo che parte delle $K^{(r)}[x, y; h(y)]$, od anche tutte, possano diventare infinite per valori di y nei rispettivi intervalli d'integrazione $[\mu_r(x), g_r(x)]$, con $a \leq x \leq b$, senza che perciò ne resti infirmata la loro integrabilità.

2. Per risolvere la (1), opereremo anzitutto una trasformazione [1] aggiungendo ai due membri della stessa la funzione

$$u(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ c_r u(y) + c \} \, dy ,$$

dove le c_r e la c sono delle costanti da determinarsi. Posto
$U(x) = u(x) + u'(x)$; $\quad K^{(r)}[x, y; h(y)] + c_r u(y) + c = H^{(r)}[x, y; h(y)]$,
la (1) diventa

$$U(x) = h(x) + \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} H^{(r)}[x, y; h(y)] \, dy .$$

Faremo l'ipotesi che la $u(x)$ sia limitata e che le $K^{(r)}[x, y; h(y)]$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$ ammettano, pei valori di y pei quali sono regolari, la derivata prima determinata, rispetto alla funzione $h(y)$ considerata come una variabile; derivata che indicheremo con $K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y)]$ [2].

Scelti allora un $\sigma > 0$ arbitrario ed un numero positivo m tale che $|\lambda| mp = \varrho$ risulti positivo e minore di un numero arbitrario $k < 1$, determiniamo le costanti c_r in modo che, per ogni funzione $0 \leq |\alpha(x)| < 2\sigma$ e per ogni numero $0 < \theta \leq 1$, si abbia

$$(2) \qquad \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} | H'^{(r)}_{U(y)}[x, y; \theta U(y) + \alpha(y)] | \, dy < m , \qquad (r = 1, 2, \ldots, p) .$$

Indicando poi con ν il massimo modulo della $U(x)$, che naturalmente risulterà funzione della rimanente costante c, determiniamo quest'ultima in modo che, assieme colle (2), rimanga soddisfatta anche la relazione

$$(3) \qquad \frac{\sigma}{\nu + \sigma} > k .$$

Supposto che il sistema delle precedenti $p + 1$ in equazioni nelle $p + 1$ incognite c_r e c sia compatibile, ammetteremo d'aver fatto nella (1) la tra-

[1] Con metodo simile a quello qui usato, ho risoluto altri tipi di equazioni non lineari che ho considerato in due mie recenti Memorie, delle quali la prima *Sulle equazioni integrali non lineari*, apparirà nel fascicolo 1-2 del vol. XXXI degli Annali di matematica, e la seconda, dal titolo *Sulle equazioni integrali non lineari con operazioni funzionali singolari*, trovasi in corso di stampa nel Giornale di matematiche.

[2] A questa condizione si potrebbe sostituire la seguente: che le $K^{(r)}[x, y; U(y)]$, per ogni funzione $\omega(y)$, siano tali da aversi

$$| K^{(r)}[x, y; U(y) + \omega(y)] - K^{(r)}[x, y; U(y)] | \leq | \omega(y) | \, | F^{(r)}(x, y) | ,$$

sotto la condizione che le funzioni $| F^{(r)}(x, y) |$ siano integrabili.

sformazione di cui sopra. Ciò non di meno noi, per semplicità, continueremo ad usare ancora gli stessi simboli.

3. Supposto pel momento che sia

$$|h(x) - u(x)| < \sigma , \tag{4}$$

poniamo

$$h(x) - \omega_1(x) = u_1(x) = u(x) .$$

Per la (4) avremo subito $|\omega_1(x)| < \sigma$. Similmente, posto

$$h(x) - \omega_2(x) = u_2(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; h(y) - \omega_1(y)]\, dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; u_1(y)]\, dy .$$

Sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), s'ottiene

$$\omega_2(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ K^{(r)}[x, y; h(y) - \omega_1(y)] - K^{(r)}[x, y; h(y)] \}\, dy =$$

$$= -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \omega_1(y)\, K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y)]\, dy ; \text{ (}^1\text{)}$$

con $0 < \theta^{(r)} < 1$. E poichè

$$h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y) = u(y) + (1 - \theta^{(r)})\, \omega_1(y) = u(y) + \theta_1^{(r)} \omega_1(y) ,$$

sarà

$$|\omega^2(x)| < |\lambda| \sigma \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} | K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_1^{(r)} \omega_1(y)] |\, dy$$

e quindi, per la (2),

$$|\omega_2(x)| < |\lambda| pm\sigma = \varrho\sigma .$$

Per esigenze di spazio rimandiamo il sèguito ad altra Nota.

[1] Invero, se α è un valore di y per cui la funzione integranda diviene infinita, si può scrivere:

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{K^{(r)}[x, y; h(y) - \omega_1(y)] - K^{(r)}[x, y; h(y)]\}\, dy = \lim_{\varepsilon, \eta = 0} \left\{ \int_{\mu_r(x)}^{\alpha - \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha + \eta}^{g_r(x)} \right\} \{K^{(r)}[x, y; h(y) - \omega_1(y)] - K^{(r)}[x, y; h(y)]\}\, dy = \lim_{\varepsilon, \eta = 0} \left\{ \int_{\mu_r(x)}^{\alpha - \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha + \eta}^{g_r(x)} \right\} \omega_1(y)\, K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y)]\, dy =$$

$$= \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \omega_1(y)\, K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y)]\, dy .$$

Colla scrittura $K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y)]$ ed analoghe, bisogna poi intendere che prima si deve derivare la $K^{(r)}[x, y; h(y)]$ rispetto alla $h(y)$ e poi mutare $h(y)$ in $[h(y) - \theta^{(r)} \omega_1(y)]$.

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota I *di* F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. L'idea più geniale della Relatività generale consiste nel riguardare la traiettoria di un punto materiale in un campo gravitazionale, quando si tenga conto del tempo, come una geodetica di uno spazio-tempo a quattro dimensioni.

È noto che Einstein caratterizza la metrica di questo spazio-tempo mediante certe equazioni alle derivate parziali, dette equazioni gravitazionali, che, pur involgendo una discretà arbitrarietà, hanno condotto a spiegare o a prevedere fenomeni confermati dalle osservazioni.

Sembra interessante di seguire un cammino inverso a quello accennato; cioè, partire dalle equazioni della traiettoria, considerando questa ultima come suggerita dalle osservazioni e, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali, esaminare quale debba essere la metrica di uno spazio-tempo affinchè quella traiettoria rappresenti una geodetica di esso.

In questa prima Nota mi occupo dello spazio-tempo che conduce alle orbite kepleriane.

2. La presenza di un'unica massa, ad esempio il Sole, genera uno spazio-tempo quadridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare, per intuitive e note considerazioni di simmetria [1], ha la forma

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - e^{\mu}(r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \,.\, d\varphi^2) + c^2\, e^{\nu} \,.\, dt^2 \tag{1}$$

in cui r, θ, φ sono coordinate analoghe alle polari che fissano la posizione di un punto nello spazio [2]; t è il tempo; c^2 il quadrato della velocità della luce; λ, μ, ν sono tre funzioni della sola r, che tendono a zero per $r \to \infty$ poichè a distanza infinita dalla massa, generatrice dello spazio-tempo (1), quest'ultimo deve diventare euclideo.

[1] Cfr., ad. es., Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio*, ecc. (Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIV, fascicolo luglio 1917).

[2] Si noti che r non rappresenta, in generale, la distanza del punto materiale dal polo. Si rileverà però facilmente in seguito che se r, r' sono i parametri che fissano la posizione di due punti sopra una linea $\theta =$ cost., $\varphi =$ cost. (geodetica) uscente dal polo, r-r' esprime la distanza dei due punti, a meno di una quantità trascurabile, quando essi siano sufficientemente lontani dal polo.

Per le ragioni di simmetria addotte, la traiettoria di un punto materiale, quando si elimini il tempo, ha luogo in un piano (più precisamente superficie geodetica), $\theta = \text{cost.}$ che possiamo supporre sia il piano $\theta = \frac{\pi}{2}$; è perciò che ci limitiamo a considerare lo spazio-tempo tridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare è:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} r^2 d\varphi^2 + c^2 e^{\nu} dt^2 . \tag{2}$$

Per la determinazione delle funzioni incognite λ, μ, ν ricaveremo la equazione in r, φ della traiettoria, rappresentatrice di una geodetica dello spazio-tempo (2), e la identificheremo con la nota equazione, in coordinate polari, col polo nel fuoco, di una conica.

3. Le tre equazioni di una geodetica dello spazio-tempo (2) equivalgono, a determinazione fatta, alla (2) stessa e alle altre:

$$e^{\mu} r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2} e^{-\nu}, \tag{3}$$

essendo k, h due costanti di integrazione. La eliminazione di dt, ds tra (2) e (3), quando si ponga $u = {}^1/_r$, conduce, dopo i necessari passaggi, alla equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + e^{\mu-\lambda} u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} u^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} \tag{4}$$

che identificheremo con l'equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a = \text{cost.} \tag{5}$$

la quale ammettiamo sia giustificata dalle osservazioni.

Le funzioni λ, μ, ν, non dipendenti da k, h, debbono condurre alla (5) in cui a deve essere, in generale, dipendente da k, h.

Ponendo $a = f(k, h)$, il paragone fra (4), (5) conduce a scrivere

$$\begin{cases} \psi(u) = e^{\mu-\lambda} u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} u^2 - u \\ \psi(u) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} - f(k, h) \end{cases} \tag{6}$$

nell'ultima delle quali va considerata come incognita anche $f(k, h)$.

4. Dalla prima delle (6) risulta che $\psi(u)$ deve essere indipendente da k, h. Derivando, pertanto, la seconda delle (6), parzialmente, prima rispetto a k e poi rispetto ad h, deve aversi identicamente

$$\begin{cases} f'_k(k, h) = -\frac{k}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} \\ f'_h(k, h) = -\frac{1}{h^3} \frac{k^2}{c^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} + \frac{1}{h^3} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} . \end{cases} \tag{7}$$

I primi membri delle (7) debbono essere indipendenti da u; altrettanto deve essere dei secondi membri. Essendo, pertanto, α, β due costanti qualsiasi, indipendenti da k, h, dobbiamo scrivere

$$\frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} = \alpha, \qquad \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} = \beta \tag{8}$$

e poichè μ e λ debbono tendere a zero per $u \to 0$, si deduce

$$e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = \alpha u + 1, \qquad e^{2\mu-\lambda} = \beta u + 1. \tag{9}$$

Le (7), (9) forniscono ovviamente

$$f(k, h) = a = \frac{1}{2}\frac{k^2\alpha}{c^2 h^2} - \frac{\beta}{2h^2} + \gamma \tag{10}$$

essendo γ una nuova costante indipendente da k, h. Sostituendo la (10) nella seconda delle (6), e tenendo presenti le (9), risulta $\psi(u) + \gamma = 0$ la quale, per la prima delle (6), dà un'equazione differenziale in $e^{\mu-\lambda}$, u, che integrata fornisce

$$e^{\mu-\lambda} = 1 - \frac{2\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^2} \tag{11}$$

e, poichè il primo membro di (11) per $u \to 0$ deve tendere all'unità, deve essere

$$\gamma = \delta = 0. \tag{12}$$

5. Le (9), (10), (11), (12) portano a scrivere

$$e^{\nu} = \frac{\beta u + 1}{\alpha u + 1}; \qquad e^{\mu} = e^{\lambda} = \beta u + 1 \tag{13}$$

$$f(k, h) = a = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right). \tag{14}$$

Si può concludere che affinchè lo spazio-tempo quadridimensionale (1), soddisfacente alla condizione posta

$$\lim_{r \to \infty} \nu = \lim \mu = \lim \lambda = 0,$$

ammetta geodetiche che possano essere rappresentate da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a,$$

è necessario e sufficiente che valgano le (13), essendo α, β due costanti arbitrarie, indipendenti, come si è detto, da h, k che hanno il significato fornito dalle (3). Il valore di a è allora dato dalla (14).

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota I di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideità, della varietà spazio-tempo, converrà anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea studiata, il ds^2 della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana V_n, od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl [1], una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione y, perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto $P + dP$, si deduca da quella y relativa a P, nel seguente modo: Sia η la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente [2] y, η da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta\eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di S_{n-2} perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale S_{n-2} tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta\eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione y in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purchè si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vici-

[1] Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, pag. 109. Berlin, Springer, 1921.
[2] T. Levi-Civita, Rend. Circ. Palermo, tomo XLII, pag. 173, an. 1917.

nanze di L, sia costante. Sia

(1) $$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

e siano $y_i, y^{(i)}; \eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co- e controvarianti delle direzioni y, η. Avremo intanto

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds};$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -\,C^i.$$

Le C^i sono le componenti controvarianti del vettore C, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

(2) $$\frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}.$$

Ora, siccome y è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra y stesso di $\delta\eta - d\eta$; vale a dire, siccome y ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta\eta - d\eta$ per y, cioè

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -\, ds \sum_i C_i\, y^{(i)}.$$

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè $\frac{dx_i}{ds}$. Esse son dunque, in ultima analisi, $-\,dx_i \sum_r C_r\, y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

(3) $$\frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h\, y^h.$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \ldots, n$, dà un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine tra le n incognite $y^{(1)} y^{(2)} \ldots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto P_0 di L assegnamo ora a piacere n direzioni $y_1\, y_2 \ldots y_n$ mutuamente ortogonali, con la condizione che y_n sia tangente ad L. Le direzioni $y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$ saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al § precedente che, come è evidente dalla

sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L n direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra V_n immersa in un S_N euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di V_n le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l' S_n tangente a V_n in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni $y_1 y_2 .... y_n$ relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di V_n in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate y si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$ $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto Q_0 di V_n che nel riferimento relativo al punto P_0 di L abbia coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha Q_0 nel riferimento relativo a P_0. Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega ds_Q a ds_P nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § 1 con δ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § 1, dà $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, C \times Q - P$, se con $\times$ si indica il simbolo del prodotto scalare e con $Q - P$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre ds_Q e $(d - \delta)\, s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)\, s_Q$; cioè

$$ds_Q = ds_P [1 + C \times Q - P]. \tag{4}$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)^{\text{upla}}$ infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di V_n passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q, $\bar{y}_1 \bar{y}_2 ... \bar{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M, e l'arco s_P di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M.

Se M è infinitamente prossimo ad L, ds_Q sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_P =$ costante. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2 ;$$

e, tenendo presente (4),

$$ds_M^2 = (1 + C \times M - P)^2\, ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2 . \tag{5}$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del ds^2.

Fisica. — *Il contributo di A. Bartoli nella previsione termodinamica della pressione della luce.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. DI LEGGE.

Le considerazioni termodinamiche del Bartoli sulla pressione delle radiazioni, per quanto segnalate ai fisici dal Boltzmann fin dal 1884 in due scritti sui diffusissimi *Annalen der Physik*, vengono raramente ricordate dagli autori di trattati o di studî sulla teoria dell'irraggiamento, o, ciò che è peggio, vengono talvolta ricordate in modo inesatto, non tenendo conto di certe limitazioni che pur erano state chiaramente espresse; e quindi attribuendo al Bartoli pretese dimostrazioni, che egli non aveva davvero pensato di poter dare, e che oggi si sanno impossibili.

Convinto d'altra parte che nelle esposizioni della teoria dell'irraggiamento secondo l'attuale tendenza, ad un certo punto, debbano trovar posto logicamente, e quasi direi necessariamente, considerazioni perfettamente analoghe a quelle del Bartoli, ho voluto trattare secondo lo stesso concetto fondamentale, ma con criterî più moderni, la questione che egli si era proposta ed aveva risolta fin dal 1876 [1]. Questo lavoro, che eccede i limiti di spazio imposti a questi Rendiconti, verrà pubblicato prossimamente nel Nuovo Cimento.

Però, essendo stata altra volta qui ricordata l'opera del Bartoli su questo argomento dai chiar. proff. Ròiti e Volterra nella relazione e nelle Note ad una sua Memoria postuma [2], ed essendo altresì stato espresso il desiderio che venissero chiariti alcuni punti oscuri, mi permetto di esporre brevemente i risultati di quella mia ricerca che hanno attinenza all'opera del Bartoli.

* * *

Ogni moderna teoria dell'irraggiamento termico consiste essenzialmente nella logica applicazione dei principî della termodinamica ad una determinata teoria ottica. La via, che di preferenza si segue attualmente nell'esporre

[1] *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore e sopra il radiometro di Crookes*, Firenze, Le Monnier, 1876.

[2] Ved. questi Rendiconti, vol. XII, 2° sem., ser. 5ª, pag. 345.

una tale teoria, è quella adottata dal Planck nelle sue classiche *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung.*

Essa porta a considerare, *in un primo tempo*, l'energia raggiante come un'energia che si suppone diffondersi con velocità finita, e quindi localizzata nello spazio, ma da un punto di vista puramente energetico, senza alcuna ipotesi sulla sua particolare natura. Applicando a questa generalissima concezione fisica le leggi della termodinamica, si giunge alle più generali conclusioni della teoria dell'irraggiamento, che valgono indipendentemente dalla teoria ottica che si ammetterà in seguito, e quindi per tutte le teorie ottiche, purchè solamente ammettano la propagazione, con velocità finita, dell'energia raggiante, che loro particolarmente compete. Sono queste le leggi fondamentali della teoria dell'irraggiamento, fra le quali culmina l'importantissima legge di Kirchhoff.

Solamente *in un secondo tempo* si scende a più particolari specificazioni ammettendo una speciale teoria ottica e deducendo le conseguenze che derivano logicamente dalle leggi fondamentali precedenti e da questa particolare ammissione.

Un vantaggio rilevante di questo metodo è quello di permettere facili paralleli fra le conseguenze corrispondenti alle differenti teorie ottiche, per esempio fra quelle corrispondenti alla teoria elettromagnetica e quelle corrispondenti alla teoria corpuscolare, come mostra il Planck stesso nel § 60 delle citate *Vorlesungen*, ove trae appunto da questo confronto una conferma in favore della teoria Maxwelliana.

Senonchè questa via, così logica, non è in generale seguita sistematicamente fino in fondo. Infatti nella parte delle considerazioni puramente energetiche, si fa intervenire d'ordinario quasi esclusivamente il primo principio della termodinamica, e non il secondo, che invece si applica poi ampiamente quando si è introdotta la teoria ottica particolare.

Ciò porta il grave inconveniente che rimangono nell'ombra importanti leggi fondamentali che vengono poi a risultare solamente più tardi e conglobate colle conseguenze della speciale teoria ottica ammessa.

Per esempio, introducendo la teoria elettromagnetica e conseguentemente la nozione ed il valore della pressione delle radiazioni che ad essa compete, viene immediatamente a risultare che ad una data riduzione di volume di una data cavità perfettamente speculare attorno ad un corpo irraggiante corrisponde necessariamente una determinata spesa di lavoro meccanico. Introducendo invece la teoria corpuscolare e la corrispondente pressione delle radiazioni, si trova che alla stessa diminuzione di volume della cavità speculare corrisponde una differente spesa di lavoro. Ora, siccome questi due lavori risultano intimamente legati, anzi proporzionali, alle due differenti pressioni che corrispondono alle due teorie, il fatto della necessità di spendere un lavoro per quella deformazione della cavità viene ad essere, in certo

modo, posto ad uno stesso livello coll'esistenza della pressione stessa; ciò che quasi indurrebbe a ritenere che quel lavoro di deformazione potrebbe essere nullo in una teoria ottica che non implicasse necessariamente l'esistenza di una pressione delle radiazioni. Ad ogni modo non risulta affatto evidente che, indipendentemente da qualsiasi teoria ottica ammessa, sia sempre necessario di spendere un lavoro per eseguire una deformazione come quella sopra detta.

Le considerazioni del Bartoli, ove venissero esposte prima di chiudere la parte puramente energetica della teoria dell'irraggiamento, eliminerebbero il rilevato inconveniente, perchè permetterebbero di dimostrare che il secondo principio della termodinamica esige che alla diminuzione di volume di un involucro speculare intorno ad un corpo irraggiante debba corrispondere sempre una spesa di lavoro. La scelta particolare fra le infinite teorie ottiche logicamente possibili, colla quale dovrebbe iniziarsi la seconda parte della trattazione, più non apparirebbe quindi arbitraria, ma bensì, come di fatto è, soggetta non solo alla condizione fondamentale, più volte ricordata, di ammettere una velocità di propagazione finita per le proprie radiazioni, ma anche alla condizione che debba necessariamente corrispondere una spesa di lavoro ad ogni contrazione di un involucro speculare pieno di irraggiamento. Risulterebbe però anche (e questo è il punto di capitale importanza) che questo lavoro non può venir determinato completamente mediante considerazioni energetiche, e che perciò rimane ancora un largo campo di arbitrarietà nella scelta della teoria ottica.

Infatti il Bartoli, considerando un esperimento ideale fondato su deformazioni di superficie perfettamente riflettenti (considerazioni che oggi sono divenute correnti, ma che allora rappresentavano ancora una quasi assoluta novità e sollevavano molte obbiezioni), era giunto appunto a questa conclusione.

Nella mia prossima pubblicazione sul Nuovo Cimento mostrerò come, rendendo invertibile il ciclo di trasformazioni considerato, per mezzo di un'insignificante modificazione, ed applicandovi quindi il secondo principio della termodinamica in forma di equazioni, anzichè di inequazioni, quali converrebbero ad un ciclo non invertibile, si possa dare alla scoperta del Bartoli una forma matematicamente rigorosa. Essa, in ultima analisi, non è altro se non l'espressione della *necessaria* relazione fra la temperatura T del corpo irraggiante, la densità dell'energia irradiata $\psi(T)$, ed una funzione $\varphi(T)$, caratteristica del lavoro che si deve spendere per ridurre il volume di una cavità speculare contenente il corpo irraggiante:

$$\varphi(T) = T \int \frac{\psi(T)}{T^2}\, dT.$$

A questa relazione, che è una delle poche leggi puramente energetiche che si conoscono, propongo sia dato il nome di *legge di Bartoli.*

A questo punto conviene ricordare come il Bartoli con fine intuizione aggiungesse che *la più semplice ipotesi* per spiegare la spesa di lavoro sopradetta fosse quella di ammettere l'esistenza di una pressione delle radiazioni. Ma non solo non affermava la necessità di tale ipotesi, ma, nello stesso scritto ove l'enunciava per la prima volta, prometteva di dare, come in seguito tentò, altre ipotesi, che secondo lui dovevano egualmente bene risolvere la difficoltà.

Errano quindi coloro che affermano che il Bartoli abbia creduto di poter dimostrare *termodinamicamente* l'esistenza della pressione della luce, che *termodinamicamente* invece non può essere dimostrata.

Ammettendo l'esistenza di una pressione della luce $p(T)$, come semplice ipotesi generale, ma senza ulteriori specificazioni sulla sua essenza fisica, l'espressione della legge del Bartoli si trasforma immediatamente nella relazione

$$T\,dp(T) - p(T)\,dT = \psi(T)\,dT$$

dedotta dal Boltzmann fin dal 1882 ripetendo le considerazioni del Bartoli, ed ammettendo senz'altro l'ipotesi della pressione.

Essa non è più una relazione puramente energetica, perchè contiene la particolare ammissione fisica dell'esistenza della pressione delle radiazioni; perciò non conviene più a tutte indistintamente le teorie ottiche, ma solamente a tutte quelle teorie che implicano una qualsiasi pressione della luce.

Essa non è però ancora una relazione caratteristica di una particolare teoria dell'irraggiamento, ma lo diviene immediatamente appena si esprima una qualsiasi delle due funzioni $p(T)$ o $\psi(T)$ in funzione dell'altra, secondo una determinata teoria ottica.

Questo appunto fece il Boltzmann ponendo, in accordo alla teoria di Maxwell, $p(T) = 1/3\ \psi(T)$, ricavandone così una relazione caratteristica dell'attuale teoria dell'irraggiamento, dalla quale potè con una semplice integrazione dedurre la nota legge che lo Stefan aveva sperimentalmente scoperto qualche anno prima.

*
* *

Per esaurire l'analisi storica dell'opera del Bartoli, è bene di chiarire alcuni punti secondarî, che dànno talora luogo ad equivoci.

Egli, che aveva così esattamente dimostrata la necessità della spesa di un lavoro per ogni diminuzione di volume di una cavità speculare contenente un corpo irraggiante, ed intuita la probabilità che esso fosse dovuto ad una pressione delle radiazioni, ammise poi, senza alcuna plausibile ragione, che quella pressione dovesse essere eguale alla densità dell'energia raggiante dell'ambiente. Ciò lo avrebbe senza dubbio condotto a conclusioni numeriche errate, se non fosse avvenuta una strana compensazione. Infatti egli aveva

sempre considerato nei suoi esperimenti ideali solamente l'energia raggiante propagantesi in una determinata direzione e non, come ora generalmente si usa, l'energia totale, propagantesi in tutte le direzioni; più precisamente, considerando due sfere concentriche, aveva tenuto conto solamente dell'energia propagantesi dall'una all'altra in senso radiale, la quale, come è noto, è solamente la terza parte dell'energia totale. Quindi, senza rendersene conto, aveva ammesso fra pressione e densità di energia la relazione corrispondente alla teoria di Maxwell e così ottenuto i valori numerici che l'esperienza ha poi confermati.

Ancor più strana è la coincidenza che egli trovò fra quella sua espressione della pressione della luce in funzione della densità dell'energia (che, come abbiamo veduto, concordava colla teoria di Maxwell) e l'espressione datane dall'Hirn, nell'ipotesi dell'ottica corpuscolare, cui deve invece corrispondere un valore doppio. Ciò è dovuto ad un equivoco dell'Hirn, il quale ammise che la pressione dovuta all'urto di corpuscoli cadenti normalmente su di una parete assorbente sia uguale alla forza viva di essi divisa per la velocità, ossia a $\frac{mv}{2}$, anzichè alla quantità di moto mv; così la pressione su di una parete riflettente, che è eguale al doppio di quella su di una parete assorbente, gli risultò anche solamente la metà di quanto avrebbe dovuto.

Fisica. — *Sulla diffusione dell'idrogeno, dell'elio e del neon attraverso il vetro riscaldato* [1]. Nota di Ettore Cardoso, presentata dal Socio E. Paternò.

Il prof. Lo Surdo [2] ha pubblicato recentemente, in questi Rendiconti, i risultati di certe sue esperienze relative al passaggio dell'idrogeno, dell'elio e del neon attraverso tubi di vetro riscaldati. Queste diffusioni, che, per l'idrogeno e l'elio almeno, erano già ammesse o supposte da qualche sperimentatore [3], vengono ad entrare, per merito delle belle esperienze di A. Lo Surdo, nel dominio dei fatti sperimentali saldamente stabiliti.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica-fisica della R. Università di Napoli.

[2] Rend. Acc. Lincei, 1921, XXX, pag. 85.

[3] Nel 1911, il compianto prof. J. M. Crafts, col quale effettuavo una serie di misure col termometro a gas, ebbe a dirmi, a varie riprese, che aveva scelto l'azoto, come gas termometrico, invece dell'idrogeno o dell'elio, perchè, parecchi anni prima, aveva osservato che, a caldo, questi gas attraversavano le pareti di vetro (*Jena*, 16, III) dei suoi termometri, falsando le misure. Simili constatazioni ebbi a fare anch'io, più tardi, con un termometro ad idrogeno, in vetro fusibile di Turingia.

L'autore vede inoltre nei fenomeni di diffusione, da lui messi in evidenza, la spiegazione delle singolari discordanze che esistono fra le varie osservazioni sperimentali riguardanti il dibattuto problema della così detta trasmutazione dell'idrogeno, in elio e neon.

Quest'ultima questione è, però, così importante, che credo opportuno tornare sull'argomento, tanto più che sono del parere che l'interpretazione del Lo Surdo non rechi ancora la luce desiderata.

*
* *

I sigg. Collie, Patterson e Masson [1] avevano previsto la eventualità del passaggio dell'elio e del neon, dall'aria, nei loro tubi di scarica, riscaldati da un forte eccitamento, e, per evitare questo possibile inconveniente, ebbero cura, in diverse esperienze di controllo, di attorniare i loro tubi laboratorio con camicie di vetro, facendo il vuoto nello spazio intermedio.

Malgrado ciò, la presenza dell'elio e del neon fu riscontrata dopo il passaggio della scarica. Mi sembra, quindi, che in tali condizioni sperimentali sia ben difficile di poter spiegare il fenomeno parlando di diffusioni.

D'altra parte, in nessuna delle esperienze dei sigg. Strutt, Merton, nè in quelle da me effettuate in collaborazione col prof. A. Piutti, fu riscontrata la presenza di questi gas nobili [2]. Non è inutile ricordare che le nostre esperienze furono fatte con e senza camicia protettrice, e la sensibilità del metodo di ricerca era sufficiente per accertare la presenza del neon contenuto in $^1/_{20}$ di cm^3. di aria.

Continuando l'analisi delle esperienze, si può osservare che, per verificare il passaggio dell'elio e del neon, il Lo Surdo ha dovuto immergere il tubo di vetro scaldato in un'atmosfera ricchissima di elio e contenente notevoli quantità di neon (elio aeronautico), mentre nelle esperienze di Collie, Patterson e Masson, e nelle nostre, il tubo di scarica, quando non era protetto da una camicia, era semplicemente attorniato da aria atmosferica, che contiene, come si sa, quantità infinitamente minori di elio e di neon di quelle contenute nell'elio aeronautico.

Si può aggiungere che non risulta che il prof. Lo Surdo abbia osservato la diffusione dell'elio e del neon atmosferici nei suoi tubi scaldati.

*
* *

Io credo che queste brevi considerazioni dimostrino che i fenomeni di diffusione, di cui tratta il prof. Lo Surdo, siano insufficienti a spiegare le

(1) Trans. Chem. Soc., 1913, pag. 419 e Proc. Roy. Soc., 1914, A. 91, pag. 30.

(2) Strutt, Proc. Roy. Soc., 1914, A. 89, pag. 499; Merton, ibid., 1914, A. 89, pag. 519; Piutti e Cardoso, Gazz. chim. ital., 1920, pag. 5, e J. ch. phys., 1920, *18*, pag. 81.

discordanze riguardanti la presenza dell'elio e del neon nei tubi di scarica contenenti idrogeno.

Quest'ultima questione, del resto, è certamente molto più complessa ed ancora oscura. Forse la spiegazione di questi fenomeni sarà piuttosto da ricercarsi nelle condizioni in cui si effettua la scarica, conformemente al parere emesso da Baly [1], al quale accennai sulla memoria suricordata.

Fisica terrestre. — *Sul movimento ondoso del mare e delle navi.* Nota I di Emilio Oddone, presentata dal Corrispondente L. Palazzo.

Uno dei problemi che interessano l'Oceanografia è la determinazione dell'ampiezza, lunghezza e periodo delle onde del mare.

Ed in parallelo, uno dei problemi pratici, che più interessano la navigazione, è la determinazione di quanto i moti del mare si riverberano sulle oscillazioni delle navi.

Tali dati si possono ottenere con apparecchi capaci di fissare esattamente certi elementi di moto del mare e della nave, primo tra tutti l'elemento *accelerazione verticale*. Il sismografo per la componente verticale serve per eccellenza a dare quelle accelerazioni: soltanto sotto l'usuale forma e colla sua troppa sensibilità non riesce pratico.

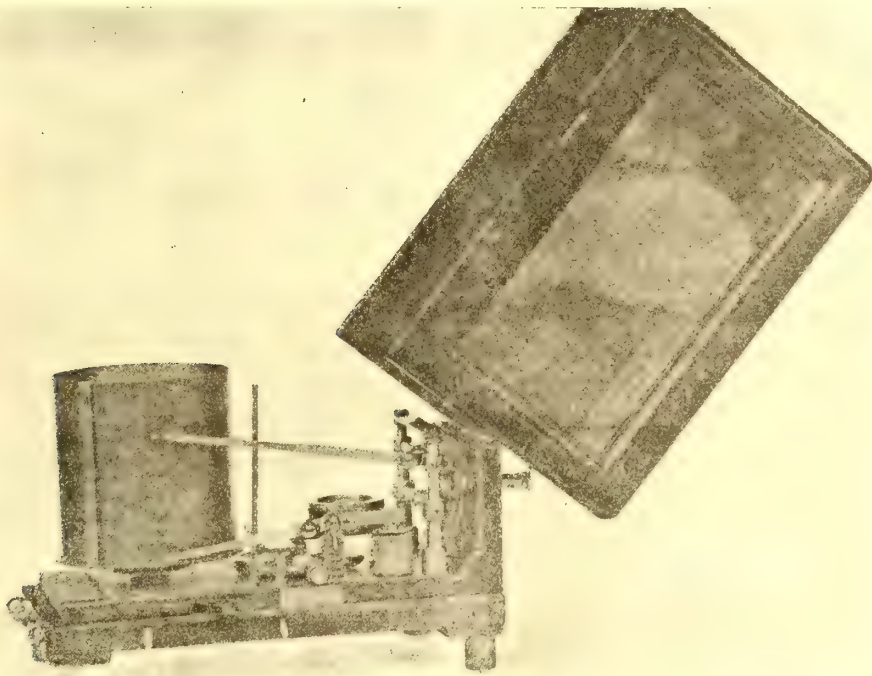
Val meglio ricorrere ai tipi più pigri, per esempio a quelli che reagiscono solo alle accelerazioni di alcune decine di Gals.

Mi parve che un apparecchio appropriato, per simili ricerche, potesse essere l'*inerziometro* in uso nell'aviazione; ed all'uopo, alla Direzione dell'Istituto Sperimentale Aeronautico di Montecelio chiesi a prestito il modello rappresentato nella vicina figura.

L'apparato consiste in una piccola massa d'ottone solidale a breve braccio pressochè orizzontale, libero di rotare per una sua estremità attorno ad una cerniera ad asse orizzontale, fissa alla scatola dell'apparecchio, la massa è tenuta in posizione d'equilibrio da due forze verticali eguali e contrarie che nascono da due specie di dinamometri stirati in contrasto. Perchè qualsiasi moto verticale impresso all'apparecchio riesca aperiodico, ossia affinchè le molle non introducano il periodo proprio, una delle stesse molle funziona da smorzatore, la qual cosa si ottiene tendendo una delle solite capsule aneroidiche, colla sola differenza che il suo interno è messo in comunicazione coll'aria esterna mediante piccolo foro. Quando il peso si abbassa sulla capsula a soffietto, l'aria non può uscire istantaneamente, per cui ne risultano delle varia-

[1] Annual Report of the Chemical Society for 1914, pag. 45; ibid., 1920, pag. 29. Cfr. pure F. Soddy, ibid., 1920, pag. 221.

zioni di pressione proporzionali alla velocità di uscita del gas, una condizione necessaria e sufficiente a produrre lo smorzamento, il quale, in definitiva, può ottenersi totale rimpicciolendo opportunamente il foro di uscita dell'aria.

Una pennina all'estremo di una leva scrive con forte ingrandimento il moto verticale relativo al supporto dell'apparecchio, su di una carta affumicata avvolta su di un tamburo, che un movimento di orologeria pone in rapida rotazione.

Portiamo quest'apparecchio a bordo di una nave e disponiamolo presso al metacentro per evitare, più che possibile, i movimenti di beccheggio e di rullìo. Vediamo tosto che esso sente le accelerazioni verticali della nave al punto di osservazione. L'apparecchio dà un grafico, che va interpretato come segue:

Il moto ondoso del mare imparte alla nave delle ampiezze di moto verticale, le quali variano col tempo secondo la

$$z = Z_m \sin(pt) . \tag{1}$$

L'equazione valevole per ogni sismografo verticale, nella supposizione che l'attrito sulla carta, su cui muove la penna, sia zero, è una relazione differenziale semplice, lineare di second'ordine a coefficienti costanti che si scrive:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' \pm n^2\theta + \frac{1}{l} z'' = 0 \tag{2}$$

col doppio segno perchè i sensi, del moto che risente l'apparato, sono due: verso l'alto e verso il basso.

La (2) integrata, dà un moto che è composizione del moto pendolare proprio alla massa dell'apparecchio e del moto della nave. Dalla massima ampiezza $L\theta_m$ che la penna, di braccio totale L ed elongazione θ_m scrive sul tamburo, si passa alla massima ampiezza verticale vera del moto della nave Z_m mediante la

$$Z_m = \frac{L\theta_m}{I} \tag{3}$$

dove

$$I = \frac{L}{l} \frac{1}{U} \tag{4}$$

ed

$$U = \frac{T^2}{T_0^2} + 1 \tag{5}$$

per molla totalmente smorzata.

Sostituendo le (4) e (5) nella (3), viene:

$$Z_m = \frac{l}{L} \left(\frac{T^2}{T_0^2} + 1 \right) L\theta_m . \tag{6}$$

Il quoziente $\frac{l}{L}$ è il reciproco dell'ingrandimento esterno e può ottenersi in due modi: dal rapporto tra la distanza del centro di gravità della massa all'asse di rotazione e la lunghezza totale del braccio, dalla pennina allo stesso asse di rotazione; ovvero dal rapporto tra le ampiezze di spostamento della massa e della pennina per effetto di un dato carico. È insomma una quantità nota.

T_0^2 si calcola mediante la formola:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 K}{\beta a^2} \tag{7}$$

dove K è il momento d'inerzia, β quel peso che fa accorciare la molla dell'unità di lunghezza, a la distanza dalla molla all'asse di rotazione. Il fattore $\frac{K}{\beta a^2}$ è detto *elongazione della molla* o *lunghezza del sistema pendolare ridotta*.

Le quantità $\frac{l}{L}$ e T_0^2 che entrano nella (6), essendo ora note, possiamo ricavare, per ogni periodo T ed ogni escursione smorzata $L\theta_m$ sul diagramma, il corrispondente Z_m che è l'ampiezza massima di moto verticale della nave.

Approfittai dell'occasione che ero stato designato a compiere una missione oltre Oceano per sperimentare in viaggio, sul Mediterraneo e sull'Atlantico, il moto verticale delle navi dovuto al moto ondoso del mare.

Portai meco l'apparato a cui già ho accennato, comodissimo al trasporto, perchè contenuto in scatola dalle dimensioni di $17 \times 12 \times 10$ cm.

La massa inerte pesa 60 gr. e la penna registra con un ingrandimento $\frac{L}{l} = 18$. Il tamburo ruota colla velocità di circa cm. 0,12 al secondo. Il periodo strumentale calcolato ha il valore $T_0^2 = 0{,}0022$.

La formola (6) diventa:

$$Z_m = \frac{1}{18}\left(\frac{T^2}{0{,}0022} + 1\right) L\theta_m .$$

E noto Z_m si ricava l'accelerazione dalla relazione:

$$Z''_m = \frac{4\pi^2}{T^2} Z_m . \tag{8}$$

Verificai il funzionamento assoggettando l'apparato, a moto armonico conosciuto. La bontà della teoria risultò dalla concordanza tra l'escursione verticale reale impressa all'apparecchio, ed il valore che per la medesima escursione deducevo teoricamente.

In una Nota successiva darò i risultati ottenuti nelle traversate Gibilterra-New-Jork e viceversa, estratti da circa cento diagrammi, colla registrazione di due mila sollevamenti ondosi delle navi « *Presidente Wilson* » (16.000 tonellate) e « *Duca degli Abruzzi* » (8.000 tonellate).

Fisiologia. — *Sulla tecnica delle fistole utreine sperimentali* [1]. Nota del dott. G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

In collaborazione col collega K. Krzyskowsky mi proposi già di estendere allo studio delle funzioni uterine il metodo delle fistole sperimentali: fu scelta la cagna come animale da esperimento, e furono comunicati all'Accademia medica di Roma [2] i risultati delle nostre prime ricerche positive.

Successivamente ho continuato a interessarmi dell'argomento, proponendomi innanzi tutto di perfezionare e di ampliare la tecnica operatoria; gli animali a tale scopo operati potevano inoltre essere utilizzati per eventuali osservazioni fisiologiche.

Ho potuto così attuare altri tipi di fistole uterine, che, unitamente a quelle ottenute con K. Krzyskowsky, rappresentano le principali, che era

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisiologico della R. Università di Roma diretto dal prof. S. Baglioni.

[2] G. Amantea e K. Krzyskowsky, Boll. d. R. Accad. Med. di Roma, anno XLVI, 1920.

possibile proporsi, e che con adeguate varianti, a seconda dei casi, potranno rendersi di utile applicazione fisiologica per lo studio delle funzioni uterine, sia dal punto di vista delle modificazioni connesse col periodo di fregola, sia da quello della motilità, della fecondazione, ecc.

Alle nostre prime ricerche sperimentali facemmo precedere uno studio anatomico topografico, allo scopo di accertare i rapporti dell'utero della cagna cogli organi vicini, nonchè di stabilire con esattezza la sua proiezione sulla superficie cutanea addominale, per ricavarne i dati necessarî all'esecuzione dell'operazione nel modo più esatto possibile sui varî tratti dei corni uterini. Dai nostri rilievi anatomici, in accordo con quanto già era noto al riguardo [1], risultò che l'utero nella cagna presenta due corni molto lunghi, i quali si staccano dal corpo molto breve a livello circa della VI-VII vertebra lombare, e divergono disponendosi ai lati del retto, nella direzione dei reni. Noi potemmo stabilire inoltre che una linea, la quale vada dal penultimo all'ultimo capezzolo, così a destra come a sinistra, incrocia presso a poco in corrispondenza del suo terzo medio, ad angolo acuto, il corno uterino corrispondente; cosicchè un taglio condotto lungo tale linea, per 4-5 cm., permette di raggiungere agevolmente e con sicurezza il corno omolaterale.

In una prima cagna si praticò l'operazione seguente: attraverso un taglio di circa 5 cm. fra l'ultimo e il penultimo capezzolo di destra si raggiunse il corno uterino omolaterale, e, sostenendolo fuori della ferita su due fili passati al disotto, si recise in corrispondenza del terzo medio a becco di flauto, rispettando il fascio vascolare; l'estremità recisa del moncone periferico fu chiusa con due punti di sutura introflettendone i margini, mentre l'estremità del moncone ovarico fu fistolizzata, fissandola opportunamente alla cute; la ferita addominale, suturata a strati successivi, fu protetta col collodion Il risultato fu perfetto.

In una seconda cagna, con tecnica operatoria analoga, fu pure trasversalmente reciso al terzo medio il corno uterino destro, ma comprendendo anche il fascio vascolare, e fistolizzando poi, tanto l'estremità recisa del moncone ovarico, quanto quella del periferico.

A guarigione completa nei nostri due animali le fistole si presentavano sotto forma di piccolissime aperture imbutiformi, del diametro ciascuna di circa 2 mm. Nella seconda cagna ci fu possibile seguire anche le modificazioni durante un completo periodo di fregola e parte del periodo di gravidanza [2].

Avendomi questi primi tentativi convinto dei vantaggi del metodo, e avendo perciò stabilito di utilizzarlo per una serie di sistematiche ricerche fisiologiche, ho rilevato subito la necessità di poter disporre di animali, che permettessero di sorvegliare le modificazioni oltre che di un solo corno uterino, anche di entrambi i corni (destro e sinistro); nonchè di animali operati in maniera da potere sorvegliare direttamente l'orifizio uterino, ecc.

Ho perciò voluto tentare altri tipi di fistole in questo senso.

Mi è stato agevole attuare in una cagna bilateralmente, cioè tanto pel corno di destra quanto per quello di sinistra, la doppia fistola al terzo medio di ciascuno (fistola del moncone ovarico e fistola del moncone periferico). Ottenni così, in altre parole, a destra e a sinistra il risultato sopra descritto per la seconda cagna. L'operazione, in questo terzo animale, fu eseguita in due tempi.

Ho tentato pure con pieno successo la fistola del tratto iniziale dei due corni cioè, attraverso la solita incisione della parete addominale fra l'ultimo e il penultimo

---

(1) J. Athanasiu et J. Carvallo, *Chien*, in «Dictionnaire de Physiol.» di Ch. Richet; e W. Ellenberger u. H. Baum, *Anatomie des Hundes*, Berlin, 1891.

(2) G. Amantea e K. Krzyskowsky, l. c.

capezzolo di destra, ma condotta alquanto più medialmente che nei casi precedenti, mi fu possibile raggiungere la biforcazione dei corni dal corpo uterino; li recisi presso la biforcazione entrambi, insieme col fascio vascolare; chiusi con due punti di sutura l'apertura beante dei brevi monconi rimasti in continuità col corpo uterino introflettendone i margini, e fistolizzai quindi i due corni nel loro tratto più periferico.

Infine su altre due cagne mi proposi di rendere facilmente accessibile all'osservazione e all'esplorazione diretta l'orifizio del corpo uterino: in un caso raggiunsi il corpo uterino attraverso un'incisione di circa 6 cm. di lunghezza, condotta medialmente alla linea che congiunge l'ultimo col penultimo capezzolo; fu facile apprezzare colla palpazione il corpo uterino sotto la parete vaginale; con una piccola incisione longitudinale di quest'ultima, in corrispondenza del corpo stesso, stabilii il limite estremo anteriore della vagina, ove condurre un taglio a tutto spessore, circolare, senza ledere l'utero; ciò fatto, e allacciati i vasi recisi, chiusi con opportuni punti di sutura la ferita vaginale, e fissai quindi ai varî piani della parete addominale il corpo uterino, circondato da un breve manicotto vaginale residuale. Quest'ultimo, per l'inevitabile e facilmente comprensibile difetto di irrorazione, andò in necrosi nei giorni successivi; ma tale inconveniente restava compensato dal vantaggio fornito in primo tempo dallo stesso residuo vaginale, che fu utilizzato come mezzo di sostegno provvisorio, permettendo una provvisoria ma salda fissazione alla cute; il distacco del lembo necrotico avvenne infatti quando già il corpo uterino (che per l'impianto nella posizione voluta aveva dovuto subire una certa trazione, per quanto limitata) aveva contratto sufficienti aderenze cogli strati profondi (peritoneale, muscolare). È ovvio che in tali condizioni non si potè avere la guarigione per prima intenzione.

Nell'ultima cagna operata invece, dopo avere praticato la stessa incisione che nella precedente, con dolce trazione portai il tratto vaginale corrispondente al corpo uterino fino a livello del piano cutaneo, e in tale posizione lo fissai con punti di sutura successivamente al peritoneo, ai muscoli e al sottocutaneo, in modo da rimanere così delimitato dalla sutura un sufficiente tratto della superfice anterolaterale della vagina corrispondente al corpo uterino; incisi quindi, nel senso antero-posteriore, la parete vaginale fra i punti di sutura limitanti, suturandone i margini convenientemente alla cute. La guarigione avvenne per prima intenzione, e ottenni una fistola vaginale, precisamente tale da permettere l'esplorazione diretta dell'imbocco uterino.

Alle sei varietà di fistole uterine descritte bisogna aggiungerne una settima, consistente nella fistolizzazione di un corno nel suo tratto più periferico e dell'altro corno nel suo tratto più prossimo all'ovaio; e infine un'ottava che costituisce anche il primo tentativo diretto ad estendere il metodo delle fistole allo studio degli organi genitali, e che fu eseguito con risultato positivo dall'Ivanow [1]: anzi da queste iniziali ricerche dell'Ivanow partimmo per le ricerche nostre.

L'Ivanow, proponendosi ricerche sul processo della fecondazione artificiale, dimostrò, che il metodo delle fistole uterine può essere attuato sulle cagne praticando lungo il decorso di uno dei corni uterini, senza interromperne la continuità, una piccola incisione lineare a tutto spessore, e suturando i margini ai bordi della ferita cutanea.

Questi varî tipi di fistole, opportunamente combinati o variati, mi sembra che possano insieme rispondere, dal punto di vista della tecnica sperimentale, alle più svariate esigenze dei problemi fisiologici che è possibile proporsi di risolvere per tale via, e riguardanti sia la motilità uterina, sia le modificazioni dell'utero durante la fregola e la gravidanza, la fecondazione, ecc.

(1) Ivanow, *Russ. vrač.*, S. Petersburg, 7, 1908

È chiaro che la fistola dell'Ivanow può facilmente combinarsi col 1°, 2°, 4°, 5°, 6° e 7° tipo delle nostre fistole. Così pure ciascuna delle varietà da noi descritte si può agevolmente e utilmente associare all'asportazione dell'ovaio di un lato. Potrebbe anche presentarsi l'opportunità di combinare sempre sullo stesso animale il nostro 1° tipo col 2° o col 5° o col 6°; ovvero il 2° o 3° tipo col 5° o col 6°, ecc.

Le osservazioni potute finora eseguire sulle varie cagne operate saranno comunicate a parte; esse mi confermano pienamente la fiducia nei vantaggi del metodo.

Biologia. — *Sulla formazione dello sclerotomo nei Murenoidi* (1). Nota preliminare del dott. UMBERTO D'ANCONA, presentata dal Socio B. GRASSI.

In due Note precedenti (2) ho descritto una formazione speciale esistente nelle larve dei Murenoidi tra lo ialoscheletro e la muscolatura del tronco, formazione che dal prof. Grassi, che per primo la osservò, fu chiamata *zona limitante* (*strati limitanti*). Fin da allora feci presente che uno dei punti da risolversi era di « vedere quale origine aveva e se poteva essere messa in relazione colle condizioni esistenti in forme inferiori (*Amphioxus*) ».

Avevo notato che già nelle prelarve appena sgusciate si rilevava la presenza di tre strati: di quello dei tubuli e dei due endotelî. Dunque, per poter arrivare a qualche conclusione in merito all'origine degli strati limitanti, era necessario fare delle ricerche su embrioni non ancora sgusciati e sulle prelarve; perciò durante un soggiorno a Messina (3) nel settembre scorso raccolsi un rilevante numero di uova, che, allevate opportunamente, mi hanno fornito tutti gli stadî necessarî fino al completo riassorbimento del tuorlo. Mi sono valso, per le ricerche in parola, principalmente delle specie indicate da Grassi (4) colle lettere A, B, E, I, raccolte da me in numero più abbondante.

Dall'esame di numerosi preparati ho potuto convincermi che, anche nelle

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) *Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi*. Rendiconti R. Acc. Lincei, ser. 5a, vol. XXX, 2° sem. pp. 385 e 432 (1921).

(3) Ringrazio il prof. Sanzo, direttore dell'Istituto centrale di biologia marina del R. Comitato talassografico, per aver messo gentilmente a mia disposizione tutti mezzi necessarî alla raccolta e alla preparazione del materiale.

(4) Grassi, *Metamorfosi dei Murenoidi*. R. Comitato talassogr. ital., 1913.

prelarve in sviluppo più avanzato, degli strati limitanti sono presenti soltanto lo strato dei tubuli e i due endotelî, cioè gli strati di natura cellulare; strato gelatinoso e fibrille invece non sono ancora comparsi. Risalendo agli stadî più giovani, ho trovato che i primi tre strati derivano dallo sclerotomo.

In embrioni delle specie A, B e I già al secondo giorno di sviluppo si nota la presenza dello sclerotomo in forma di cellule proliferanti alla faccia mediale di ciascun somite, tanto al margine ventrale, quanto a quello dorsale Tale origine dello sclerotomo fu già notata dal Sunier (¹), che però non si curò di osservarne l'ulteriore sorte.

Seguendo invece lo sviluppo, si vede che le cellule sclerotomiche dorsali e ventrali progrediscono tra la faccia mediale del miotomo da una parte, la corda e il tubo midollare dall'altra, venendo in tal modo a incontrarsi.

In stadî più avanzati si vedono le cellule sclerotomiche disporsi man mano in varî strati. Quelle più addossate allo strato muscolare presentano frequentemente dei vacuoli; quelle invece più mediali assumono un aspetto endoteliale. Arriviamo poi ad avere più lateralmente, vicino alla muscolatura, lo strato dei tubuli e più medialmente i due endotelii.

In tale disposizione si vede una chiara assomiglianza con quanto si riscontra nell'*Amphioxus* e che fu dapprima messo in evidenza dall'Hatschek (²) (1888), che per primo usò il termine di sclerotomo. Secondo l'Hatschek, questo si forma come una piega alla parte ventrale del foglietto muscolare, piega che si estende dorsalmente tra la muscolatura e la corda e nel cui interno si continua un diverticolo del miocele (sclerocele).

La differenza nella formazione dello sclerotomo tra l'*Amphioxus* e i Murenoidi consiste dunque nel fatto che nel primo esso si forma per estroflessione della parete del somite; invece nei secondi, nei quali il somite è una massa solida, lo sclerotomo si forma per proliferazione, e soltanto secondariamente le cellule sclerotomiche si dispongono in strati endoteliali. Secondo il Sunier però, quest'ultima condizione si verificherebbe anche nell'*Amphioxus* e le immagini raffigurate dall'Hatschek sarebbero soltanto secondarie.

Secondo Swaen e Brachet (³), nella trota da principio lo sclerotomo appare come uno strato di natura epiteliale delimitante una piccola cavità; in seguito si risolve in mesenchima.

(¹) Sunier, *Les premiers stades de la différentiation interne du myotome et la formation des éléments sclérotomatiques chez les Acraniens, les Sélaciens et les Téléostéens*. Onderz. Zool. Lab. Rijksuniversiteit Groningen, 1911.

(²) Hatschek, *Ueber den Schichtenbau von Amphioxus*, Anat. Anz., III Jahrg., pag. 662, 1888.

(³) Swaen et Brachet, *Étude sur les premières phases du developpement des organes dérivés du mésoblaste chez les poissons teléostéens*. Arch de biol, tom. XVI, pag. 173 (1899).

Nei Murenoidi, da quanto s'è visto, le condizioni sono molto più simili a quelle dell'*Amphioxus* che non a quelle della trota, e sotto questo punto di vista nelle larve dei Murenoidi si conserverebbe una condizione primitiva. In esse però si nota in più lo strato dei tubuli, che, come avevo già supposto nelle mie precedenti Note, sono equivalenti a cellule. Inoltre si ha una condizione diversa da quella dell'*Amphioxus* nel fatto che lo sclerotomo si forma anche dal margine dorsale del somite.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente PATERNÒ dà il triste annuncio della grave perdita che l'Accademia ha fatto nella persona del Socio nazionale sen. prof. GIACOMO CIAMICIAN, mancato ai vivi il 2 gennaio 1922; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Chimica*, come Corrispondente dal 14 luglio 1888, e come Socio nazionale dal 7 novembre 1893. Del Socio Ciamician il Presidente ricorda le benemerenze e gli alti meriti scientifici, aggiungendo che sarà degnamente commemorato in una delle prossime sedute.

Altri lutti, dice il Presidente, hanno colpito l'Accademia colla morte dei seguenti Soci:

HERMANN SCHWARZ, morto il 30 novembre 1921; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Matematica*, come Socio straniero, sino dal 7 settembre 1888.

MAX NOETHER, mancato ai vivi il 13 dicembre 1921; faceva parte il defunto dell'Accademia, per la *Matematica*, come Socio straniero, sino dal 6 agosto 1891.

MAX VERWORN, morto il 23 novembre 1921; faceva parte il defunto dell'Accademia, per le *Scienze biologiche*, come Socio straniero, sino dal 31 agosto 1910.

Il Segretario CASTELNUOVO aggiunge le seguenti parole:

Colla morte di H. SCHWARZ e di M. NOETHER l'Accademia e le matematiche hanno subìto due gravi perdite. Lo Schwarz ha scritto tra il 1865 e il 1885 una serie di importanti lavori molto eleganti ed accurati sulle superficie ad area minima, sulle rappresentazioni conformi e il problema di Dirichlet, sulle serie ipergeometriche ed altri argomenti di geometria e di analisi. Il Nöther si è occupato principalmente, fra il 1870 e il 1900, di questioni di algebra nei loro rapporti colla geometria ed ha portato, in questo argomento, risultati fondamentali. Egli può riguardarsi come il fondatore di un indirizzo in cui molti in Italia hanno lavorato; e per aver esplorato lo stesso campo, quando i metodi erano più progrediti, siamo in grado di giudicare le difficoltà che egli ha dovuto vincere, la profondità e l'acume delle sue

ricerche. Legato di amicizia col nostro Cremona, egli ha portato complementi essenziali ed applicazioni ormai classiche alla teoria delle trasformazioni cremoniane.

Del Nöther, come dello Schwarz, e di altri Soci stranieri morti negli ultimi anni, saranno tenute commemorazioni in prossime sedute.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI-CIVITA presenta in omaggio, per incarico del Corrisp. CAMILLO GUIDI, un volume di questi intitolato: « Statica delle dighe per laghi artificiali ». I contributi originali che l'Autore aveva precedentemente arrecati all'importante questione sono quivi raccolti e inquadrati in una trattazione sistematica, col necessario corredo di indicazioni bibliografiche, di sviluppi teorici, di tabelle numeriche, di dati tecnici e norme regolamentari.

L'Accademico Segretario aggiunto MILLOSEWICH, presenta l'opera in due volumi del Socio straniero LACROIX: « Déodat Dolomieu, membre de l'Institut National (1750-1801) » dando larga notizia di quanto nei volumi è contenuto, e che del Dolomieu riportano la corrispondenza, e si occupano della sue vita avventurosa, della sua prigionia e delle sue opere.

AFFARI DIVERSI.

In seguito a richiesta del sig. AUGUSTO LAICI, si procede all'apertura di un piego suggellato inviato da quest'ultimo nell'ottobre del 1908. Nel piego è contenuta una relazione la quale dimostra che già nel 1908 il Laici aveva immaginato un sistema per ottenere effetti musicali da serie di campane, od altri strumenti sonori a percussione, mediante applicazione della elettricità.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta dell' 8 gennaio 1922.

A Catalogue of British Scientific and Technical Books. London, 1921. 8°, pp. I-XVIII, 1-376.

Anales del Congreso Nacional de la Industria Minera, tomo IV. Lima, 1921. 8°, pp. 1-411.

BAFFONI LUCIANI F. — Le infezioni puerperali: patogenesi e cura. Roma, 1921. 8°, pp. 1-20.

BARRELL J. — Relations of Subjacent Igneous Invasion to Regional Metamorphism (From the « American Journal of Science », vol. L). New Haven, 1921. 8°, 1-267.

BROWNING P. E. — On the Sulfite Method for the Separation and Determination of Gallium when Associated with Zinc. (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society ». vol. XLI, pp. 1491-1494). New Haven, 1919. 8°.

BROWNING E. P. — The Use of Gallium Ferrocyanide in Analysis (Repr. from the « American Chemical Society », vol. XLIII, pp. 111-114). New Haven, 1921. 8°.

FISHMAN J. B. — Some Derivatives of 3-Nitro-4-Hydroxy-Benzil Alcohol (Repr.

from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 2297-2302). New Haven, 1920. 8°.

FISHMAN J. B. — The Condensation of Formaldehjde with Orthonitrophenol (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 2287-2297). New Haven, 1920 8°.

GUIDI C. — Statica delle dighe per laghi artificiali. Torino, 1921. 8°, pp. 1-103.

KARR W. G. — Comparative Metabolims of Proteins of Unlike Composition (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLV, pp. 289-295). New Haven, 1921. 8°.

KARR W. G. — Metabolism Studies with Diets Deficient in Water-Soluble (B) Vitamine (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 277-282). New Haven, 1920. 8°.

KARR W. G. — Some Effects of Water-Soluble Vitamine upon Nutrition (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 255-258). New Haven, 1920. 8°.

LACROIX A. — Déodat Dolomieu, membre de l'Institut National (1750-1801), tome I-II. Paris, 1921. 8°, pp. LXXX, 1-255. 1-320.

LANE W. F. — The Preparation of Some Alkyl Derivatives of Resorcinol and the Relation of their Structure to Antiseptic Properties (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIII, pp. 348-360). New Haven, 1921. 8°.

LONGWELL C. R. — Geology of the Muddy Mountains, Nevada, with a Section to the Grand Wash Cliffs in Western Arizona (Repr. from the « American Journal of Science », vol. L, pp. 39-62). New Haven, 1921. 8°.

MENDEL B. L. — The Adjustment of Blood Volume after Injection of Isotonic Solutions of varied Composition (Repr. from the « American Journal of Physiology », vol LIII, pp. 323-344). New Haven, 1920. 8°.

PORTER E. LYMAN — On the Qualitative Separation and Detection of Gallium (Repr. from the « American Journal of Science », vol XLIX, pp. 221-224). New Haven, 1917. 8°.

RAOT E. — La déclaration des droits et devoirs des Nations adoptée par l'Institut américain de Droit international. Washington, 1916. 8°, pp. 1-13.

RUTHERFORD THORPE M. — John Day, Promerycochoeri, with Descriptions of five New Species and one New Subgenus (Repr. from the « American Journal of Science », vol. I, pp. 215-244). New Haven, 1921. 8°.

SIMPSON G. E. — The Effect of Diet on the Excretion of Indican and the Phenols (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 69-97). New Haven, 1920. 8°.

SWANN LULL R. — The Cretaceous Armared Dinosaur, Nodosaurus textilis *Marsh* (Repr. from the « American Journal of Science », vol. I, pp. 97-126). New Haven, 1921. 8°.

WENTE E. C. — The Selective Reflection of heat Waves by Linear Resonators (Repr. from the « Physical Review », vol. XVI, pp. 133-148). Ithaca, 1920. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 1°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 4°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'8 Gennaio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

AFFARI DIVERSI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 2.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 2°

Seduta del 22 gennaio 1922.

1° Semestre.

ROMA
TIP. DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

22 gennaio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota V del Corrispondente QUIRINO MAJORANA.

SISTEMA OTTICO PER LA LETTURA DELLE OSCILLAZIONI. Il giogo della bilancia porta alla sommità uno specchio piano S_1 (fig. 3), destinato a riflettere l'immagine di un filamento incandescente di una lampada $^1/_2$ watt [1]. Questa è situata in un ambiente diverso da quello in cui trovasi la bilancia, e propriamente a 8 metri di distanza; con ciò il movimento dei piombi nel sotterraneo non produce sensibili spostamenti nella posizione di detta lampada, venendo questa a poggiare su di una vôlta non cimentata dalla coppia variabile occasionata dalla armatura AB (fig. 2). I raggi della lampada sono racolti da un obbiettivo con distanza focale di circa 2 metri, situato nello stesso ambiente della lampada, fra questa e la bilancia. Il fascio riflesso da S_1 traversa l'ambiente della lampada e dell'obbiettivo e raggiunge il *posto di osservazione* sito in un terzo ambiente nel quale trovasi una scala millimetrata alta m. 1,80: lo zero della scala è in alto, e la sua distanza dalla bilancia risulta di 20 metri. Su di essa si forma dunque l'immagine del filamento della lampada, costituita da un tratto luminoso orizzontale, largo circa 2 mm., e lungo 50, i cui bordi appajono più o meno netti a seconda dell'aggiustaggio più o meno perfetto del descritto sistema

(1) Vedi avvertenze a p. 24, vol. XXIX di questi Rendiconti.

ottico. Particolari e minuziose cure occorrono per raggiungere tale risultato. Anzitutto osservo che ho scelto uno specchio S_1, piano anzichè concavo, perchè così i lievissimi sollevamenti od abbassamenti dell'ordine del decimo di millimetro), provocati dal moto dei piombi sul sostegno della bilancia, non si vengano a trasferire nell'immagine del filamento sulla scala. Oltre a ciò, occorre che l'asse ottico dell'obbiettivo sia esattamente coincidente con la congiungente della lampada con S_1: la più piccola inclinazione rende sfumati i bordi dell'immagine. Occorre poi scegliere la lampada $^1/_2$ watt fra parecchie, affinchè il vetro di essa non occasioni eguale inconveniente. Infine, per quanto la lastra di vetro a facce ben piane e parallele, destinata a chiudere la finestra della scatola contenente S_1 (fig. 3), sia spessa (circa 7 mm.), è sempre osservabile un cambiamento assai notevole nella nettezza dei bordi a seconda che si sia, o no, praticato il vuoto nella custodia della bilancia. Ciò è dovuto a lievissime ed inevitabili deformazioni della lastra per la pressione atmosferica. Si debbono dunque aggiustare le distanze fra le varie parti del sistema ottico, quando il vuoto sia già stato praticato, ed anzi quando ciò sia già avvenuto da più ore, intervenendo dei fenomeni di deformazione progressiva della lastra.

Quando tutte le cautele suaccennate si siano adottate, è possibile, servendosi di una lente di ingrandimento e fissando uno dei bordi dell'immagine luminosa, determinare la posizione di questa colla precisione di 1 a 2 decimi di mm.

Posto di osservazione. Esso è situato, come si è detto, a circa 20 metri dalla bilancia, e contiene, oltre la scala millimetrata verticale, le chiavi (interruttori e commutatori) per la manovra dei motorini elettrici che occasionano il movimento dei piombi nel sotterraneo, e le sei lampadine elettriche le quali controllano la posizione di questi rispetto alla sfera, di cui si disse a suo tempo. Altri congegni, la cui funzione sarà spiegata in seguito, si trovano inoltre al posto di osservazione.

Primi tentativi di osservazioni. La disposizione descritta fu già allestita, con tutti gli accennati particolari, sin dal luglio 1920; e già allora cominciai a cercar di osservare se lo spostamento dei piombi da PP a P'P' (fig. 2) avesse una qualche influenza sulla posizione di equilibrio della bilancia. Avevo anzitutto cura di far sì che la coincidenza del centro della sfera M con quella del cubo P'P' avvenisse con quella precisione di cui già dissi; indi, notata la posizione dell'indice luminoso sulla scala al posto di osservazione, liberavo il giogo, e ne regolavo la posizione di equilibrio mediante i descritti equilibratori a sabbia, in guisa che essa fosse prossima alla precedente, a meno di qualche centimetro. In ogni caso tale posizione era determinata con tre letture di oscillazioni, come nella prima serie di ricerche. E poscia, mediante la manovra delle chiavi di comando elettrico, leggevo alternativamente la posizione d'equilibrio della bilancia *senza piombi*, cioè trovan-

dosi i piombi in PP, e quella *con piombi*, cioè avendo spostato i piombi in P′P′.

Questa serie di letture aveva luogo quando la bilancia era carica col sistema *sfera-contrappeso*; ed essa durava per uno o due giorni, con varie sedute al posto di osservazione di un pajo d'ore circa, separate da intervalli altrettanto lunghi, o dal periodo notturno; di solito, infatti, non ho più proceduto, con questa nuova disposizione, ad osservazioni nel corso della notte, per le ragioni altra volta esposte. Si aveva cura di osservare il manometro connesso alla bilancia; e, se del caso, si riportava, tra una seduta e l'altra, la pressione nella custodia a meno di 1 mm. di mercurio.

Rialzato il giogo, scambiata la sfera colla tara, mediante il congegno B_1B_2 (fig. 3), procedevo alla lettura di una seconda serie col sistema *tara-contrappeso*, del tutto analoga alla prima; indi ad altra nuovamente con *sfera-contrappeso*; e così di seguito, per più mesi. Si comprende lo scopo di tale modo di procedere: contavo di poter così discriminare l'effetto perturbatore dei piombi, dovuto alle deformazioni elastiche della vôlta e dell'edificio, dall'effetto ricercato.

Infatti, quando sperimentavo con *sfera-contrappeso*, avevo da fare con la somma dei due effetti, e,nell'altro caso, soltanto con quello perturbatore.

Debbo ora dire che, pur osservando sensibili spostamenti della posizione di equilibrio della bilancia tanto con *sfera-contrappeso* (effetto lordo), quanto con *tara-contrappeso* (lettura in bianco) al muoversi dei piombi nel sotterraneo, e pur avendo continuato per 8 o 9 mesi in tal genere di misure, non potei mai ottenere risultati veramente concordanti; è per tale ragione che non trascrivo qui nessuna delle osservazioni numeriche fatte in tale periodo di tempo. Rimasi per lungo tempo incerto sulla causa di codesta irregolarità, ed alla fine, dopo laboriosissimi tentativi, riuscii a comprenderla bene e ad eliminarla; essa proveniva dalle mutevoli condizioni elastiche dell'edificio. Infatti questo, costruito con mattoni, calce, calcinacci, etc., viene a costituire un sistema, dal punto di vista elastico, tutt'altro che perfetto; i fenomeni di isteresi sono in esso accentuatissimi e capricciosissimi.

Da esperienza ad esperienza si notavano differenze persino del 100 °/₀, negli spostamenti della posizione di equilibrio, al muoversi dei piombi. Delle volte, l'assestamento della muratura dell'edificio era tale, che nessuno spostamento si manifestava sulla bilancia, al mutar della posizione dei piombi. In tali condizioni si comprende come *l'effetto in bianco* fosse nullo; ma il sistema era in uno stato di grande instabilità. Bastava infatti il passaggio di un carro, od anche un colpo di martello nell'edificio in un ambiente prossimo a quello della bilancia, perchè si verificasse lo spostamento. A volte, per periodi di 15 giorni od un mese, poteva forse accadere che le osservazioni varie fossero concordanti, e che si potesse abbastanza bene distinguere l'effetto ricercato, sottraendo dalla media degli effetti lordi la media delle letture in bianco;

ma era possibile che poi, in conseguenza di un nuovo misterioso assestamento della muratura, l'accordo cessasse del tutto, o magari che la lettura in bianco mutasse addirittura di segno.

L'influenza del moto dei piombi sulla posizione di equilibrio della bilancia si manifesta, per quanto già dissi nella Nota II, in conseguenza del fatto che il profilo del coltello è tondeggiante e non aguzzo: in sostanza si tratta di una rotazione della vôlta che si trasferisce al piano di agata di appoggio del coltello, e quindi, con valore in generale mutato, a tutto il giogo. Per quanto esposi a suo tempo, se il coltello ha un raggio di curvatura molto piccolo, tanto cioè che il centro di gravità del giogo sia al di sotto del punto di contatto del coltello col piano di agata, deve la rotazione del giogo essere più piccola di quella di tutto il sostegno; ed è questo il caso che si è presentato quasi sempre nelle mie esperienze. Solo in un certo periodo di esse, essendosi eccessivamente detoriato il coltello, tanto da assumere un profilo a curvatura piccola, ossia a grande raggio di curvatura (circa 20 micron), avvenne il caso opposto, cioè che la rotazione del giogo fosse maggiore di quella del sostegno. Prescindendo da questo caso eccezionale, dirò che l'effetto in bianco, quello cioè osservabile per il moto dei piombi, quando il giogo è carico col sistema *tara-contrappeso*, era variabile fra 1 e 8 mm., sulla scala a 20 metri al posto di osservazione; tale incertezza era dovuta alla causa più sopra discussa. Per contro, l'effetto ricercato, corrispondente cioè al fenomeno di assorbimento gravitazionale, non corretto dalle altre cause di errore nettamente prevedibili di cui si dirà, non doveva essere che di qualche decimo di mm., od al massimo di 1 mm. Non era dunque possibile discernere un effetto tanto delicato, frammisto all'altro irregolarissimo che poteva diventare persino dieci volte maggiore. E l'unica via da seguirsi era quella di cercare di eliminare del tutto *a priori* tale effetto pertubartore ed ingombrante. A tale fine occorreva escogitare un artificio, nella qual cosa riuscii dopo lunghi tentativi, dei quali descriverò soltanto l'ultimo, che mi ha dato i migliori risultati.

Controllo a mercurio dell'inclinazione della bilancia. In fondo, il lamentato inconveniente proveniva dal fatto che la bilancia subiva, da una misura all'altra, delle inclinazioni variabili fra 0 e 10″ circa e senza alcuna regolarità, per lo spostamento dei piombi dall'una all'altra posizione. Un metodo per eliminare tale incoveniente sarebbe dunque stato quello di correggere ad ogni misura le inclinazioni stesse, riportando il sostegno della bilancia sempre nella stessa posizione angolare. Ora 10″ di arco fanno, a 20 m. di distanza, circa 2 mm. di spostamento di un raggio di luce riflesso; e la eventuale correzione che si sarebbe potuta ottenere, provocando uno spostamento della bilancia inverso (tale cioè da riportare un raggio riflesso da uno specchio fissato al suo sostegno, nella sua primitiva posizione) avrebbe risentita l'incertezza delle letture fatte sulla scala millimetrata (1 a 2 decimi di mm.); cioè di $^1/_{10}$ circa del suo valore nel caso dei 10″, ed anche

molto di più per rotazioni più piccole. L'artificio che ora descriverò mi ha invece permesso di esaltare enormemente la constatazione degli spostamenti angolari della bilancia, e quindi di correggerli con tutta esattezza.

Al piede della bilancia (fig. 3) è fissato un tubo di vetro orizzontale YY lungo m. 1,60 circa, di mm. 5 di diametro, coassiale con altro tubo esterno più grosso, XX, pure in vetro, che serve così di sostegno al primo. Il tubo YY è riempito di mercurio e termina ai suoi due estremi in due serbatoj di ebanite, contenenti anch'essi mercurio, di cui solo quello di destra, U, è segnato in figura; tali serbatoj sono dunque due vasi comunicanti a pelo libero, ed il liquido in essi si dispone esattamente allo stesso livello. Ma relativamente a ciascuno dei due recipienti, p. es. a quello U di destra, il livello del mercurio muta al variare dell'inclinazione del sostegno della bilancia; tale variazione è tanto più notevole quanto maggiore è la lunghezza del tubo YY. Il valore scelto per tale lunghezza, corrisponde ai bisogni della attuale ricerca; esso può evidentemente variarsi a piacere, se il congegno in parola dovesse venire impiegato per altri scopi. Sulla regione centrale del mercurio contenuto in U galleggia un dischetto O portante una acuminata punta verticale di acciajo; ed al recipiente sono fissate altre due punte pure in acciajo di cui una sola si scorge nel disegno, la cui posizione può essere spostata verticalmente, mediante la vite di regolaggio *r*. Su codeste tre punte appoggia, per il suo peso, un dischetto di vetro portante uno specchietto piano verticale S_2. Si comprende che al variar del livello del mercurio tale specchietto si inclini variamente, e un raggio di luce ottenuto in maniera del tutto simile a quello che batte su S_1, viene riflesso da S_2 anche sulla scala di m. 1,80 al posto di osservazione. Si ha cura che l'immagine del filamento della seconda lampada $1/2$ watt a ciò necessaria, si formi in località alquanto più bassa o più alta di quella in cui si osserva quella riflessa da S_1. Con ciò l'osservatore può sorvegliare facilmente le due immagini, perchè vicine e non sovrapposte.

Ora, nello scegliere i valori della lunghezza del tubo YY, e della distanza fra la punta galleggiante O e le altre due fisse, mi è stato facile far sì che, mentre l'immagine riflessa da S_1 (quando il giogo è arrestato) si sposta per il moto dei piombi di circa 2 mm., quella riflessa da S_2 si sposti di circa 200 mm.; cioè le rotazioni del sostegno della bilancia o del suo piano di agata sono svelate con una precisione 100 volte maggiore di quanto avverrebbe col comune congegno a semplice riflessione su di uno specchio. Siccome si possono apprezzare almeno i 2/10 di mm., e corrispondendo i 2 mm. a 10″ d'arco, si vede che il descritto congegno permette di apprezzare sino a $1/100$ di 1″. Tale sensibilità è più che sufficiente per le misure di cui qui si parla, ma mi piace rilevare che il dispositivo potrebbe essere reso, nel caso di altre ricerche, ancora più sensibile; non sembra infatti che l'assestamento del mercurio nell'interno dei recipienti U possa per attriti od altra causa ostacolare tale accrescimento di sensibilità.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota I di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

Nella mia Nota *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi*, ultimamente apparsa in questi Rendiconti, della necessità di detta condizione per un minimo dell'integrale semplice

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x\,,y\,,y')\,dx\,,\quad y(x_1)=y_1\,,\quad y(x_2)=y_2\,,$$

è data una dimostrazione che consente, conservando le solite notazioni impiegate in quella Nota, di enunciare la indicata condizione sotto questa nuova forma:

Teorema A. — *Supposto* $R(x)>0$ *in* $(x_1\,,x_2)$, *detta* $G(x,\xi)$ *la funzione di Green relativa all'espressione differenziale* $\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right)$ *e alle condizioni ai limiti* $u(x_1)=u(x_2)=0$ [1], *indicando con* $\mathcal{A}(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante dell'equazione integrale di Fredholm*

$$u(x)=\lambda\int_{x_1}^{x_2} G(x\,,\xi)\,A(\xi)\,u(\xi)\,d\xi\,,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $y=y_0(x)$ — *alla quale si riferiscono le funzioni* $R(x)$ *e* $A(x)$ — *fornisca un minimo per l'integrale* $J(y)$ *è che l'indicata funzione intiera* [2] *non abbia alcuno zero interno all'intervallo* $(0\,,1)$.

Si ha pure che:

Teorema B. — *Se la funzione intiera* $\mathcal{A}(\lambda)$ *risulta diversa da zero in tutto l'intervallo* $(0\,,1)$, *estremi inclusi, l'estremale* $y=y_0(x)$ *fornisce certamente un minimo debole per l'integrale* $J(y)$.

Scopo della Nota presente, e di una successiva, è di mostrare che un teorema, *perfettamente* analogo al *Teorema A*, esprime una condizione ne-

[1] Cfr. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 39-58; Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* (Tesi d'abilitazione) [Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, vol. XI], pp. 73-88. Quivi, posto $t(x\,,\xi)=\int_x^\xi [1:R(\eta)]\,d\eta$, si trova $G(x\,,\xi)=t(x\,,x_1)\,t(x_2\,,\xi):t(x_2\,,x_1)$ per $x\leq\xi$; $G(x\,,\xi)=t(x_1\,,\xi)\,t(x\,,x_2):t(x_2\,,x_1)$ per $x\geq\xi$.

[2] La quale, com'è noto, è priva di zeri complessi, ed ha il valore *uno* per $\lambda=0$.

cessaria cui deve soddisfare una superficie estremale $z = z_0(x, y)$ per l'integrale doppio

$$J(z) = \iint_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

affinchè con essa si possa effettivamente realizzare un minimo per l'integrale.

1. Supponiamo *regolare* il dominio D al quale viene esteso l'integrale $J(z)$. Il contorno C di D sia costituito dalla curva esterna, regolare, semplice e chiusa C_0 e dalle curve interne, regolari, semplici e chiuse $C_1, C_2 \ldots C_\nu$. Detto s l'arco della curva $C_i (i = 0, 1, \ldots, \nu)$, siano $x = x_i(s), y = y_i(s)$ $(0 \leq s \leq l_i)$, le equazioni parametriche della curva. Sia Δ il dominio dello spazio definito dalle condizioni (x, y) in $D, |z| \leq a$. Supponiamo che la funzione $f(x\, y\, z\, p\, q)$ sia definita nell'insieme T formato dalle quintuple di valori x, y, z, p, q, per ciascuna delle quali x, y, z esprimono le coordinate di un punto di Δ, e p e q sono due numeri reali qualsivogliano; e supponiamo che la f si conservi continua in T, con tutte le sue derivate parziali dei primi *quattro* ordini.

Siano ora assegnate le $\nu + 1$ funzioni, di $s, z = z_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$. Ciascuna funzione $z_i(s)$ sia definita nell'intervallo $(0, l_i)$, e sia ivi finita e continua con la sua derivata prima, sia periodica e di periodo l_i e soddisfi inoltre alla limitazione $|z_i(s)| < a$. La curva Γ_i dello spazio, di equazioni parametriche $x = x_i(s), y = y_i(s), z = z_i(s)$, sarà regolare, semplice e chiusa, avrà per biunivoca proiezione sul piano (x, y) la curva C_i e starà completamente nell'interno dello strato Σ limitato dai due piani orizzontali $z = -a$ e $z = +a$.

Noi porremo nel modo seguente il problema di calcolo delle variazioni per l'integrale $J(z)$:

Nell'insieme S *delle funzioni, delle due variabili x e y, definite in* D, *ivi finite e continue con le loro derivate prime e verificanti le condizioni*

$$(1) \qquad z[x_i(s), y_i(s)] = z_i(s), \quad |z(x, y)| < a,$$

determinarne una tale che per essa l'integrale $J(z)$ *riesca un minimo.* In altre parole: *costruire una porzione di superficie regolare aperta, di base* D, *completamente interna allo strato* Σ, *avente l'assegnato bordo* Γ *costituito dalle* $\nu + 1$ *curve chiuse* $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$, *per la quale l'integrale* $J(z)$ *realizzi un minimo nell'insieme* S.

2. Nelle ordinarie trattazioni di questo problema [1] si consente alle derivate prime delle funzioni $z(x, y)$ — lasciando intatte tutte le altre condizioni — di presentare in D, pur rimanendo limitate, delle discontinuità. Precisamente si suppone che, per ogni funzione $z = z(x, y)$, verificante sempre le condizioni (1), si possa decomporre il dominio D in un numero finito di dominii regolari, in ciascuno dei quali la funzione riesca finita e continua con le sue derivate prime, risultando inoltre la funzione continua

[1] Cfr. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung* [Teubner, 1909], pag. 653.

in tutto D. L'integrale $J(z)$ non perde, perciò, il suo significato riemanniano, ma già fin da ora si viene però a rompere l'analogia con la trattazione che si suol fare dei problemi ad una dimensione di calcolo delle variazioni.

Tale fatto è, parmi, in primo luogo, causato dal modo come finora si è dedotta la terza condizione necessaria — analoga a quella di Jacobi per i problemi ad una dimensione — affinchè un'estremale per l'integrale $J(z)$ fornisca effettivamente un estremo. A tale condizione è pervenuto il Sommerfeld [1], estendendo il procedimento, dato da Schwarz, per dimostrare la necessità della condizione di Jacobi ad una dimensione. Estendendo, invece, il procedimento da me seguìto nella Nota sopracitata, si giunge al seguente teorema, *perfettamente* analogo a quello qui enunciato in principio:

TEOREMA A — *Supponiamo che l'estremale* $z=z_0(x,y)$ *per l'integrale* $J(z)$, *appartenendo all'insieme* S, *risulti in* D *finita e continua con le sue derivate parziali dei primi* due *ordini, e che, posto*

$$f_{zz}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=P(x,y),\quad f_{zp}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=Q_1(x,y),$$

$$f_{zq}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=Q_2(x,y),\quad \frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}-P(x,y)=A(x,y),$$

$$f_{pp}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=R_{11}(x,y),\quad f_{pq}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=R_{12}(x,y),$$

$$f_{qq}\left(x,y,z_0,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=R_{22}(x,y),$$

risulti, in D,

$$R_{11}(x,y)>0,\quad R_{11}(x,y)\,R_{22}(x,y)-R_{12}^2(x,y)>0,$$

e la funzione $A(x,y)$ *finita e continua con le sue derivate prime. Allora, detta* $G(xy,\xi\eta)$ *la funzione di Green relativa all'espressione alle derivate parziali*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+R_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(R_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+R_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

e alla condizione al contorno

$$u(x,y)\quad su\ C=0,$$

indicando con $\Delta(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante della equazione integrale di Fredholm*

$$u(xy)=\lambda\int\!\!\int_D G(xy,\xi\eta)\,A(\xi\eta)\,u(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $z=z_0(x,y)$ *fornisca, nell'insieme* S, *un minimo per l'integrale* $J(z)$ *è che l'indicata funzione intiera* [2] *non abbia alcuno zero nell'interno dell'intervallo* $(0,1)$.

Nella Nota a questa successiva esporrò la semplicissima dimostrazione di questo teorema.

(1) *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung* [Bd. VII, 1899], p. 188. Cfr. Bolza, op. cit., p. 676.

(2) La quale è priva di zeri complessi ed ha il valore *uno* per $\lambda=0$.

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota II di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Analogamente, se poniamo

$$h(x) - w_3(x) = u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; h(y) - w_2(y)]\, dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; u_2(y)]\, dy,$$

sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), si ottiene

$$w_3(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ K^{(r)}[x, y;\; h(y) - w_2(y)] - K^{(r)}[x, y; h(y)] \right\} dy =$$

$$= -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} w_2(y)\, K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y)]\, dy .$$

E poichè

$$h(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y) = u(y) + w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y),$$

con

$$| w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y) | < 2\sigma ,$$

avremo

$$w_3(x) < |\lambda|\, \varrho\sigma \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} | K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \{ w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y)\}] |\, dy$$

$$< |\lambda|\, pm\varrho\sigma = \varrho^2\sigma .$$

Così continuando, avremo in generale $|w_n(x)| < \sigma\varrho^{n-1}$ e quindi, per essere $\varrho < 1$, $\lim_{n=\infty} |w_n(x)| = 0$. La funzione $h(x) = \lim_{n=\infty} u_n(x)$ sarà perciò una soluzione della (1), sempre sotto la condizione che valga la (4). Ora passeremo a dimostrare che tale condizione è realmente soddisfatta.

5. Ricordiamo, a tale scopo, che per le $u_n(x)$ abbiano trovato le seguenti espressioni:

$$u_1(x) = u(x)$$

$$u_n(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; u_{n-1}(y)]\, dy = u(x) + \psi_{n-1}(x) .$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Posto allora $|u(x)| < \nu$, ed ammesso che sia

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; o]\, dy = 0 \text{ (}^1\text{)}, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

per la $u_2(x)$ possiamo scrivere

$$u_2(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ K^{(r)}[x, y; u_1(y)] - K^{(r)}[x, y; o] \right\} dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u_1(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u_1(y)]\, dy; \quad (o < \theta^{(r)} < 1)$$

da cui si deduce

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda|\, \nu \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u(y)]|\, dy;$$

e, per la (2) della Nota precedente

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda|\, pm\nu = \nu(1 + \varrho).$$

6. Per la $u_3(x)$ scriviamo

$$u_3(x) = u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ K^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_1(y)] - K^{(r)}[x, y; u(y)] \right\} dy + \Phi(x),$$

dove

$$\Phi(x) = -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; u(y)]\, dy = -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta_0^{(r)} u(y)]\, dy;$$

con $o < \theta_0^{(r)} < 1$; ed anche, applicando il teorema del valor medio,

$$u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_1(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_1^{(r)} \psi_1(y)]\, dy. \; (o < \theta_1^{(r)} < 1)$$

E poichè

$$|\Phi(x)| < |\lambda|\, pm\nu = \varrho\nu,$$

supposto, pel momento, che sia $|\psi_1(x)| < \sigma$, avremo

$$|u_3(x)| < \nu + |\lambda|\, pm\varrho\nu + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2);$$

e quindi anche

$$|\psi_2(x)| < \nu(\varrho + \varrho^2).$$

7. Analogamente, per la u_4 scriviamo

$$u_4(x) = u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ K^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_2(y)] - K^{(r)}[x, y; u(y)] \right\} dy + \Phi(x) =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_2(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_2^{(r)} \psi_2(y)]\, dy + \Phi(x);$$

$$(o < \theta_2^{(r)} < 1)$$

(1) Questa condizione non è essenziale; qui fu posta unicamente per semplicità.

per cui, supposto che sia $|\psi_2(y)| < \sigma$, avremo

$$u_4(x) < \nu + |\lambda| pm\nu(\varrho + \varrho^2) + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3) .$$

Operando similmente sulla $u_5(x)$ e sulle successive e supponendo che, per ogni valore di n, sia

$$(5) \qquad |\psi_n(x)| < \sigma ,$$

otterremo

$$|u_n(x)| < \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots + \varrho^{n-1}) ;$$

e quindi anche

$$|\psi_{n-1}(x)| < \nu\,[\varrho + \varrho^2 + \dots + \varrho^{n-1}] < \frac{\nu\varrho}{1-\varrho} .$$

Avremo di conseguenza

$$|h(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |u_n(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |\psi_{n-1}(x)| < \frac{\nu\varrho}{1-\varrho} .$$

Mediante la trasformazione indicata al n. 2, avendo ottenuto che sia $\varrho < k < \frac{\sigma}{\nu + \sigma}$, rimangono verificate contemporaneamente tanto la condizione (4) quanto la (5).

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota II di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L, sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea $L^\star$ di uno spazio euclideo S_n, in cui indichiamo con $x_i^\star$ le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea $L^\star$, potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$(5)^\star \quad ds_{M^\star}^2 = (1 + C^\star \times M^\star - P^\star)\, ds_{P^\star}^2 + d\bar{y}_1^{\star 2} + d\bar{y}_2^{\star 2} + \dots + d\bar{y}_{n-1}^{\star 2} ;$$

come nella (5) C è funzione di s_P, così nella $(5)^\star$ $C^\star$ è funzione di $s_{P^\star}$.

Siano $K^{(1)} K^{(2)} \dots K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di C relative a $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{n-1}$ e $K^{(1)\star} K^{(2)\star} \dots K^{(n-1)\star}$ quelle di $C^\star$ relative alle $\bar{y}^\star$. Cerchiamo se si possa determinare L' in modo che le funzioni $K^{(r)\star}(s_P)$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_P)$. Cominceremo perciò a porre $s_P = s_{P^\star}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di $L^\star$ una corrispondenza biunivoca che conserva

gli archi. Osserviamo poi che $K^{(r)*}$ è la proiezione di C^* sulla r^{esima} direzione y^*. È cioè

$$K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x^*_i}{ds^2_P} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Le $K^{(r)}$ sono poi funzioni note di s_P. La condizione $K^{(r)} = K^{(r)*}$ conduce dunque alle $(n-1)$ equazioni

$$K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x^*_i}{ds^2_P} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

D'altra parte le (3), scritte per l'S_n, ci dànno $n(n-1)$ altre equazioni. Se a queste aggiungiamo l'altra

$$ds^2_P = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \cdots + dx_n^{*2}, \tag{8}$$

troviamo un sistema di $n-1+n(n-1)+1 = n^2$ equazioni tra le n^2 incognite x^*_i, $y^*_{i/r}$ che servono ad esprimerle in funzione di s_P. Possiamo così determinare le equazioni parametriche $x^*_i = x^*_i(s_P)$ della L'. Con ciò la formula (5)* diventa identica alla (5), ossia abbiamo rappresentato per applicabilità i dintorni della linea L', sui dintorni di L. Siccome poi L' è in uno spazio euclideo, possiamo dire anche di aver disteso i dintorni di L in uno spazio euclideo, ossia di aver trovato coordinate che sono geodetiche contemporaneamente in tutti i punti di L.

Chimica. — *Cloriti di ammonio e di alcuni ammonii sostituiti* [1]. Nota di Giorgio Renato Levi, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bruni.

Nel 1915 pubblicavo negli Atti del R. Istituto Veneto [2], in collaborazione col prof. G. Bruni, una Nota sui cloriti; in seguito ebbi ad occuparmi altre volte dell'argomento ma sempre in modo frammentario. Solo da alcuni mesi mi è stato possibile riprendere sistematicamente il lavoro su questo argomento.

In questa Nota riferirò sulla preparazione dei cloriti di ammonio e di alcune ammoniache sostituite. Ho potuto isolare allo stato solido i cloriti di ammonio e di tetrametilammonio e in soluzione concentrata quelli di mono-, di- e trimetilammina.

Per la precedente letteratura sui cloriti rimando al lavoro citato.

Clorito di ammonio NH_4ClO_2. — Questo sale si presentava particolarmente interessante perchè, data la scarsa energia della base e la volati-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Vol. 74, pag. 1711; Gazzetta chimica, *45*, 161 (1915).

lità dei prodotti di decomposizione, appariva dubbia la possibilità di ottenerlo sotto forma stabile. L'esperienza ha invece insegnato che ciò riesce perfettamente. Ho ottenuto questo sale per doppio scambio fra clorito di bario puro e solfato ammonico nei rapporti stechiometrici. Una soluzione concentrata e possibilmente satura di clorito di bario a 15-20° viene addizionata, agitando, della quantità calcolata di clorito ammonico pure in soluzione quasi satura; dopo 10 minuti si filtra il precipitato di solfato di bario, e la soluzione ottenuta si evapora nel vuoto a temperatura ambiente in presenza di cloruro di calcio fuso. Per rendere più rapida la filtrazione ed evitare che buona parte della soluzione rimanga sul filtro col precipitato di solfato di bario, è preferibile fare una prima filtrazione alla pompa, con che si trattiene la quasi totalità del precipitato, e rifiltrare poi su di un piccolo filtro ordinario la soluzione un po' torbida che così si ottiene.

La soluzione di clorito ammonico ottenuta dopo filtrazione del solfato di bario è perfettamente incolora; ma con la concentrazione nel vuoto diventa leggermente paglierina, pur non svolgendo odore di cloro o di composti ossigenati di questo. Per ulteriore concentrazione, fino a secchezza, il clorito ammonico si separa in lunghi aghi prismatici trasparenti, di color giallo molto pallido. Si deve osservare che impurezze eventualmente presenti, e in particolare tracce di metalli pesanti, provocano facilmente decomposizione almeno parziale nella concentrazione del clorito ammonico.

L'analisi del prodotto ottenuto per completa evaporazione nel vuoto fu preceduta da una determinazione di residuo fisso del sale dopo riduzione con soluzione di acido solforoso. Ottenni 0,12 % di residuo fisso in accordo con l'assenza di sali di bario nella soluzione.

Le percentuali di ammoniaca e cloro trovate sono:

Ammoniaca %			Cloro %		
Trovato		Calcolato per NH_4ClO_2	Trovato		Calcolato per NH_4ClO_2
19,29			39,32		
18,90	media 19,07	19,88	39,50	media 39,44	41,47
19,02			39,52		

Rapporto Cl/NH_3 trovato 2,068; calcolato 2,086.

Per l'analisi la soluzione acquosa di una quantità pesata di clorito ammonico si addiziona in una sola volta di un eccesso di soluzione di acido solforoso; in tal modo il clorito viene ridotto immediatamente a cloruro e, se entrambe le soluzioni sono diluite e l'acido solforoso si aggiunge in una sola volta, non si ha alcuna perdita di cloro.

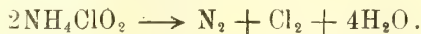
Per determinare l'ammoniaca, si soprassatura la soluzione ridotta con idrato sodico e si distilla raccogliendo in acido titolato. Per determinare il cloro, si aggiunge alla soluzione ridotta acido nitrico diluito, e la solu-

zione bollente si precipita con nitrato di argento; il cloruro formato si raccoglie in crogiuolo di Gooch e si secca a 130°.

I risultati analitici dànno valori sensibilmente più bassi del teorico, ma ciò si deve attribuire ad umidità persistente nel clorito ammonico; difatti il rapporto Cl/NH_3 è in buon accordo col valore teorico e, di più, la completa assenza di solfati e di sali di bario esclude la presenza di clorito di bario o di solfato ammonico in eccesso.

Se per decomposizione del clorito si fosse formato del cloruro ammonico, si sarebbero ottenuti valori più alti del teorico e la soluzione diluita del sale avrebbe dato, con nitrato di argento, precipitato di cloruro, mentre solo le soluzioni concentrate precipitano in giallo cristallino il clorito di argento e le soluzioni diluite non precipitano affatto.

Il clorito ammonico solido non appare deliquescente. Si decompone rapidamente per riscaldamento; per percussione su incudine esplode e da questo comportamento il clorito ammonico appare più instabile del nitrito ammonico; la stabilità del sale secco all'aria appare invece maggiore pel clorito che non pel nitrito, quest'ultimo essendo più igroscopico. La scomposizione ha luogo verosimilmente secondo l'equazione:

$$2NH_4ClO_2 \longrightarrow N_2 + Cl_2 + 4H_2O\,.$$

Clorito di monometilammina $NH_2.CH_3.HClO_2$. — Una soluzione acquosa di monometilammina al 30 % (circa) si neutralizza con acido solforico 2N e la soluzione così avuta si addiziona a freddo agitando della quantità esattamente calcolata di clorito di bario puro, si filtra e si concentra nel vuoto; si ottiene in tal modo una soluzione un po' densa, che non precipita con alcool e etere, che non solidifica a —15° e che non cristallizza, anche se lasciata una settimana nel vuoto in presenza di cloruro di calcio fuso. Questa soluzione densa diede all'analisi il seguente risultato:

Monometilammina %		Cloro %	
Trovato	Calcolato per $NH_2.CH_3.HClO_2$	Trovato	Calcolato per $NH_2.CH_3.HClO_2$
20,63	31,16	23,90	35,63

Rapporto Cl/monometilammina trovato 1,159; calcolato 1,143.

Il prodotto così ottenuto è quindi una soluzione concentrata (intorno al 66-67 %) di clorito di monometilammina. Se durante la concentrazione si ha cura di aggiungere un leggero eccesso di monometilammina, si evita un principio di scomposizione e la soluzione non dà con nitrato d'argento la reazione dei cloruri neanche in tracce, ma un precipitato giallo cristallino di clorito di argento puro. Questa soluzione concentrata dà, versata su una pietra di ferro calda, una leggera detonazione.

Clorito di dimetilammina $NH(CH_3)_2.HClO_2$. — Si ottiene come soluzione concentrata in modo del tutto analogo al precedente. La soluzione deve essere concentrata con le stesse precauzioni. Si decompone col calore in modo analogo al clorito di monometilammina.

Il rapporto Cl/dimetilammina diede il valore 0,799; teorico calcolato 0,7878.

Clorito di trimetilammina $N(CH_3)_3.HClO_2$. — Si prepara in modo del tutto analogo al sale di monometilammina; alla concentrazione si ha una maggior tendenza alla decomposizione; la soluzione al 50 % è però sufficientemente stabile. Pel rapporto Cl/trimetilammina trovai il valore 0,670; calcolato 0,6009.

Clorito di tetrametilammonio $N(CH_3)_4ClO_2$. — La soluzione ottenuta per doppio scambio fra clorito di bario e solfato di tetrametilammonio si lascia evaporare nel vuoto in presenza di cloruro di calcio, senza alcuna scomposizione; e perciò qui, a differenza dalle ammine, è inutile l'aggiunta di un leggero eccesso di idrato di tetrametilammonio. Quando il prodotto è quasi secco, lo si comprime fra carta da filtro per liberarlo dall'acqua madre; e i cristalli perfettamente incolori, così avuti, si seccano nel vuoto in presenza di potassa caustica.

L'analisi fu fatta pel cloro in modo del tutto analogo ai cloriti precedenti e cioè, previa riduzione a cloruro con acido solforoso, precipitando con nitrato d'argento in soluzione nitrica.

Per determinare l'idrato di tetrametilammonio si riduce la soluzione di clorito con acido solforoso; si concentra a bagno maria, e il residuo si scioglie in acido solforico concentrato; infine si opera come in una ordinaria determinazione Kjeldahl.

L'analisi diede il seguente risultato:

Azoto %		Cloro %	
Trovato	Calcolato per $N(CH_3)_4ClO_2$	Trovato	Calcolato per $N(CH_3)_4ClO_2$
9,75		24,80	
9,50	9,90	24,92	25,05
9,55		24,65	

Il clorito di tetrametilammonio esplode per percussione come il clorito ammonico; a differenza di questo, è fortemente deliquescente. In soluzione acquosa ha reazione neutra.

Ho contemporaneamente ripreso lo studio dei cloriti metallici e sono riuscito a preparare alcuni nuovi sali che descriverò in una prossima Nota.

Geologia. — *Osservazioni intorno al Quaternario dell' Umbria centrale.* Nota di Paolo Principi, presentata dal Socio A. Issel.

Ai depositi fluvio-lacustri del Villafranchiano con *Mastodon arvernensis*, *Tapirus arvernensis*, *Machaerodus crenatidens*, ecc., si sovrappongono, in varie località, dei conglomerati costituiti generalmente da calcari marnosi e arenarie terziarie, più raramente da calcari mesozoici, i quali si trovano su altipiani e a circa 150-200 metri sugli alvei dei corsi d'acqua attuali e che per l'altezza stanno probabilmente a rappresentare il *Mindeliense* (colline di Perugia, di Montefalco, di Todi, ecc.). Nella valle del Tevere, da Umbertide a Todi, a questi terreni succedono, lungo ambedue i versanti, delle sabbie argillose con intercalazioni di lenti ghiaiose ad elementi minuti, le quali si trovano in rialzo sulle alluvioni più recenti del fiume e presentano un evidente fenomeno di terrazzamento. Questi terrazzi, però, sono variamente incisi e modificati dai torrenti, che dalle alture circostanti convogliano le loro acque al Tevere. Essi si riscontrano pure ai due lati del torrente Puglia, lungo la parte inferiore della valle del Chiascio, e si estendono sotto le pendici settentrionali del monte di Bettona fin presso Cannara, costituiti, specialmente verso quest'ultima località, da un'argilla giallastra contenente delle concrezioni calcareo argillose formanti una specie di ghiaietta, chiamata *cacoro*. Anche qui i terrazzi sono profondamente solcati ed erosi dalle acque, fenomeno reso anche più accentuato dall'abbassamento del letto del Topino.

In questi depositi alluvionali dell'*alta terrazza*, a Civitella d'Arno, Colombella, presso S. Martino Delfico, Castel delle Forme, Cerqueto, si rinvennero resti di *Elephas primigenius*, *Elephas antiquus* e *Rhinoceros Mercki*. La presenza dell'*Elephas primigenius*, citato dal Verri [1] anche nei depositi detritici ad est del Piegaro, denota il *Rissiense*, mentre le altre due specie, rappresentanti di una fauna calda infraglaciale, attestano che le alluvioni, in cui esse sono comprese, debbono riferirsi allo *Chelleense*, come lo dimostrano anche gli avanzi paleolitici dell'industria umana, ivi raccolti. Così, presso Bosco sulla riva sinistra del Tevere e nei dintorni di S. Egidio sulla riva destra del Chiascio, in corrispondenza di alcune zone dell'alta terrazza, esistono dei manufatti di selce (forme amigdaloidi ed affini su ciottolo con margine scheggiato o irregolarmente sinuoso, forme discoidali, raschiatoi su ciottolo, pugnali ottenuti da un ciottolo allungato a facce parallele, scheggie atipiche, nuclei voluminosi, alcuni dei quali appena scheggiati), che presentano strette relazioni coi giacimenti classici di Chelles e St. Acheul in Francia [2].

[1] Verri A., *Di alcune divergenze sulla geologia dell'Umbria superiore*. Boll. Soc. geol. ital., vol. III.

[2] Bellucci G., *L'epoca paleolitica nell'Umbria*. Arch. per l'Antropologia e la Etnologia, vol. XLIV, 1914.

Lungo la valle del Tevere, tra Pierantonio e Ponte Valleceppi, l'alta terrazza è assai ben distinta soprattutto nella riva destra del fiume; mentre i dorsi del pianalto pliocenico si trovano ad una media altitudine di 290-300 m., l'alta terrazza, costituita da una spiaggia lievemente inclinata, da circa 208 m. sale fino a 220-230 m., presentando alla superficie uno strato di ciottoli marnosi appiattiti e di frammenti di selce scura, il quale riposa sopra delle sabbie silicee racchiudenti i resti dell'industria litica suddetta.

All'alta terrazza succede, mediante un gradino non sempre distinto, un altro ripiano o *bassa terrazza* a circa 12 m. al disotto della precedente ed a circa 8 m. sul livello attuale del fiume. Esso è formato da ghiaie e sabbie argillose, in mezzo alle quali a Bosco ed a S. Angelo di Celle abbondano manufatti strettamente affini al tipo mousteriense (forme amigdaloidi ovalari o triangolari, asce semilunari, raschiatoi, punte su scheggie ecc.) (1).

A sud di Perugia l'alta terrazza della riva destra del Tevere si addossa ininterrottamente all'altipiano pliocenico e, profilandosi dalla quota 200 alla quota 175, viene a terminare presso Fratta Todina, dove il Tevere si trova a scorrere incassato entro le rocce del Terziario inferiore. Quella della riva sinistra è dominata fino al Chiascio dai terreni villafranchiani, mantenendosi ad un'altitudine media di 190 metri; va poi ad unirsi all'alta terrazza del Chiascio e rimane interrotta sino alla Madonna dei Bagni (196 m.). Ivi si riprende e presso le Terme (167 m.) si confonde coll'alta terrazza di destra del torrente Puglia; da Collepepe, infine, continua fino a Ponte Rio di Todi, elevandosi a quote che variano dai 173 ai 156 metri.

Le due basse terrazze dall'altitudine media di 170 m. discendono con lievissime inclinazioni sino ai depositi attuali del Tevere; anche di queste ultime la più sviluppata è quella di destra, poichè lungo la sponda sinistra il fiume scorre in varî punti a ridosso dell'alta terrazza.

Al Pleistocene sono da riferirsi pure i numerosi lembi di travertino, che si trovano sempre in relazione a rilievi calcarei. Nei dintorni di Perugia (Castel del Piano), al vasto affioramento di travertino di Ellera e dei Sodi di S. Sabina seguono dei depositi di terra rossa, in cui si trovano mescolati frammenti di quella roccia e contenenti presso Pila numerosi manufatti litici, che rammentano alcune forme caratteristiche dei giacimenti di Aurignac, di Solutré e de la Magdaleine (1). È lecito, quindi, dedurre che il deposito del travertino è avvenuto nel periodo infraglaciale succeduto al Mousteriense.

Coeve alla formazione del travertino sono verisimilmente le caverne, che si osservano nei rilievi calcarei dei Monti Martani e del M. Tezio (2). Esse furono prodotte da correnti sotterranee provenienti dall'interno della

(1) Bellucci G., loc. cit.

(2) Principi P., *Secondo contributo allo studio dei fenomeni carsici dell'Umbria.* Mondo sotterr., Udine, 1913. — Id., *Intorno ad alcune grotte presso il M. Civitelle (Perugia).* Mondo sotterr., Udine, 1913.

massa montuosa, entro cui si aprono; alcune, come quella del « Ticche-tacche » dei Monti Martani, corrispondono alle *caverne di sbocco* del De Gasperi; altre, come quella dei « Banditi » della stessa località, alle *caverne assorbenti*, mentre le « Buche del Diavolo » del M. Civitelle rientrano nel gruppo delle *inattive* dell'autore ora menzionato ([1]).

Il fenomeno carsico nel territorio studiato non assume la grandiosità caratteristica di altre regioni, per lo sviluppo che prendono i calcari cretacei e giurassici intercalati a strati marnosi ed argillosi (scisti a fucoidi, strati ad aptici), i quali ostacolarono ed interruppero la circolazione delle correnti sotterranee. Infatti le doline si aprono generalmente là dove affiorano i calcari dell'Infracretaceo, del Giura superiore e del Lias inferiore, costituenti delle spesse pile di strati non interrotti da formazioni impermeabili.

Al Pleistocene appartengono anche le falde detritiche che ammantano le pendici dei monti mesozoici (M. Subasio, rilievi presso Campello sul Clitunno, Catena martana ecc.) ed i materiali vulcanici, che sono sparsi in piccoli lembi nella parte meridionale della regione in esame.

Prescindendo dall'Orvietano, costituito essenzialmente da colate di tefriti leucitiche, da tufi litoidi e giallicci incoerenti, rileveremo come presso Città della Pieve, Morrano, S. Faustino, la Capretta, Titignano e lungo il versante occidentale dei Monti Martani, si osservano piccoli lembi di tufi stratiformi, i quali ora si trovano ad occupare alcune depressioni scavate nel Villafranchiano, ora giacciono direttamente su rocce del Terziario antico o del Mesozoico, ora sono mescolati insieme coi detriti di falda, come appunto si verifica presso Massa Martana ed Acquasparta. Questi lembi tufacei, rappresentanti i prodotti vulcanici delle eruzioni dei Vulcani Vulsini, sono residui di una formazione molto più sviluppata e che le acque hanno profondamente eroso.

Altri piccoli lembi di tufo, che si trovano presso il Pornello, ed alcuni depositi di tufi-pozzolane, che si riscontrano presso Cerqueto ed a S-O di Marsciano, dove riposano direttamente sui terreni argillo-sabbiosi del Villafranchiano, sono, invece, in relazione coll'attività eruttiva del vulcanetto di Pian di Celle (S. Venanzo), che sorge presso la strada provinciale Marsciano-M. Peglia. Infatti, questi ultimi tufi presentano quasi costantemente le stesse caratteristiche di quelli del vulcano ora ricordato, cioè grande abbondanza di olivina, accompagnata da augite e sanidino.

Nei campioni provenienti dalle trivellazioni di un pozzo artesiano di Cannara, a cominciare dalla profondità di circa 9 m. dalla superficie della pianura, si riscontrano numerose scorie vulcaniche, le quali dimostrano che l'attività dei Vulcani Vulsini doveva essere notevole anche verso la fine del Pleistocene, per poi spegnersi gradatamente nell'Olocene.

I depositi fluviali olocenici (alluvioni sabbioso-ghiaiose, ciottolose) sono sviluppati lungo il letto del Tevere, del Topino, del Nestore, del Chiascio,

([1]) De Gasperi G. B., *Grotte e voragini del Friuli*. Mondo sotterr., vol. XI.

del Tescio, della Caina, della Genna, del Puglia e di altri corsi d'acqua, che formano l'attuale rete idrografica; mentre i depositi lacustri dello stesso periodo costituiscono la pianura sottostante a Magione ed al M. Malbe, nella quale si raccolgono copiosi frammenti di torba, e quella di Assisi, che prosegue fino a Foligno e Spoleto (*Valle umbra*). I materiali di quest'ultima conca sono rappresentati da una alternanza di argille sabbiose con strati di ghiaia e di sabbia ed accennano non solo ad essere stati depositati in seno alle acque di un lago, ma anche sotto forma di alluvioni, man mano che lo specchio lacustre veniva a scomparire. Lungo le pendici meridionali del Subasio si riscontrano dei letti ghiaiosi, i quali non rappresentano altro che resti di coni di deiezione più o meno profondamente rimaneggiati. Coni assai rilevanti sono quelli del Topino, del Tescio, del Chiascio, il quale ultimo forma presso Bastiola un potente strato di ghiaia ricoperto poi da altri depositi del fiume.

Riassumiamo nel quadro seguente l'ordinamento dei terreni pliocenici e quaternari dell'Umbria centrale:

Pliocene superiore (Quaternario inf. secondo Haug e Rovereto) (1).
- VILLAFRANCHIANO: sabbie, argille con molluschi terrestri e lacustri e con *Rhinoceros etruscus, Hippopotamus major, Cervus dicranius, Bos etruscus,* ecc.; depositi di lignite con *Mastodon arvernensis, Tapirus arvernensis* [Spoleto, Pietrafitta, Gubbio].
- MINDELIENSE: giacimenti ciottolosi su altipiani a 200 m. circa sugli alvei attuali [Todi, Montefalco, Perugia].

Pleistocene . . . . . (Quaternario medio, secondo Haug e Rovereto) (1).
- RISSIENSE: depositi fluviali dell'*alta terrazza* con *Elephas primigenius* [Piegaro].
- CHELLEENSE: depositi alluvionali costituiti da sabbie argillose con intercalazioni di lenti ghiaiose ad elementi minuti con *Elephas antiquus, Rhinoceros Mercki* (*periodo infraglaciale*); manufatti litici riferibili alle forme di Chelles e St. Acheul [Bosco, S. Egidio].
- WURMIENSE
  - Mousteriense: alluvioni della *bassa terrazza* con manufatti litici riferibili alle forme di Moustier [Bosco, S. Angelo di Celle].
  - Aurignaciense-Magdaleniense: travertini (*periodo infraglaciale*); terra rossa con detriti travertinosi e manufatti litici analoghi ai giacimenti di Aurignac, Solutré e la Magdaleine [Pila]; caverne dei Monti Martani e del M. Civitelle.
- (Rissiense – Wurmiense): tufi vulcanici [S. Venanzo, Pornello, S. Faustino, Marsciano ecc.]; detriti di falda [Subasio, Monti Martani ecc.].

Olocene . . . . Tufi e scorie vulcaniche; depositi fluviali e lacustri con ghiaie, sabbie e argille [Valle del Tevere, Valle folignate-spoletina, Conca di Magione ecc.].

(1) Rovereto G., *Tentativo di ordinamento del Quaternario italiano.* Boll. Soc. geol. ital., 1919.

Biologia. — *Osservazioni biologiche sull'Iridomyrmex humilis* [1]. Nota della dott.ssa Lidia La Face, presentata dal Socio B. Grassi.

Avendo intrapreso, per consiglio del prof. Grassi, alcune ricerche sull'*Iridomyrmex humilis*, formica originaria dell'America e introdottasi da qualche anno in Italia, ho rivolto dapprima la mia attenzione sulla biologia di quest'insetto nelle nostre regioni. Sono stata quindi portata a considerare quale importanza potesse avere nella dispersione naturale di questa specie il volo nuziale, che, com'è noto, rappresenta nelle formiche il punto di partenza per la formazione di nuove colonie.

Newell e Barber, in seguito ad osservazioni compiute sulla medesima specie nella Luisiana (Stati Uniti), avevano stabilito che il volo nuziale era ivi un avvenimento assai raro a verificarsi, avendolo constatato una sola volta durante cinque anni, e che quindi le giovani regine potevano essere fecondate nell'interno del formicaio; ma non riferiscono nel loro lavoro [2] particolari osservazioni od esperimenti fatti per precisare meglio come avvenga la fecondazione nella specie suddetta. Ho creduto opportuno di studiare l'andamento di questo fenomeno nelle nostre regioni per vedere se su di esso esercitassero qualche influenza le diverse condizioni di ambiente, e di precisare meglio alcuni dettagli. Le mie osservazioni sono state fatte sia su colonie naturali, sia su colonie allevate in nidi artificiali costruiti sullo stesso modello di quelli usati da Newell e Barber nelle loro esperienze.

Nella seconda metà dell'aprile ho potuto osservare in nidi naturali di alcuni giardini di Roma, infestati dall'*Iridomyrmex hum.*, numerose larve e ninfe di maschi e di regine, e nel maggio i primi individui alati. Gli autori su menzionati non hanno trovato se non molto raramente le femmine alate nei formicai naturali (soltanto tre durante il periodo delle loro osservazioni), ma ciò è dovuto alla brevità del periodo in cui esse compaiono. Ho notato infatti che le femmine alate si rinvengono facilmente nei nidi naturali soltanto negli ultimi giorni di maggio e nei primi di giugno: nella seconda metà

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Entomologia agraria della R. Università di Roma.

(2) The Argentine Ant by Newell and Barber; U. S. Department of agriculture, Bureau of entomology — Bulletin N.° 122 — June 26, an. 1913.

di questo mese non si trovano più che regine prive delle ali, quindi già fecondate. I maschi, invece, si rinvengono sino al luglio, nel qual mese vanno diminuendo di numero sino a scomparire del tutto. Durante tutto il periodo in cui si svilupparono nei formicai naturali gli individui alati, non ho mai assistito ad alcun volo nuziale, nè ho mai visto i maschi e le femmine vagare all'esterno dei formicai, sebbene abbia fatto in proposito numerose osservazioni in differenti punti di Roma, sotto diverse condizioni metereologiche e in diverse ore del giorno.

In un nido artificiale, in cui avevo isolato una colonia composta di molte operaie, di una sola regina e di stadii immaturi, si svilupparono, nella seconda metà di giugno, quindi con qualche ritardo rispetto a quanto si era verificato nei nidi naturali, parecchi maschi e sei nuove regine. Non mi è stato possibile di osservare direttamente in questo nido la fecondazione, ma ho visto più volte i maschi inseguire attivamente le giovani regine cercando di accoppiarsi con esse. Dopo qualche giorno, ho trovato le nuove regine prive delle ali: ciò significava che le femmine della specie in questione potevano essere fecondate dentro il nido, come ho potuto meglio accertare in seguito.

Le nuove regine, dopo la fecondazione, furono uccise e divorate dalle operaie: queste le assalirono e, dopo avere staccato ad esse la testa dal torace e questo dall'addome, ne divorarono in poco tempo gli organi interni. Un'altra regina, tolta da un nido naturale e messa in questo stesso formicaio, ebbe la medesima sorte delle prime. Appare quindi verosimile che, quando lo spazio in cui è confinata una colonia è limitato e la popolazione diventa troppo numerosa, le operaie ne impediscono l'ulteriore aumento con l'uccisione delle nuove regine. È probabile però che nelle condizioni naturali ciò normalmente non si verifichi e che, quando in un formicaio le regine diventano troppo numerose, alcune di esse, unendosi ad un certo numero di operaie, migrino andando a fondare nuove colonie nelle vicinanze del nido in cui sono nate. Così si spiega come, alla fine della primavera, cioè dopo che è avvenuta la nascita delle nuove regine, attorno ad un formicaio primitivo se ne vedano sorgere numerosi altri a non molta distanza da esso. Anche i maschi nati nel nido suddetto furono, dopo le regine, uccisi e mangiati dalle operaie. Durante il periodo di un mese circa, in cui ho tenuto in osservazione i maschi di questo nido, non li ho mai veduti aggirarsi all'esterno di esso: li ho trovati spesso intenti a succhiare avidamente le larve e le ninfe presenti nel nido, nonostante la resistenza opposta dalle operaie.

Ho potuto osservare direttamente la fecondazione in un altro nido artificiale in cui avevo isolato, verso la metà di giugno, una colonia composta di una femmina ancora alata, di un maschio e di alcune operaie. Nulla di notevole accadde nel nido fino al 1° luglio, in cui posi nel nido alcuni

maschi tolti da un formicaio naturale: verso le sette del pomeriggio, sollevando il coperchio del nido, vidi che essi inseguivano vivacemente la giovane regina. Dopo un quarto d'ora circa, un maschio riuscì ad accoppiarsi con essa: trascorse 24 ore, trovai la regina dealata. Tre giorni dopo essa cominciò a deporre le uova e nel frattempo i maschi vennero uccisi e mangiati dalle operaie.

Resta così dimostrato che nell'*Iridomyrmex humilis* la fecondazione avviene normalmente nell'interno dei formicai e che, mancando il volo nuziale, la dispersione naturale della specie viene in tal modo notevolmente limitata. La capacità di volare non è però del tutto soppressa, almeno per ciò che riguarda i maschi. Ho, infatti, provato più volte di lasciare in libertà, all'aperto, alcuni maschi tolti da nidi naturali o artificiali, ed ho osservato che spontaneamente non spiccavano mai il volo. Soltanto se venivano in qualche modo molestati facevano uso delle ali, ma non potrei dire quali distanze siano stati capaci di percorrere. Non ho potuto ripetere il medesimo esperimento sulle femmine perchè si era nel giugno e in tal epoca esse erano tutte dealate.

Non è priva d'interesse la soppressione della funzione del volo, che normalmente si verifica in questa specie, quantunque le ali siano perfettamente sviluppate. Sarebbe opportuno di osservare se in essa i muscoli delle ali presentino particolari modificazioni rispetto a quelli delle altre specie di formiche in cui il volo nuziale rappresenta l'atto che accompagna necessariamente le fecondazione. Su quest'ultimo argomento mi propongo di riferire in seguito, quando avrò raccolto i dati necessarî.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 2°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 4°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. XIII, fasc. 8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 gennaio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 3.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 3°

Seduta del 5 febbraio 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1922.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Riducibilità delle quadriche differenziali e ds^2 della Statica einsteiniana.* Nota del Socio G. Ricci.

Dirò una quadrica differenziale ad n variabili *algebricamente riducibile* se mediante un cambiamento di variabili essa può ridursi a contenere i differenziali di $n-1$ variabili soltanto; *assolutamente riducibile* se ciò può farsi in modo che i coefficienti della forma ridotta si esprimano esclusivamente per le stesse $n-1$ variabili.

Si vedrà che, come per la riducibilità di una quadrica algebrica, così per la riducibilità algebrica di una quadrica differenziale è condizione necessaria e sufficiente l'annullarsi del suo discriminante; mentre per la riducibilità assoluta è da aggiungere un'altra condizione la quale consiste in ciò che un certo sistema di equazioni algebriche lineari ed omogenee ammetta soluzioni proprie.

Si dica una quadrica differenziale ad n variabili *p volte riducibile* algebricamente (o dotata di riducibilità algebrica di ordine p) se con una opportuna scelta delle variabili indipendenti essa può ridursi a contenere soltanto i differenziali di $n-p$ variabili indipendenti.

Come è stato detto, per $p=1$ (riducibilità algebrica semplice o di 1° ordine) le cose vanno come per la riducibilità semplice delle quadriche algebriche. Per $p>1$ il fatto che la caratteristica del discriminante di una quadrica differenziale ad n variabili sia minore di $n-p$, importa soltanto che

si possa addivenire alla sua riduzione algebrica semplice in più modi essenzialmente distinti; mentre per una riducibilità algebrica di ordine superiore si esigono di più altre condizioni espresse da relazioni differenziali tra i coefficienti della quadrica data.

Una interessante applicazione di questi risultati consiste nel determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una quadrica differenziale positiva φ ad n variabili sia equivalente alla somma di una quadrica, nella quale appaiono soltanto i differenziali di $n-1$ variabili e di un termine quadratico nel differenziale di una n^{ma} variabile y. Si riconosce che, come fu dimostrato da Hadamard [1] per le V_3, esse coincidono con quelle, che io dimostrai essere necessarie e sufficienti perchè la varietà V_n definita metricamente da φ contenga una semplice infinità (di equazione $y =$ costante) di varietà V_{n-1} totalmente geodetiche.

E poichè altrove [2] ho dimostrato che, verificandosi questo caso, le traiettorie ortogonali delle V_{n-1} costituiscono una congruenza principale per la V_n, se la ennupla principale di questa è unica e determinata, si può immediatamente riconoscere se il suo ds^2 sia riducibile alla espressione canonica voluta ed in che modo.

Si vedrà ancora che l'essere nullo il rotore della curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle V_{n-1} è condizione necessaria e sufficiente perchè il parametro y delle stesse V_{n-1} possa scegliersi in modo che il coefficiente di dy^2 nella espressione canonica suddetta sia indipendente da y. Salvo gli adattamenti resi necessarî dalla natura non definita delle quadriche, che rappresentano il ds^2 delle varietà quadrimensionali (spazio-tempo) di Einstein nel senso statico, tali varietà risultano così intrinsecamente caratterizzate.

1. Perchè una quadrica differenziale

$$\varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

sia algebricamente riducibile p volte, si richiede e basta che, posto $m = n - p$, le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si possano esprimere per n variabili indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_m; y_{m+1} \ldots y_n$ in modo che, posto

$$b_{pq} = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q},$$

risulti

$$b_{pq} = 0 \qquad (p = 1, 2 \ldots n;\ q = m+1 \ldots n). \tag{1}$$

[1] *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions.* Tome XXV de la 2.e série du Bulletin des Sciences mathématiques.

[2] Cfr. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Tomo LXIII, Parte 2a (Anno 1903-1904), pag. 1233.

E ciò esige che

$$X_s = \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \qquad (q = m+1, m+2, \dots n) \tag{2}$$

siano soluzioni proprie indipendenti del sistema di equazioni algebriche

$$\sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n); \tag{3}$$

per il che si richiede poi anzitutto che, detta k la caratteristica del discriminante della forma φ, sia $k \leq m$.

In una Nota, che è in corso di pubblicazione negli Atti del R. Istituto Veneto, ho dimostrato che è inoltre per ciò necessario e sufficiente che il sistema (3) ammetta $n - m$ soluzioni indipendenti

$$X_s = A_{q,s}$$

tali che il sistema di equazioni lineari a derivate parziali di 1° ordine

$$\sum_1^n {}_s\, A_{q,s} \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0 \qquad (q = m+1, m+2, \dots n)$$

risulti completo: e che, soddisfatte tali condizioni, si soddisfa alle (1) assumendo come variabili $y_1, y_2, \dots, y_m$ m integrali indipendenti di questo sistema.

In particolare la condizione $k < n$, oltre che necessaria, è anche sufficiente per la riducibilità semplice algebrica della forma φ; e se

$$X_s = A_s$$

è una qualunque soluzione propria del sistema (3), per dare a φ una espressione della forma

$$\psi = \sum_1^{n-1} {}_{pq}\, b_{pq}\, dy_p\, dy_q$$

basterà ad $x_1, x_2, \dots, x_n$ sostituire n variabili indipendenti $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}; y_n$ tali che le prime $n - 1$ di esse soddisfacciano alla equazione

$$\sum_1^n {}_s\, A_s \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0.$$

Evidentemente se è $k < n - 1$, una tale riduzione di φ si può ottenere in più modi; possiamo dire in $n - k$ modi essenzialmente distinti; ed è possibile una ulteriore riduzione di ψ nel modo sopra indicato per φ. La nuova ridotta, che conterrà soltanto i differenziali di $n - 2$ variabili indipendenti, potrà però considerarsi come una ridotta di φ se i coefficienti di ψ saranno indipendenti da y_n ed in questo caso soltanto.

Concludiamo che perchè una quadrica differenziale sia riducibile algebricamente due volte, è necessario e basta che sia $k \leq n - 2$ e di più che essa sia riducibile assolutamente una volta sola.

2. Suppongasi ora la forma φ riducibile assolutamente una volta, e sia ψ la sua ridotta. Avremo per i coefficienti di ψ le espressioni

$$b_{pq} = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q}, \quad (p, q = 1, 2, \ldots, n-1)$$

e la ipotesi che essi siano indipendenti da y_n sarà analiticamente espressa dalle relazioni

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_{rst} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} + \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \left(\frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_q \partial y_n} + \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_p \partial y_n} \right) = 0$$

dimostrate così per p e q minori di n.

Esse valgono però anche per p e q qualunque, poichè nei casi fino ad ora esclusi esse derivano dalle relazioni

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

conseguenze queste, alla loro volta, delle

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_s\, a_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 .$$

E poichè da queste ultime scendono pure le

$$\sum_1^n {}_s\, a_{rs} \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_q \partial y_n} = - \sum_1^n {}_{st} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_q} \frac{\partial x_s}{\partial y_n},$$

alle (4) possiamo sostituire le

$$\sum_1^n {}_{rst}\, a_{rs,t} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} = 0 ,$$

alle quali equivalgono poi le

$$(6) \qquad \sum_1^n {}_t\, a_{rs,t} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} = 0 \text{ [1]}.$$

Perchè la quadrica φ sia assolutamente riducibile, è dunque necessario che il sistema di equazioni algebriche costituito dalle (2) e dalle

$$(3') \qquad \sum_1^n {}_t\, a_{rs,t} X_t = 0$$

ammetta soluzioni proprie. E questa condizione è poi anche sufficiente poichè, come risulta dalla Nota ricordata sopra, se

$$X_s = A_s$$

[1] Ricordo che con $a_{rs,t}$ designo simboli di Christoffel di 1ª specie relativi alla forma φ.

è una tale soluzione ed $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ sono funzioni indipendenti di $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti tutte, eccettuata l'ultima, alla equazione

$$\sum_1^n {}_s A_s \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0 ,$$

sono insieme soddisfatte le (5) e le (6).

3. Data ora una quadrica differenziale positiva

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs} g_{rs} \, dx_r \, dx_s ,$$

proponiamoci di riconoscere se e come essa sia esprimibile sotto la forma

$$\psi = \psi_0 + H^2 \, dy^2 ,$$

essendo ψ_0 una quadrica differenziale ad $n-1$ variabili.

Se si osserva che la quadrica $\psi - H^2 \, dy^2$ deve essere riducibile, è facile prima di tutto riconoscere che nella varietà definita metricamente da ψ deve esistere una congruenza di sistema coordinato covariante

$$\lambda_r = H \frac{\partial y}{\partial x_r} \tag{7}$$

e conseguentemente normale perchè costituita dalle traiettorie ortogonali alle sottovarietà di equazione $y =$ costante.

Designeremo talora con $\lambda_{n/r}$ il sistema λ_r ed alla congruenza λ o λ_n associeremo altre $n-1$ congruenze λ_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ costituenti con essa una ennupla ortogonale. Risulterà così

$$\psi_0 = \sum_r^n {}_{rs} a_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

valendo per i coefficienti di ψ_0 le espressioni

$$a_{rs} = \sum_1^{n-1} {}_i \lambda_{i/r} \lambda_{i/s} ; \tag{8}$$

dalle quali risulta che il suo discriminante a è eguale a 0, avendo precisamente $n-1$ come caratteristica, e di più che è

$$\sum_1^n {}_s \lambda^{(s)} a_{rs} = 0 .$$

La ψ_0 è dunque semplicemente riducibile, e se $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali per la equazione

$$\sum_1^n {}_r \lambda^{(r)} \frac{\partial y}{\partial x_r} = 0 , \tag{9}$$

essa si esprime pei differenziali di $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ soltanto.

In base alle (8), le condizioni di assoluta riducibilità dateci dal paragrafo precedente, che nel nostro caso assumono la forma

$$\sum_1^n {}_t \lambda^{(t)} a_{rs,t} = 0 ,$$

si traducono immediatamente nelle

$$\sum_r^{n-1} {}_i \lambda_{i/r} \sum_1^n {}_t \lambda^{(t)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/t}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_t}\right) + \sum_1^{n-1} {}_i \lambda_{i/s} \sum_1^n {}_t \lambda^{(t)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/t}}{\partial x_r} - \frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_t}\right) = 0$$

che equivalgono alle

$$\sum_1^n \lambda^{(t)} \sum_1^{n-1} {}_i \left\{ \lambda_{i/r} (\lambda_{i/ts} - \lambda_{i/st}) + \lambda_{i/s} (\lambda_{i/tr} - \lambda_{i/rt}) \right\} .$$

Sostituendo infine alle $\lambda_{i/st}$ le loro espressioni in funzione delle rotazioni γ_{ihk}

$$\lambda_{i\ st} = \sum_1^n {}_{hk} \gamma_{ihk} \lambda_{h/s} \lambda_{k/t} ,$$

queste assumono la forma

$$\sum_1^{n-1} {}_{ih} (\gamma_{nih} + \gamma_{nhi}) \lambda_{i/r} \lambda_{k/s} = 0$$

ed equivalgono alle

$$\gamma_{nih} + \gamma_{nhi} = 0 \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n-1).$$

E se si tien conto ([1]) che, per la normalità della congruenza λ, valgono le relazioni

$$\gamma_{nih} - \gamma_{nhi} = 0 ,$$

si conclude che le relazioni cercate sono rappresentate dalle

$$\gamma_{nih} = 0 \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{10}$$

le quali devono essere soddisfatte comunque si scelgano le $n-1$ congruenze λ_i, che associate alla λ nella varietà V_n metricamente definita dalla forma φ, devono costituire una ennupla ortogonale.

E poichè le (10) ([2]) rappresentano anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè nella varietà V_n, la cui metrica è determinata dalla forma ψ, le sottovarietà di parametro y siano totalmente geodetiche, concludiamo che la detta forma ψ è suscettibile della espressione canonica sopra assegnata, soltanto se la V_n contiene una famiglia semplicemente infinita di V_{n-1} totalmente geodetiche.

4. Proponiamoci ancora di riconoscere sotto quali condizioni il coefficiente H^2, che appare nella detta espressione di ψ, per una opportuna scelta del parametro y, possa riescire indipendente da y; che è quanto dire sod-

([1]) Cfr. Ricci. *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc., vol. II, § I, 9.

([2]) Cfr. Ricci, *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque* ecc. Questi Rendiconti, vol. XII, pag. 409.

disfare alla equazione a derivate parziali (9). Perciò deriviamo covariantemente le (7), avendo presente che, come segue dalle (7) stesse, è

$$H^2 = 1 : (\Delta_1 y)^2$$

e che per la integrabilità loro si richiede che il sistema derivato da quello di elementi $\frac{\partial y}{\partial x_r}$ sia simmetrico. Eliminando tra le equazioni così ottenute le derivate seconde di y si ottengono lo equazioni

$$\lambda_{rs} - \frac{\partial y}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial x_s} = \lambda_{sr} - \frac{\partial y}{\partial x_s}\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

alle quali, dovendo H soddisfare alle equazioni (9), equivalgono le

$$\sum_1^n {}_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = - \frac{\partial \log H}{\partial x_r};$$

od anche, essendo

$$\lambda_{rs} = \sum_1^n {}_{hk} \gamma_{nhk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s},$$

le

$$\sum_1^{n-1} {}_h \gamma_{nhn} \lambda_{h/r} = - \frac{\partial \log H}{\partial x_r}.$$

E poichè [1] il sistema covariante semplice, che fornisce i primi membri di queste equazioni, definisce quel vettore normale alla congruenza λ, che chiamai curvatura geodetica della congruenza stessa, queste equazioni ci dicono che condizione necessaria e sufficiente perchè H sia indipendente da y, è che il rotore del vettore anzidetto sia nullo.

Astronomia. — Il Socio V. Cerulli parla della bella scoperta delle nubi cosmiche, fatta mediante il 16 pollici della specola Vaticana, dall'illustre P. Hagen, e ne segnala l'importanza, dimostrandola destinata a portar nuovi lumi in tutte quelle questioni che si riferiscono alla cosmogonia ed alla distribuzione stellare. Le nubi cosmiche coprono per $^3/_4$ il cielo, e non lasciano interamente scoperto altro che la Via lattea. Perciò il loro intreccio complicatissimo, appunto per l'analogia con la Via lattea, ha ricevuto da Hagen il nome di Via Nubila. Hagen ha pubblicato testè una carta che mostra il percorso della Via Nubila entro le costellazioni di Pérseo e dell'Auriga, segnandovi i numeri delle stelle per ogni grado quadrato. Appare evidente da detta carta che densità stellare e densità della Via Nubila variano in ragione inversa l'una dell'altra: segno non dubbio che la Via Nubila è quella che fornisce la materia onde si originano le stelle.

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche ecc., vol. II, § I, 6.

Terminando la sua comunicazione il socio Cerulli aggiunge che la scoperta di Hagen è stata espressa in forma poetica da un valente latinista romano (l'ing. F. Alibrandi) mediante 4 esametri, intesi a formar seguito ai due di Ovidio (Metamorfosi I, 168, 169) che trattano della Via lattea. Ovidio dice:

Est via sublimis cælo manifesta sereno;
Lactea nomen habet, candore notabilis ipso.

Il paralipómeno continua:

At quoque sublimis, meliori in parte per aethram,
Circumfusa via est, deserta obscurior aura,
Nubila, sideribus cœlique impervia monstris,
Ipsa quidem monstrum, stellarum semina condit.

Zoologia. — *Aggiunte alla Memoria: « La distribuzione geografica attuale delle Formiche »* (1). Nota del Socio Carlo Emery.

I. — Corologia e filogenesi del genere *Camponotus*.

Nella mia Memoria, io rilevavo la deficienza delle nostre cognizioni, rispetto alla sistematica di questo genere immenso, ed, in una Nota aggiunta nel corso della stampa (pag. 32), accennavo a studî proprî. Questi studî sono stati pubblicati (2) ed anche criticati dai miei colleghi specialisti, in parte con Note (3), in parte con lettere personali. Queste critiche mi parvero in parte giuste, di modo che fui condotto a riprendere lo studio dell'argomento; tanto più che mi avvio a preparare la trattazione della sottofamiglia dei *Formicinae* (in cui il genere *Camponotus* va compreso) nel *Genera Insectorum*.

Non intendo trattare in esteso in queste pagine la partizione sistematica del genere *Camponotus*, ma soltanto quei resultati delle mie indagini, che sono in relazione con la filogenesi del genere e che possano valere ad illustrarne la corologia.

Anzitutto mi è parso, a misura che mi addentravo di più nell'analisi di questo genere, che l'evoluzione dei gruppi di specie sia stata per lo più indipendente nel mondo olartico e paleotropico-australiano, e nel mondo neotropico: in modo che io fui condotto a distinguere un fascio più semplice

(1) *La distribuzione geografica attuale delle formiche. Tentativo di spiegarne la genesi col soccorso di ipotesi filogenetiche e paleogeografiche.* Memorie R. Accad. Lincei (5), vol. 13, fasc. 6° (1920).

(2) Emery C., *Le genre Camponotus Mayr; nouvel essai de sa subdivision en sous-genres.* Rev. Zool. Africaine, vol. 8°, pp. 229-260 (1920).

(3) Wheeler W. M, *Prof. Emery subgenera of the genus Camponotus Mayr.* Psiche, vol. 28, pp. 16-19 (1921); Santschi F., *Retouches aux sous-genres de Camponotus.* Ann. Soc. Entom. Belgique, vol. 61, pp. 310-312 (1921).

di gruppi neotropici, da un fascio molto più complicato di gruppi olartici, paleotropici ed australiani.

Il fascio neotropico comprende due gruppi principali numerosi: il gruppo dei sottogeneri affini a *Myrmobrachys* For. e quello che si raccoglie intorno al sottogenere *Myrmaphaenus* Emery (*Neomyrmamblys* Wheel., *Myrmamblys* Emery 1920 nec Wheeler 1913) ed altri piccoli gruppi, tra i quali voglio noverare il sottogenere *Myrmosphincta* Wheel. (nec Emery).

Questo piccolo gruppo (*C. sexguttatus* F. e affini), che avevo compreso, nel mio studio del 1920) nel mio sottogenere *Myrmotemnus* (*Myrmamblys* For. Wheel), offre una strana rassomiglianza con la specie Malese *C.* (*Myrmamblys*) *moeschi* For. Ultimamente il Santschi (l. cit.) lo classifica, con altre specie asiatiche, nei sottogenere *Myrmosphincta*. Se queste rassomiglianze siano dovute a convergenza casuale, o siano indice di parentela non so dire.

Il rinnovato studio che ho fatto, avvalendomi in parte delle Memorie del Mann sulle Formiche delle Isole Salomone e Fidgi [1], mi hanno dimostrato che le specie del sottogenere *Myrmamblys* (nel accezione del Wheeler) non s'inoltrano ad est al di là delle Isole di Santa Cruz (*C. reticulatus bedoti* Emery) e delle Marshall (*C. schneei* Mayr). Le specie delle Nuove Ebridi e della Polinesia, che il Forel ed io stesso [2] avevamo attribuite a questo gruppo, appartengono tutte al sottogenere *Colobopsis* (in senso ristretto).

È dunque poco verosimile che il gruppo *Myrmamblys* sia passato per l'Oceania, dalla Malesia-Papuasia, per dare origine ai gruppi paralleli di specie neotropiche (*Myrmosphincta*, *Myrmaphaenus*, *Pseudocolobopsis*, ecc.). L'esistenza di una specie di *Myrmamblys* nel Giappone (*C. itoi* For.) deve considerarsi come un elemento malese di quella fauna (Memoria pag. 48). Per cui ritengo, fino a prova del contrario, che l'evoluzione dei gruppi neotropici del genere *Camponotus*, i quali offrono rassomiglianza col sottogenere paleotropico *Myrmamblys*, sia dovuto a convergenza.

Ben diverso è il caso del sottogenere *Colobopsis*, almeno del gruppo tipico di questo complesso (*C. truncatus* Spin. e specie affini), che è a mio parere un gruppo naturale, vale a dire monofiletico (Memoria pag. 33). Questo gruppo ha il suo centro nella Papuasia, si estende nella Malesia ed è rappresentato nell'Asia non malese da pochissime specie, di cui una è il *C. truncatus* mediterraneo Oltrechè in Australia, ad est è diffuso con molte specie nell'Oceania (Nuove Ebridi, Nuova Caledonia, Isole Fidgi, Tonga, Samoa); però non è stato rinvenuto sinora nelle Isole Hawai. Infine ha cinque specie in Cuba, America centrale, Messico, Stati meridionali del-

[1] Mann W. M., *The ants of the British Solomon Islands*. Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard, vol. 63, n. 7 (1919); lo stesso, *The Ants of the Fidji Islands*, ibid., vol. 64, n. 5 (1921).

[2] Nella tabella delle Formiche dell'Oceania (Memosia, pag. 75) le specie suddette sono segnate come *Myrmamblys*.

l'Unione Americana, Isole Bahama, località che possono essere considerate (almeno in parte) come residui dell'Antillea.

La distribuzione geografica zonale delle *Colobopsis* ricorda quella pure zonale delle *Leptogenys* del gruppo *falcigera* (Memoria pp. 72, 73) (¹).

I gruppi olartici sono due: *Camponotus* in senso ristretto (come sottogenere, comprendente in Eurasia il solo gruppo *herculeanus*), e *Myrmentoma* gruppi *caryae* = *fallax* e *lateralis*). Al gruppo *caryae* spetta l'unico *Camponotus* conosciuto dell'ambra (*C. mengei* Mayr).

Resta il complesso di specie più numeroso, proteiforme e cosmopolita, partito in due sottogeneri *Myrmoturba* e *Dinomyrmex* dal Forel; a mio parere gruppi artificiali al massimo grado, ma che non mi è riuscito a scomporre.

Questi gruppi, particolarmente il primo, presentano transizioni con altri gruppi più o meno naturali e localizzati in singole regioni del mondo, con i quali sono verosimilmente legati da vincoli filetici più o meno palesi.

Nel mondo neotropico, come già dissi sopra, le numerose specie del genere *Camponotus* si trovano a costituire poche serie naturali, e nella tribù dei *Camponotini*, all'infuori del genere principale, non si trova che un genere derivato da esso: *Dendromyrmex*.

Invece, nel vecchio continente, le serie di specie del genere *Camponotus* sono molte e svariate. Inoltre, parecchi generi sono derivati dal genere principale: di questi, il genere *Polyrhachis*, con numerose specie, è diffuso sopra una vasta estensione di terre, mentre altri sono localizzati come *Hemioptica*, *Overbeckia*, *Calomyrmex*, *Echinopla*, *Opisthopsis*. La tribù dei *Camponotini* conta ancora due generi che ritengo, non derivati dal genere *Camponotus*, ma collaterali ad esso, in ragione di importanti caratteri morfologici: *Phasmomyrmex* in Africa e *Notostigma* in Australia (²).

Queste cose mi fanno pensare che il genere *Camponotus* ha dovuto avere origine nelle zone equatoriali o australi dell'emisfero orientale, e più tardi migrare in America. Parla in favore di una genesi equatoriale o australe la quasi assoluta assenza del genere dell'ambra.

II. — Formiche dell'Oceania.

Dacchè è stata stampata la mia Memoria, il Mann (loc. cit.) ha pubblicato i risultati delle sue investigazioni sulla fauna mirmecologica delle Isole Fidgi, che sono molto importanti; dimostrano che in quelle isole è stato conservato un focolaio faunistico autonomo, che, pure serbando caratteri a prevalenza papuani, ha, sopra un complesso di 93 forme (tra specie,

(¹) Anche la distribuzione del genere *Epitritus* (Africa orientale, Mediterraneo, Papuasia, Hawai, Antille), è analoga a quella della *L. falcigera*.

(²) Nel genere *Notostigma* i maschi hanno le mandibole larghe e dentate, mentre nei *Camponotus* e nei generi che ritengo derivati da esso, le hanno strette e senza denti; in ciò *Notostigma* è più primitivo. Non si conoscono i maschi di *Phasmomyrmex*, ma la costituzione del torace nelle operaie è fatta su un altro piano di quello dei *Camponotus* (metanoto largamente scoperto).

sottospecie e varietà), 75 forme proprie, 8 che abitano anche la Papuasia e altre isole o l'Australia e 10 specie tropicopolite.

Le specie proprie delle Isole Fidgi sono in generale affini a quelle della Papuasia; ma vi sono due generi (*Poecilomyrmex* Mann e *Archeomyrmex* Mann) e due sottogeneri (*Arctomyrmex* Mann, sottog. di *Adelomyrmex* e *Myrmogonia* For. sottog. di *Camponotus*) che non sono stati rinvenuti altrove. Tre di questi piccoli gruppi contano soltanto ciascuno una specie. Il sottog. *Myrmogonia* invece ha 5 specie e 6 sottospecie e varietà. Il Forel aveva attribuito a questo gruppo parecchie specie dell'Australia, le cui operaie minori hanno alquanta rassomiglianza con le specie fidgiane. Ma il Mann ha scoperto che le operaie maggiori o soldati (che finora non erano conosciuti) hanno il capo conformato come nel sottog. *Colobopsis*. A mio parere, le *Myrmogonia* sono un differenziamento fidgiano derivato dal gruppo *Colobopsis*, e non hanno con le specie australiane che rassomiglianze superficiali.

Allo stesso Mann [1] dobbiamo importanti ragguagli sulle Formiche delle Isole Santa Cruz ad oriente delle Isole Salomone. Il Mann novera 25 specie in dette isole, delle quali 7 sono forme proprie, 3 specie tropicopolite ed il resto specie e forme che furono rinvenute altrove, particolarmente nella Papuasia e nelle Isole Salomone.

È notevole che, nelle Isole Santa Cruz, il Mann non ha trovato nè *Oecophylla*, nè alcuna specie di *Crematogaster*, di cui parecchie abitano le Salomone. Ciò che dovrebbe far ritenere che questi generi non fossero giunti nella Papuasia, quando le Isole Santa Cruz sono state separate da essa. Similmente non si trovano nella Nuova Caledonia.

Nel passare in rassegna, nella mia Memoria, le Formiche dell'Oceania, mi è sfuggito che, nel 1904, il dott. Schnee [2] ha pubblicato uno studio sulla fauna terrestre delle Isole Marshall, che appartengono alla classe degli atoll.

Nella Memoria dello Schnee, c'è un elenco di 8 specie di Formiche, determinate dal Mayr, delle quali 3 sono tropicopolite, 3 sono specie comuni nella Papuasia, 1 è Malese, 1 è descritta dal Mayr come specie nuova e propria (*Camponotus* (*Myrmamblys*) *schneei* Mayr), affine al multiforme *C. reticulatus* Rog. Malese e Papuano. La mia impressione è che tutte le Formiche delle Isole Marshall sono specie importate, anche il *C. schneei*, il quale sembra attualmente specie propria, forse soltanto perchè le Formiche della Papuasia e della Malesia sono ancora imperfettamente conosciute.

La fauna entomologica degli atoll, vere isole oceaniche, è dunque affatto diversa, per origine e composizione, da quella di alcune isole rocciose. Queste possono essere abitate da residui di faune continentali, se non sono state totalmente sommerse, nelle vicende della loro storia.

(1) *The Ants of the British Solomon Islands* (1919).

(2) Schnee P., *Die Landfauna der Marschall-Inseln*. Zool. Jahrh. Syst., vol. 20, pp. 387-413 (1904).

Astronomia. — *Angoli di posizione di 50 stelle doppie osservate al R.° Osservatorio del Campidoglio.* Nota del Corrispondente G. ARMELLINI.

1. Circa 30 anni fa, il prof. Giacomelli, primo astronomo del Campidoglio, fece tre serie di osservazioni di stelle doppie, tratte dal grande catalogo di Struve (Σ) e pubblicate poi in questi Rendiconti [1]. La bontà dello strumento adoperato — un equatoriale Merz di modeste dimensioni, ma dotato di un *potere di definizione* veramente eccellente — e l'abilità grandissima dell'osservatore, hanno dato a queste serie un'importanza scientifica veramente notevole. Tanto che il Burnham, nel suo grande *General Catalogue of Double Stars* [2], riporta quasi sempre per intero i risultati del Giacomelli, mentre si contenta di citare i soli nomi di altri astronomi che pure hanno osservato le stesse stelle con strumenti più potenti.

2. Come è noto, le osservazioni hanno lo scopo di determinare l'orbita apparente che la stella satellite descrive in molti anni intorno alla stella principale, ed a tal fine è necessario di rinnovarle ad epoche diverse. Ma, come avverte bene il Bigourdan [3], le stelle doppie sono così numerose mentre il personale degli Osservatorî è purtroppo così ristretto, che ci troviamo ben lontani dal soddisfare convenientemente ad un tal còmpito. Molte speranze erano state riposte nell'aiuto della fotografia celeste, ma non sembra che esse debbano realizzarsi. L'astronomo americano H. Curtis scrive anzi [4] che in confronto dell'osservazione visuale la fotografia avrà in questo campo « *little chance for successful competition* ».

3. Per tali motivi ho creduto cosa assai utile di riesaminare le stelle già osservate trenta anni fa dal prof. Giacomelli, valendomi dello stesso strumento da lui adoperato. Le mie osservazioni durano ormai da più di un anno, ed io mi onoro nel presentare all'Accademia i primi risultati. Soltanto credo utile, prima di entrare in argomento, di premettere qualche cenno sul metodo che ho seguìto, giacchè in tali lavori la bontà del risultato dipende sopratutto dal metodo adottato.

4. *Posizione della testa.* — Struve suggeriva di tenere il capo verticale durante le osservazioni, ed il suo consiglio fu generalmente seguìto dal Giacomelli. Sussiste però un errore personale variabile in funzione dell'angolo formato dalla congiungente degli occhi con la congiungente delle due stelle. Io l'ho verificato accuratamente nelle prime osservazioni di prova, trovando

(1) Questi Rendiconti, 1890, II, fasc. 5° e 9°; 1891, I, fasc. 2°.

(2) Washington, Carnegie Institution, 1906.

(3) Ann. du Bureau des longitudes, 1917.

(4) The Adolfo Stahl Lectures in Astronomy; S. Francisco, 1919.

che questo errore è sensibile benchè debolissimo. Per eliminarlo, molti astronomi osservano una stessa doppia in più posizioni del cielo; altri adoperano un prisma per raddrizzare l'immagine. Io ho osservato tenendo la congiungente degli occhi alternativamente parallela e normale alla congiungente delle stelle, ed usando ora l'occhio destro ed ora il sinistro.

5. *Allineamento.* — È questa la parte più difficile del lavoro. Struve chiama *fallace* il metodo della *bisezione* dei centri dei due astri col filo longitudinale del micrometro di posizione, e consiglia di osservare ponendo i due astri a brevissima distanza dal filo stesso, in modo che esso risulti parallelo alla linea dei centri stellari idealmente prolungata. Schiaparelli ha adoperato invece la bisezione sostenendo giustamente che un metodo fallace per un osservatore può essere ottimo per un altro, considerando le diverse condizioni fisiologiche dell'occhio. Giacomelli si è servito del metodo di Struve ed anche io l'ho seguìto costantemente. Solo per le doppie di grandezze apparenti notevolmente diverse ho trovato preferibile il metodo del Secchi. Esso consiste nel racchiudere la doppia tra due fili paralleli posti a distanza di pochi secondi in modo che la congiungente dei centri stellari risulti parallela ai fili stessi.

6. *Ingrandimento.* — Secchi consigliava di adoperare il « massimo ingrandimento che l'atmosfera comportasse » e Giacomelli ha seguìto costantemente questo metodo. Per me ho trovato più vantaggioso un ingrandimento minore onde aumentare ancora la nitidezza e precisione dell'immagine. Non dubito infatti che la causa più importante di errori risieda nelle immagini non ben definite o poco luminose.

7. Sarebbe stato mio desiderio di misurare anche le distanze tra i centri stellari. Ma disgraziatamente il meccanismo di orologeria dell'equatoriale del Campidoglio, dalla cui esattezza dipende essenzialmente l'attendibilità di queste ultime misure, è interamente fuori servizio. Ho dovuto quindi rinunziare con dolore a questa seconda parte del lavoro, almeno finchè il movimento dell'equatoriale non verrà riparato. È noto però che nelle doppie orbitali basta conoscere l'angolo di posizione, giacchè il raggio vettore può calcolarsi con la legge delle aree.

8. Ho osservato ogni doppia quattro o cinque sere, eseguendo ogni sera generalmente cinque e talora anche sei od otto puntate per ciascuna stella. Solo in condizioni favorevolissime le puntate sono state ridotte a tre o quattro.

Nelle seguenti tabelle la prima colonna indica la data (anno e parti centesimali), la seconda gli angoli di posizione ottenuti, la terza il numero delle puntate eseguite in ogni misura. Di regola osservavo con *campo illuminato* e *fili oscuri*. Solo per stelle debolmente visibili ho adoperato il campo oscuro ed i fili lucidi, indicati dalle lettere *fl* in aggiunta alla terza colonna.

Mi è grato intanto di ringraziare caldamente il prof. A. Di Legge, Direttore dell'Osservatorio, per aver posto a mia disposizione gli strumenti necessarî all'esecuzione del presente lavoro.

Σ 12 = 35 *Piscium.*

1921 ott. 12	147,9	4
" 16	149,7	3
" 20	148,0	5
" 21	147,9	4
" 22	149,5	5
1921,80,	148,6	Armell.

Demb. (1865,07) trovò 149,3
Giac. (1889,28) " 148,5
Glas. (1889,44) " 149.0

Σ 43 App I (*Albireo*)

1921 mag. 7	54,1	4
" 8	54.8	6
" 21	54.4	8
1921,36	54,4	Armel.

Dembowski (69,98) trovò 55,7
Asoph Hall (84.94) " 55,1
È una delle più belle del cielo!

Σ 79 = *Andromedae* 164

1921 ott. 22	192,7	4
" 29	193,6	7
" 30	192,6	5
dic. 21	191,9	4
1921.86	192.8	Armel.

Dembowski (69,66) trovò 192,00
Giacomelli (88 89) " 192.25

Σ 80

1921 ott. 22	325,0	5 *fl*
" 30	325,2	4 *fl*
" 31	325,3	3 *fl*
nov. 6	324,8	5 *fl*
1921.83	325,0	Armel.

Dembowski (63,83) trovò 309.2
Giacomelli (89,77) " 316.3

Σ 100 = ζ *Piscium*

1921 ott. 12	63,3	4
" 13	62,5	4
" 19	62,7	5
" 21	62,6	4
" 22	62,5	5
1921,80	62,7	Armel.

Dembowski (66,04) trovò 63,8
Giacomelli (89,80) " 63,4

Σ 180 = γ *Arietis*

1921 ott. 12	358.9	3
" 13	359.1	3
" 15	359,8	5
" 16	359.6	3
" 17	359,7	3
" 18	359.9	5
" 21	358.9	4
1922 genn. 4	359.0	5
1921.82	359,4	Armel.

Dembowski (65,48) ebbe 359,2
Giacomelli (88,90) " 358,5
A. Hall (86.97) " 359,7

Σ 205 = γ *Andromedae*

1921 ott. 12	63.6	5
" 13	63,9	4
" 15	63,8	4
" 16	62,6	4
" 17	63,7	4
" 18	63,7	6
" 19	62,9	5
" 20	63,3	5
" 21	63.4	5
1921,79	63,4	Armel.

Dembowski (63,81) trovò 62.9
Giacomelli (88,90) " 63.1

Σ 222 = 59 *Andromedae*

1921 ott. 12	34,2	3
" 13	33,4	4
" 16	34,1	3
" 20	33,6	5
" 21	33,6	4
" 22	33,8	4
1921,79	33.8	Armel

Dembowski (66,38) trovò 35,5
Giacomelli (89,83) " 35,1

Σ 231 = 66 *Ceti*

1921 ott. 31	231,4	4
dec. 12	231,9	5
" 21	231,6	5
" 26	231,4	5
1921,93	231,6	Armel.

Dembowski (64,91) trovò 229,1
Giacomelli (89,83) " 231,3

Σ 232 = 28 *Trianguli*

1921 ott. 29	66,5	5 *fl*
dec. 12	66,4	4
" 21	65,6	5
" 26	65,6	5
" 28	66,7	6
1921,94	66,2	Armel.

Dembowski (69,08) trovò 66,8
Giacomelli (89,80) " 65,7
Doolittle (902,9) " 66,5

Σ 239

1921 dec. 21	210,9	5
" 25	210,2	4
" 27	210.2	5
" 28	210,6	6
1921,98	210,5	Armel.

Dembowski (65,57) trovò 210,4
Giacomelli (88,95) " 210,8
Burnham (904,79) " 210,7

Σ 401

1922 febb. 4	270,1	5
" 10	270,7	6
" 12	270,5	5 *fl*
1922,10	270,4	Armel.

Dembowski (67,61) trovò 270,3
Giacomelli (89,34) " 270,0

Σ 470

1922 genn. 6	348,4	4
" 7	349,6	3
" 13	349,1	3
" 20	349,1	7
" 21	349,5	4
1922,03	349,1	Armel.

Dembowski (65,58) trovò 347,2
Giacomelli (89,86) " 346,7
Doolittle (901,92) " 348,6

Σ 590 = 55 *Eridani*

1922 genn. 4	318,4	5
" 6	318,1	3
" 7	317,9	4
" 21	317,4	3
" 22	317,6	5
1922,03	317,9	Armel.

Dembowski (65,81) trovò 316,1
Giacomelli (89,94) " 316,3

Σ 730

1921 febb. 12	140,2	5
" 13	140,7	5
" 19	140,4	5
" 26	140,2	5
1921,13	140,4	Armel.

Dembowski (65,86) trovò 141,1
Giacomelli (89,96) " 140,2

Σ 738 = λ *Orionis*

1922 genn. 4	42,9	5
" 5	42,3	3
" 6	42,3	5
" 7	42,7	3
1922,01	42,6	Armel.

Dembowski (66,29) trovò 44,8
A. Hall (85,16) " 47,4
Giacomelli (89,96) " 42,2

Σ 752 = ι *Orionis*

1921 genn. 17	142,3	5
febb. 4	143,0	5
» 6	142,1	5
1921,08	142,5	Armel

Dembowski (65,86) ebbe 141,1
Giacomelli (89,96) » 140,7
Biesbroeck (903,22) » 141,7

Σ 855

1921 febb. 27	113,2	5
marzo 1	113,7	5
» 2	113,5	5
1921,16	113,5	Armel.

Dembowski (66,66) ebbe 113,8
Giacomelli (89,99) » 113,4

Σ 919 = 11 *Monocerotis*

AB

1922 genn. 5	132,1	5
» 6	132,9	6
» 7	131,6	4
» 20	131,6	3
1922,03	132.1	Armel.

Dembowski (67,88) ebbe 130,2
Giacomelli (89,52) » 130,6
Burnham (98,96) » 133,4

BC

1922 genn. 13	103,5	4
» 20	102,7	4
» 21	103,2	3
» 22	103,4	6
1922.05	103,2	Armel.

Dembowski (67,88) ebbe 103,0
Giacomelli (90,01) » 104,3
Burnham (98,96) » 108,4
È una delle più belle stelle triple del cielo!

Σ 924 = 20 *Geminorum*

1921 mar. 19	210,5	5
apr. 2	211,6	5
» 3	211.3	5
1921,24	211,1	Armel.

Dembowski (67,50) ebbe 209,8
Giacomelli (89,49) » 210,0
Biesbroeck (903,24) » 210,4

Σ 1027

1921 marzo 19	355,8	5 *fl*
» 31	355,6	5 *fl*
1921,22	355,7	Armel.

Dembowski (66,9) ebbe 355.9
Giacomelli (90,02) » 355,4

Σ 1110 (*Castore*)

1921 apr. 24	217,3	5
» 30	216,9	5
mag. 2	216,3.	6
1921,32	216,8	Armel.

Dembowski (76,77) ebbe 235,9
Giacomelli (90.07) » 230,5
Biesbroeck (903.04) » 224·3

Σ 1223

1922 genn. 29	213,1	5 *fl*
febb. 4	213,1	5 *fl*
» 10	213.9	5
1922.09	213.4	Armel.

Dembowski (69,10) ebbe 215.2
Giacomelli (89,18) » 214.2

Σ 1224

1922 genn. 29	43.7	4 *fl*
febb. 4	44.5	5 *fl*
» 10	44.1	5
1922,09	44,1	Armel.

Dembowski (67.87) ebbe 41.3
Giacomelli (89.19) » 41,9
Biesbroeck (903.21) » 44.0

Σ 1268 = ι *Cancri*

1921 aprile 1	307,9	5
» 2	307,2	5
» 3	307.2	5
1921.25	307,4	Armel.

Dembowski (66,74) trovò 307,1
Giacomelli (89.21) » 307,4
Colemann (99,27) » 307,3

Σ 1627

1921 mag. 8	196,1	5
» 9	195,6	5
» 10	195,8	5 *fl*
» 13	196.3	5
1921,35	195,9	Armel.

Dembowski (67,76) trovò 196.8
Giacomelli (90,20) » 196,5
Hugues (904,37) » 196.1

Σ 1657 = 24 *Comae*

1921 mag. 21	271,7	5
» 22	271,9	5
» 28	271,9	5
» 29	271,3	5
1921,40	271,7	Armel.

Dembowski (66,45) trovò 271,0
Giacomelli (90,22) » 271,1
Hugues (902,78) » 271,4

Σ 1669 = 58· *Corvi*

1921 giugno 4	305,8	5
» 11	305,6	5
» 12	305,4	5
» 23	305,6	5
1921,45	305.6	Armel.

Dembowski (66,63) ebbe 302,9
Giacomelli (89,30) » 303,4

Σ 1670 = γ *Virginis*

1921 apr. 17	323,7	5
» 24	323,6	5
mag. 2	323,6	5
» 3	324,2	5
1921,31	323,8	Armel.

Giacomelli (89,58) ebbe 332,8
Hugues (98,28) ebbe 330,4
Biesbroeck (903,71) » 328,3

L'angolo di posizione va diminuendo per il moto orbitale. L'eccentricità è elevatissima. È una delle doppie più belle

Σ 1677

1921 mag. 9	349,0	7
» 13	349,4	4
» 21	348.6	4
1921.37	349.0	Armel.

Dembowski (67.27) ebbe 348,0
Giacomelli (90.30) » 347,5
Hugues (904.35) » 347.8

Σ 1678

1921 mag. 4	190,3	5
» 5	189.8	5
» 6	189.0	8
» 7	189,7	5 *fl*
1921.34	189,7	Armel.

Struve (32,27) trovò 211.6
Dembowski (63,24) » 204.0
Giacomelli (89,37) » 197,67

Σ 1740

1921 mag. 6	75,4	6
» 7	75.1	5
» 8	74.8	8
1921,35	75.1	Armel.

Dembowski (65,97) ebbe 75,8
Giacomelli (89,99) » 75.6
Glasenapp (93,33) » 75,2

Σ 1833

1921 giug. 24	172,1	5 *fl*
» 26	171,7	5
» 27	172,6	5
1921,48	172,1	Armel.

Dembowski (66,75) trovò 167,3
Giacomelli (90,00) » 169,0
Hugues (904,37) » 170,0

Σ 1850

1921 mag. 22	261.8	5
» 28	261.1	7
giug. 11	261,5	5
» 12	261.9	7
1921.42	261.5	Armel.

Dembowski (68.57) trovò 261.9
Giacomelli (89.38) » 262,1

Σ 1864 = π *Bootis*

1921 giug. 23	104,3	5
» 25	103.9	5 *fl*
» 26	105.2	5
» 27	104.6	5
1921,48	104,5	Armel.

Dembowski (67.94) trovò 101,5
Giacomelli (89.38) » 103.1
Biesbroeck (903.28) » 103.3

Σ 1877 = ε *Bootis*

1921 mag 22	331.4	5
» 28	330.8	5
giug. 12	329,9	6
» 28	330.3	5
1921,43	330,6	Armel.

Dembowski (65.86) ebbe 324.8
Giacomelli (89.43) » 331.8
Biesbroeck (903 4) » 330.3

Il valore di Giac. è forse troppo alto.

Σ 1890

1921 luglio 6	45.4	5
» 22	45.3	5
» 23	44.7	8
» 24	45.6	6
1921,55	45.1	Armel.

Dembowski (66,91) ebbe 45,0
Giacomelli (90.33) » 44,6

Σ 1904

1921 giug. 24	348,2	5 *fl*
» 25	348.4	5 *fl*
» 26	347.9	5
» 27	348.0	5
1921.48	348,1	Armel.

Dembowski (67,14) trovò 346.4
Giacomelli (89.97) » 346.2
Glasenapp (97,49) » 346,6

Σ 1910

1921 luglio 4	210,9	5
» 5	211.8	5
» 6	211.2	5
» 8	211.8	5
1921,51	211,4	Armel.

Dembowski (66,32) trovò 211,5
Giacomelli (89,47) » 210,5
Doolittle (903 26) » 211,8

Σ 1919

1921 giug. 24	10,8	5 *fl*
» 25	10,7	5 *fl*
» 26	10,8	5
» 27	10.9	5
1921,48	10,8	Armel.

Struve (32,21) trovò 10,2
Dembowski (67,93) » 9,8
Giacomelli (89,47) » 9.6
Burnham (905,18) » 10,0

Σ 1931

1921 giug. 26	171,4	5
» 27	171.0	5
» 28	171.3	5
luglio 3	170.5	6
1921.49	171,0	Armel.

Dembowski (66,00) trovò 171,7
Giacomelli (90,32) » 170,5
Hugues (904.34) » 170,6

Σ 1954 = δ *Serpentis*

1921 luglio 3	182,9	5 *fl*
» 4	183,6	6 *fl*
» 6	183.1	5
» 22	183.4	6
» 23	184.0	5
1921,53	183,4	Armel.

Dembowski (65,36) trovò 192.0
» (75,30) » 190,5
Giacomelli (90.40) » 186,4
Burnham (905,48) » 185,0

Σ 1962

1921 luglio 10	190,0	5
» 19	189,7	5
» 20	189,4	4
» 21	189,7	5
1921,54	189,7	Armel.

Dembowski (68,25) ebbe 188,5
Giacomelli (90,38) » 187,8
Jouffray (903.46) » 188,3

Σ 1965 = ζ *Coronae*

1921 luglio 23	302,9	5
» 24	303,6	5
» 28	302,4	4
» 29	302,5	8
1921,56	302,8	Armel.

Dembowski (68,78) ebbe 302,2
Giacomelli (90,38) » 302,2
Biesbroeck (903,39) » 304,3

Σ 2007

1921 luglio 20	324,6	5
» 21	324.7	5
» 23	324,2	4
» 24	223.8	6
» 25	324 3	5
» 30	324.1	5
1921.56	324,3	Armel.

Dembowski (58,38) ebbe 326,5
Giacomelli (90,09) » 325,8

Σ 2010 = κ *Herculis*

1921 luglio 10	12,5	5
» 20	12,7	8
» 21	12,3	5
» 23	12,3	4
» 24	12,4	7
» 29	12,8	6
» 30	12,4	5
1921,56	12,5	Armel.

Dembowski (67,12) ebbe 9,9
Giacomelli (89,50) » 10,6

Σ 2140 = α *Herculis*

1921 luglio 20	110,7	6
» 21	110.9	5
» 23	111,0	7
» 24	110.6	8
» 25	110,6	5
» 26	110.5	4
» 27	110,7	4
1921,56	110.7	Armel.

Dembowski (66,54) ebbe 117,8
Giacomelli (90,08) » 113,3

Σ 2161 = ρ *Herculis*

1921 luglio 22	313,6	6
» 23	313,9	8
» 24	313,5	4
» 25	313,8	8
1921,56	313,7	Armel.

Dembowski (68,49) ebbe 310,7
Giacomelli (90,53) » 312,6

Σ 2758 = 61 *Cygni*

1921 dec. 11	130,2	5
» 12	130,8	6
» 25	131,5	5
» 26	131,4	3
» 27	131,0	3
1921,97	130,9	Armel.

Giacomelli (89,78) trovò 121,3
Burnham (905,41) » 127,2

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota VI del Corrisp. QUIRINO MAJORANA.

USO DEL CONTROLLO. — Il descritto congegno di controllo, o come dirò semplicemente il *controllo*, svela le rotazioni del sostegno della bilancia. Per utilizzarlo, procedo nella guisa seguente. Stabilito un punto della scala al posto di osservazione si regola la vite r in guisa che su di esso cada il raggio di luce riflesso da S_2; si portano allora i piombi dalla posizione PP a P'P'; questo raggio si sposta in conseguenza, p. es., di 200 mm. [1] in alto. Si tratta ora di ricondurlo alla sua posizione primitiva, senza spostare i piombi; creando cioè una rotazione nel sostegno della bilancia inversa a quella occasionata dalla mutata posizione di quelli. Per raggiungere tale scopo, è tornato assai acconcio usufruire della mobilità di detto sostegno dovuta al suo speciale modo di sospensione con le molle MM (fig. 3). Un filo sottile di argentana è fissato in I ad un'appendice portata del piano LL, ed è avvolto su due carrucole D_1, D_2, ad imperniatura assai delicata. Di esse, la D_1 è prossima alla bilancia, come vedesi in figura, e sostenuta opportunamente dal piano TT; l'altra trovasi discosta per circa 3 metri. Al filo di argentana è finalmente legato un disco circolare di ferro Z che funge da armatura di un'elettrocalamita J. In questa circola in permanenza una corrente di qualche decimo di ampère, regolabile dal posto di osservazione con opportuno reostato. La distanza di J dalla bilancia è tale che nessuna sensibile azione da parte sua sulle parti magnetiche della bilancia sia da temersi. Si vede allora che affievolendo la corrente in J, il sostegno della bilancia può ruotare alquanto per il cedimento delle molle MM, ed è così possibile riportare l'indice luminoso riflesso da S_2 nella sua primitiva posizione, venendosi a correggere con ogni esattezza la rotazione perturbatrice constatata. È ovvio poi, che se si osservasse uno spostamento dell'indice luminoso verso il basso anzichè verso l'alto, esso verrebbe corretto con un accrescimento della corrente in J.

Si può obbiettare che le rotazioni impresse al sostegno della bilancia, sia dal moto dei piombi che dal *controllo* sieno certamente accompagnate da spostamenti traslatorii rispetto alle lampade di proiezione e alla scala di lettura, e che quindi questi possano indurre qualche errore nella valuta-

[1] Per quanto si è detto tale valore può mutare notevolmente da una esperienza all'altra.

zione degli effetti. Ma, come già dissi, tali spostamenti, che del resto sono dell'ordine di $^1/_{10}$ di mm., non possono trasferirsi nelle letture sulla scala, giacchè gli specchi S_1 ed S_2 sono piani.

In ogni caso se, malgrado tutto, una certa causa di errore continuasse a persistere, essa non potrebbe essere che molto ridotta di fronte a quella che si aveva senza l'uso del controllo. Le letture incrociate, fatte caricando alternativamente il giogo col sistema *sfera-contrappeso* o con l'altro *tara-contrappeso*, certamente permetteranno la eliminazione di tale errore residuale.

L'uso del controllo, eliminando nelle osservazioni la accennata capricciosa causa di errore, le rende fra loro perfettamente comparabili ai fini della presente ricerca; esse vanno peraltro corrette, in conseguenza della esistenza di altre cause, che restando sensibilmente costanti da una misura all'altra o che essendo esattamente prevedibili, non possono lasciare incertezza alcuna sul risultato finale. Di tali cause debbo ora discorrere, prima di accennare a questo risultato.

Cause magnetiche di errore. — Il mutamento nella posizione dei piombi, essendo questi, insieme con i loro sostegni, costituiti da materiale più o meno magnetico, e in piccola parte anche da ferro (connessioni dei pezzi delle armature ABCD, viti calanti, motorini elettrici ecc.), può esercitare qualche azione sulla posizione di equilibrio della bilancia. Il giogo di questa, come nella prima serie di esperienze, ha i tre coltelli in acciaio; ma il suo indice verticale a lettura diretta in H (fig. 3), che poteva causare le maggiori perturbazioni magnetiche, è stato sostituito con altro di ottone; può dunque rimanere qualche azione perturbatrice su quelli, ed in minima parte anche sul resto del giogo. Essa può esser provocata per il moto dei piombi, dal campo magnetico terrestre (in conseguenza della varia permeabilità magnetica di questi e dei loro accessorî), od anche da magnetismo residuo delle parti mobili, specie di quelle in ferro.

Con l'uso del *controllo*, e quando si esperimenta *in bianco* cioè con *tara-contrappeso*, qualsiasi perturbazione meccanica, dovuta cioè alle deformazioni dell'edificio resta, come si è detto eliminata; non interviene neppure, come si dirà appresso, alcuna azione newtoniana sensibile, dovuta cioè alla azione attrattiva dei piombi sul giogo, variabile con la posizione di quelli. Ma con tutto ciò si osserva sempre in tale esperimento uno spostamento della posizione di equilibrio del giogo, al trasferirsi dei piombi dall'una all'altra posizione. Un attento studio di tale fatto mi ha convinto che questo spostamento non può essere occasionato che da un'azione magnetica. Essa verrebbe a corrispondere ad una forza pondero-motrice differenziale sulle due braccia del giogo dovuta alla lieve dissimetria dei piombi rispetto a queste, o ad ineguali proprietà magnetiche dei due coltelli estremi. Per cui, se dalle osservazioni del ricercato effetto di assorbimento gravitazionale fatte quando il giogo è caricato

col sistema *sfera-contrappeso*, si sottrae lo spostamento della posizione di equilibrio del giogo osservato con l'esperimento *in bianco*, si viene ad eliminare un errore che voglio chiamare semplicemente *errore magnetico*.

Si potrebbe sospettare peraltro che quando si sperimenta con il sistema *sfera-contrappeso*, anzichè *in bianco*, venendo a mutare la distribuzione delle masse del giogo carico mobile, possa intervenire altra perturbazione magnetica; ma tale dubbio non ha fondamento, come ho potuto accertarmi con l'esperimento seguente. Al disotto della custodia sferica M (fig. 2) ho fissato una piccolissima bilancia magnetica d'inclinazione con ago corto orizzontale oscillante intorno ad un coltello, in un piano verticale parallelo a quello della figura, e precisamente contenuto fra i due piombi quando questi sono in una delle due posizioni estreme. L'ago della bilancia magnetica porta uno specchietto, per l'osservazione, su scala verticale, dei suoi spostamenti. Rilevo così che il trasferire i piombi da PP a P'P', o viceversa, fa spostare, per pura azione magnetica, un raggio riflesso dello specchietto di 24 mm. Indi, avendo allontanati i piombi in PP, pongo sotto la bilancia magnetica un magnete ausiliario, osservando così uno spostamento sulla scala verticale di circa 2500 mm., cioè circa 100 volte maggiore.

In una seconda serie di osservazioni, avendo rimosso la bilancia magnetica, determino l'azione del magnete ausiliario sulla bilancia H, quando il suo giogo è carico col sistema *sfera-contrappeso*; tale azione si svolge principalmente, e direi quasi esclusivamente, sulla sfera di piombo; giacchè il magnete è a questa vicinissimo ed è assai lontano dal giogo di H. Ed essa è dell'ordine di qualche decimo di mm.; cioè è dello stesso ordine di grandezza dell'effetto di assorbimento gravitazionale ricercato. Da tutto ciò si deduce che la perturbazione magnetica, mentre varia da 1 a 100 sulla bilancia magnetica a seconda che essa sia occasionata dai piombi o dal magnete ausiliario, rimane, se mai, dello stesso ordine di grandezza per quanto riguarda la sfera di piombo. La sola spiegazione plausibile di tale risultato è che l'azione magnetica, per parte dei piombi, sulla sfera, manchi del tutto. Che questa conclusione sia attendibile risulta anche dal fatto che il piombo impiegato nella confezione della sfera è assai puro, e che questo metallo, come è noto, ha lievissime proprietà magnetiche e propriamente diamagnetiche. Rimane dunque giustificata la dicitura di *errore magnetico* adottata per le osservazioni fatte col sistema *tara-contrappeso*.

Cause newtoniane di errore. — Queste cause sono, nell'apparecchio da me utilizzato, tre: attrazione delle zattere Z (fig. 2) sulla sfera; attrazione delle masse sussidiarie mobili (viti calanti, bracci CD, BD, tavolette e motorino K, ecc.) sulla sfera; attrazione dei piombi e di tutte le altre parti mobili sul contrappeso. Prescindo dunque da eventuali dissimetrie di massa dei due piombi rispetto alla sfera; un calcolo opportuno dimostra che se esse sono contenute dentro i limiti imposti dalla esattezza costruttiva

delle varie parti dell'apparecchio, non occasionano effetti perturbatori. Prescindo inoltre dal fatto che il contrappeso C e la tara K (fig. 3) non sono allo stesso livello e si trovano in posizione dissimmetrica rispetto ai piombi, occasionando ciò ancora errore perfettamente trascurabile. E passo alla discussione delle tre cause suddette.

Attrazione delle zattere. — Le due zattere di legno Z (fig. 2) costituiscono un'unica massa prismatica a base quadrata di cm. 95 di lato e dell'altezza di cm. 15,3. Essa agisce notevolmente sulla sfera quando i piombi si trovano P′P′; ed agisce anche, benchè assai più lievemente, nel senso di dare ancora una componente verticale, quando i piombi sono in PP; ma in questo secondo caso l'effetto è trascurabile, come è facile vedere, tenendo conto delle distanze fra le varie parti dell'apparecchio. Si tratta dunque di calcolare con esattezza la prima azione. Ora, se teniamo presente che il centro della sfera trovasi sulla verticale passante per il centro della zattera complessiva quadrata ed orizzontale, dicendo a il mezzo lato della zattera, b lo spessore di questa, l la distanza tra la sua faccia superiore ed il centro della sfera, si dimostra [1] che la cercata attrazione è data da:

$$A_1 = 4\,K\,M\,\vartheta\, a \log \frac{\left(\sqrt{2a^2+l^2}+a\right)\left(\sqrt{2a^2+(b+l)^2}-a\right)}{\left(\sqrt{2a^2+l^2}-a\right)\left(\sqrt{2a^2+(b+l)^2}+a\right)} -$$

$$- l\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{l} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2a^2+l^2}}{l} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+l^2}+a}{l}\right) +$$

$$+ (b+l)\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b+l} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2a^2+(b+l)^2}}{b+l} - \right.$$

$$\left. - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+(b+l)^2}+a}{b+l}\right)$$

dove K è la costante universale newtoniana, M è la massa della sfera di piombo e ϑ è la densità del materiale che costituisce la zattera.

Nel caso delle mie esperienze si ha: $M = 1274$ gr.; $\vartheta = 0{,}985$; $a = 47{,}5$ cm.; $b = 15{,}3$ cm.; $l = 47{,}5$ cm. Tenendo conto che $K = 6{,}68 \cdot 10^{-8}$, e sostituendo si ha:

$$A_1 = 0{,}00227 \text{ dine} = 0{,}00231 \text{ mg.}$$

Tale attrazione si manifesta quando i piombi e la zattera sono in PP; essa fa apparire la sfera più pesante. Per cui il cercato effetto di assorbimento gravitazionale, che consiste in una diminuzione di peso, viene ad essere diminuito apparentemente da tale causa perturbatrice. Poichè in con-

[1] Il calcolo relativo, basato semplicemente sulla legge di Newton, è stato cortesemente eseguito dal mio collega prof. Fubini, che sento il dovere di ringraziare.

seguenza di ciò indicheremo con una cifra negativa quell'effetto, dobbiamo dire che anche A_1 abbia valore negativo, in guisa cioè che tale attrazione si dovrà sommare con l'effetto di assorbimento, accrescendolo in valore assoluto. Sarà dunque effettivamente

$$A_1 = -0{,}00231 \text{ mg.}$$

Attrazione delle masse sussidiarie. — Anche queste dànno una componente attrattiva verticale differente da zero sulla sfera, tanto che si trovino in corrispondenza della posizione P′ P′ che dell'altra PP. Essendo esse situate in località più basse delle zattere Z, anche in questo ultimo caso la componente può avere un valore non trascurabile. Occorre dunque calcolare il valore di tali attrazioni per le due posizioni suddette: la loro differenza ci darà la correzione A_2, che sarà evidentemente negativa come A_1. Ma questo calcolo non può farsi di colpo con una sola formula, analogamente a quanto si è fatto per le zattere Z; si tratta infatti di masse attraenti di forma assai complessa e di densità che può variare da punto a punto. Ci si deve dunque accontentare di scomporre le varie parti CD, BD, motorino K, ecc., in altre parti elementari più piccole, di conosciuto volume e densità, oppure di conosciuta massa; supponendole poi concentrate al rispettivo centro di gravità, è sufficiente applicare la formula di Newton fra masse puntiformi. Ho eseguito effettivamente tale scomposizione, e le masse elementari, m, così risultanti sono state in numero di 73. Diciamo x_1, y_1, z ed x, y, z le coordinate di una qualunque di esse rispetto a tre assi ortogonali (di cui x è orizzontale e parallelo al piano della fig. 2, y è normale a questo piano, e z è verticale) che abbiano l'origine nel centro della sfera di piombo; tali coordinate si riferiscono alle due posizioni P′ P′ e PP delle armature, e si comprende perchè quelle verticali z, sieno eguali nei due casi.

È facile vedere che la cercata differenza delle due componenti verticali attrattive della massa elementare m considerata, è espressa dalla relazione:

$$a = \text{KM}mz\left(\frac{1}{(x_1^2+y_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Eseguendo il calcolo ho trovato i singoli valori di a per le 73 masse elementari. Essi variano fra un centomillesimo ed un decimillesimo di mg., e la loro somma complessiva dà la cercata correzione A_2:

$$A_2 = -0{,}00180 \text{ mg.}$$

Attrazioni sul contrappeso. — Al muoversi dei piombi, le attrazioni elementari delle loro varie parti, comprese le masse sussidiarie sul contrappeso C (fig. 2), variano. Si possono così calcolare le componenti verticali risultanti di tutte queste attrazioni per le due posizioni PP e P′P′,

e farne la differenza, servendosi della formula del paragrafo precedente. Ma il valore risultante A_3 va preso con segno contrario a quello delle due attrazioni precedentemente studiate, perchè il detto contrappeso è sostenuto al braccio di sinistra della bilancia, mentre la sfera, su cui quelle attrazioni si manifestano, è portata dal braccio destro.

A determinare il valore di A_3 contribuiscono quasi esclusivamente le masse dei due piombi (circa 10 tonnellate); mentre le masse sussidiarie, la cui azione si è considerata per la determinazione di A_2, essendo di valore relativamente piccolo rispetto ai piombi, dànno contributo quasi trascurabile. Risulta così che:

$$A_3^* = +\,0{,}00275 \text{ mg.}$$

Così computati gli effetti delle varie cause perturbatrici, mi riservo nelle prossime Note di esporre i risultati numerici delle osservazioni.

Chimica industriale. — *Sui mercaptotiazoli come acceleranti della vulcanizzazione* [1]. Nota del Corrispondente G. Bruni e di E. Romani.

In una Nota presentata a codesta Accademia, nella seduta del 2 maggio 1921, e pubblicata nei Rendiconti, vol. XXX, 1° sem., pag. 337-344, abbiamo esposto come i mercaptobenzotiazoli in presenza di ossidi metallici, od i loro sali metallici, siano potenti acceleranti della vulcanizzazione, ed inoltre, come alla loro formazione nell'interno delle mescolanze per azione dello zolfo su svariate sostanze aromatiche azotate, sia dovuta la azione accelerante di queste ultime.

Abbiamo anche detto come l'azione di questi corpi sia dovuta alla formazione dei rispettivi disolfuri i quali possono perdere zolfo e riacquistarlo analogamente, a quanto fanno i disolfuri di tiourame.

Contemporaneamente alla nostra comunicazione i Sigg. Bedford e Sebrill ne tenevano una alla American Chemical Society nella quale pure sono nominati i mercaptobenzotiazoli e relativi sali metallici come acceleranti [2].

Noi abbiamo voluto provare se i corrispondenti composti contenenti il nucleo tiazolico non condensato con quello benzolico, avessero le medesime proprietà e la nostra previsione è risultata confermata.

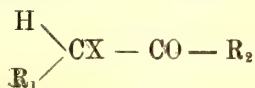
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli. Milano, agosto 1921.

(2) Chemical and Metallurg. Engineering, 12 maggio 1921.

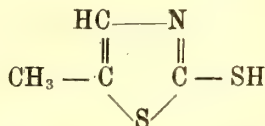
Il composto più semplice della serie, il mercaptotiazolo

$$\begin{array}{ccc} HC_3 & \text{——} & {}_4N \\ \| & & \| \\ HC_5 & & {}_2C - SH \\ & \diagdown \overset{1}{S} \diagup & \end{array}$$

non è conosciuto ed abbiamo in corso ricerche per la sua preparazione che non appare facile. Sono invece noti alcuni suoi derivati contenenti catene laterali nei posti 5 e 4, i quali si possono preparare facilmente mediante un'ingegnosa reazione trovata da A. Miolati [1] e cioè condensando il ditiocarbammato d'ammonio con sostanze contenenti l'aggruppamento

$$\begin{array}{l} H \diagdown \\ \quad\; CX - CO - R_2 \\ R_1 \diagup \end{array}$$

dove R_1 e R_2 possono essere atomi d'idrogeno o radicali monovalenti e X un atomo di alogeno.

Il più semplice e il più facilmente accessibile di questi composti è il 5-metil 2-mercaptotiazolo:

$$\begin{array}{ccccc} & HC & \text{——} & N & \\ & \| & & \| & \\ CH_3 - & C & & C & - SH \\ & & \diagdown S \diagup & & \end{array}$$

che si ottiene per azione del ditiocarbammato d'ammonio sul monocloroacetone.

Noi abbiamo operato secondo le indicazioni di Miolati, ottenendo i medesimi risultati.

Abbiamo anzi trovato che a scopo tecnico la preparazione può essere notevolmente semplificata.

Il metilmercaptotiazolo, è una sostanza cristallina, di un leggero colore giallastro, p. fus. 86°, solubilissima in alcool, poco solubile in benzolo, insolubile in acqua.

Aggiunto alle mescolanze di gomma e zolfo nella proporzione di 1 a 3 per cento in presenza di ossidi metallici, come ossidi di zinco, piombo, magnesio, calcio, mercurio ed altri, provoca la vulcanizzazione in tempi brevissimi, per es. in 5 minuti a 120°. Determina pure la vulcanizzazione anche a temperatura molto più bassa ed anche a temperatura ambiente in tempi proporzionalmente più lunghi. È quindi un ultra-accelerante di potenza paragonabile solo ai xantogenati di zinco.

Ne abbiamo preparati i sali metallici che non erano stati descritti da Miolati. Il modo migliore di prepararli consiste nel trattare una soluzione alcoolica concentrata del mercaptotiazolo con carbonato sodico secco in ec-

(1) Gazz. Chim. Ital., 23, 575 (1891).

cesso, filtrare, diluire con acqua e precipitare con la soluzione di sali solubili del metallo derivato.

Abbiamo così preparato i sali seguenti, tutti insolubili:

Sale di *zinco* — bianco.
" " *cadmio* — giallastro.
" " *piombo* — giallo, poco stabile.
" " *mercurio* (*-ico*) — bianco.
" " *colbalto* — verde.
" " *rameoso* — giallo.

Partendo dalla soluzione di un sale rameico si forma dapprima un precipitato verde, che passa subito al giallo. Evidentemente si forma prima il sale rameico instabile che si riduce a rameoso come fanno i solfocianuri, gli xantogenati e simili.

Anche i sali di zinco, cadmio, piombo e mercurio e specialmente il primo sono acceleranti assai energici come era prevedibile.

Abbiamo tentato di preparare il *disolfuro* per blanda ossidazione del metilmercaptotiazolo. A tale scopo abbiamo trattato una soluzione alcoolica concentrata del medesimo con una soluzione acquosa di ferricianuro potassico, versando quest'ultima goccia a goccia finchè tutto il liquido assume una tinta verdastra. Si aggiunge altra acqua e si osserva la separazione di goccioline oleose che sbattendo si trasformano in scagliette cristalline bianche. La sostanza filtrata è ricristallizzata sciogliendola in alcool e precipitando con acqua, fonde a 64°. Fu sottoposta ad analisi determinando lo zolfo; l'analisi diede in 100 parti: zolfo 41.93.

Essa non è quindi il disolfuro la cui formola $(C_4N_4NS)_2S_2$ richiede 49.23 %; il trovato corrisponde invece perfettamente col calcolato della formola $(C_4H_4NS)_2S$ — 42.10 %. La sostanza così preparata è quindi il *solfuro di metiltiazolo*, finora sconosciuto.

Abbiamo tentato altre vie per isolare il disolfuro, per es. ossidando con cloro, jodio, ecc. ma finora senza risultato. Abbiamo anche tentato di estrarlo dal liquido da cui si è precipitato il sale rameico come si è detto di sopra e in cui si deve originariamente formare, ma si ottiene sempre il monosolfuro. Evidentemente il disolfuro è in questo caso assai instabile e perde zolfo dando il solfuro. Non vi è però nessun dubbio che il meccanismo d'azione di questi mercaptotiazoli e dei loro sali come acceleranti di vulcanizzazione consiste nella formazione dei disolfuri e nel passaggio ciclico di questi a solfuri e viceversa in modo perfettamente analogo a quanto è stato spiegato per i mercaptobenzotiazoli nella già citata pubblicazione.

La presente Nota fu inviata in plico chiuso alla R. Accademia il 19 agosto 1921, pervenuto il successivo 21 agosto e aperto su richiesta dell'autore nella seduta del 5 febbraio 1922.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa.* Nota di N. ABRAMESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. Le serie di polinomi, $\sum a_n P_n(x)$, appaiono come una generalizzazione della serie di Taylor, $\sum a_n x^n$. Lo studio delle serie di polinomi si può fare da due punti di vista. Primo, si dà una funzione $f(x)$, regolare in un campo limitato da una curva chiusa (C), con connessione semplice, e si richiede uno sviluppo in serie di polinomi della funzione $f(x)$, valevole solamente nell'interno della curva (C). Questo problema è stato completamente risolto (1), dimostrando che lo sviluppo è valevole solamente nell'interno della curva (C), i polinomi $P_n(x)$ dipendono esclusivamente dal contorno (C), mentre i coefficienti a_n dello sviluppo dipendono e dal contorno (C) e dalla funzione $f(x)$.

Un altro punto di vista dello studio delle serie di polinomi è anche il seguente. Data una successione di polinomi, $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$, di gradi uguali agli indici, come pure i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, si chiede la regione di convergenza della serie $\sum a_n P_n(x)$. Questo problema ha cominciato ad essere studiato 45 anni or sono da Darboux (2) e da Poincaré (3).

Nel presente lavoro studio il *problema posto per la prima volta da Darboux* (4), nella Memoria citata, cioè considero le serie di polinomi $\sum a_n P_n(x)$, i polinomi $P_n(x)$ essendo definiti dalle relazioni di ortogonalità

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x)\, dx = 0\ ,\ m \neq n\ ;\int_a^b \varphi(x) P_n^2(x)\, dx = I_n = \text{cost.}^{\text{i}}\,\text{assegnate},$$

dove $\varphi(x)$ designa una funzione positiva ed integrabile nell'intervallo (a, b) (5).

(1) Faber, *Ueber polynomische Entwickelungen* (Math. Annalen, 1903, pag. 389; 1907, pag. 118); N. Abramescu, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, Romania, 1921).

(2) *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (Journ. de Mathém. pures et appliquées, 1878)

(3) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Matematics, vol. VII); Pincherle, *Sui sistemi di funzioni analitiche....* (Annali di Matematica, II, vol. XII).

(4) Per questo le chiamo *Serie di Darboux* e non serie di polinomi ortogonali come le chiamano i tedeschi.

(5) Queste serie sono state considerate anche dal sig. Picard nel suo corso di Analisi superiore alla Sorbonne (Paris) nel 1918.

II. 1°. Cominciando con lo studio dei polinomi $P_n(x)$, dimostro che il polinomio $P_n(x)$ si può mettere sotto la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \dots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \dots & xg_n - g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \dots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)},$$

$$D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}.$$

$$F = (x - t)\,\varphi(t) \quad , \quad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt,$$

che $D_{n-1}(F)$ e $D_{n-1}(\varphi)$ sono i determinanti delle forme quadratiche

$$\int_a^b (x - t)\,\varphi(t)\,(y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2\, dt = \sum\sum (xg_{p+q} - g_{p+q+1})\, y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,(y_0 + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2\, dt = \sum\sum g_{p+q}\, y_p y_q, \quad p, q = 0, 1, \dots n-1.$$

2°. Analogamente il polinomio $P_n(x)$ si può mettere anche sotto la seguente forma

$$P_n(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n\,(b-a)^n}\,\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)\Big],$$

$\psi_n(x)$ essendo una funzione finita per $x = a$ ed $x = b$.

III. In ciò che segue, *studio quelle serie di polinomi* $P_n(x)$ *ai quali corrisponde la stessa funzione* $\psi_n(x)$ *indipendente da* n, *che indico con* $\psi(x)$. In questo caso la funzione $\varphi(x)$ è la soluzione comune di un numero infinito di equazioni integrali

$$\psi(x) = \frac{(b-a)^n\, n}{(x-a)^n (x-b)^n} \int_a^x (x-z)^{n-1}\, \varphi(z)\, P_n(z)\, dz.$$

Studio anche il caso $\psi_n(x) = \varphi(x)$, e ritrovo tutti i polinomi conosciuti di Legendre, Jacobi, ecc.

Oltre alle proprietà conosciute dei polinomi $P_n(x)$, trovo ancora le seguenti.

1°. Il polinomio $P_n(x)$ è il coefficiente di t^n nello sviluppo in serie di t dell'espressione $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(x)}\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z essendo la radice dell'equazione

$$z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \quad z = x, \quad t = 0,$$

che si svolge con la formola di Lagrange; questa espressione è una funzione generatrice per i polinomi $P_n(x)$.

2°. Se $\varphi(x) = \psi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, il polinomio $P_n(x)$ verifica una equazione differenziale di 2° ordine, lineare, la seconda soluzione della quale è

$$\frac{1}{n!\,(b-a)^n} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{-n-1} dt .$$

3°. Indicando con $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$ i coefficienti di x^n ed x^{n-1} del polinomio $P_n(x)$, si può precisare la relazione di ricorrenza fra tre polinomi consecutivi che, nel nostro caso, è

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) - (x - \alpha_n) P_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1} I_n}{c_{n,n} I_{n-1}} P_{n-1}(x) = 0 ,$$

$$I_n = (-1)^n \frac{c_{n,n}}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\, dx , \quad \alpha_n = \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}} .$$

4°. Ricerco quindi il dominio di convergenza della serie di Lagrange, in generale, e poi nel caso del nostro sviluppo. Servendomi del metodo di Darboux per la determinazione del valore approssimato del termine generale della serie di Lagrange, dimostro che il valore approssimato del polinomio $P_n(x)$ (dopo aver fatto un cambiamento di variabile in modo che ai limiti a e b corrispondano 0 ed 1) è

$$P_n(x) = \Psi(\xi)\, n^{-\frac{1}{2}} \xi^{n+1} (1 + \varepsilon) , \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x} ,$$

$\Psi(\xi)$ essendo una funzione indipendente da n e da ε. Trovo in pari tempo i valori assintotici dei coefficienti $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$.

IV. 1°. Le curve di convergenza delle serie considerate sono ellissi omofocali, con i fuochi in a e b che ottengo valendomi del valore prossimo del polinomio $P_n(x)$.

2°. Le stesse curve di convergenza le trovo anche osservando che $P_n(x)$ è il coefficiente del termine generale della serie di Lagrange studiata.

V. 1°. Passo poi allo sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ di una funzione $f(x)$ regolare in una determinata regione. Considero il caso particolare dello sviluppo

$$\frac{1}{x-y} = \sum \frac{P_n(x)\, Q_n(y)}{I_n} , \quad Q_n(y) = \int_a^b \frac{\varphi(t)\, P_n(t)}{t-y} dt ,$$

e faccio lo studio delle funzioni di seconda specie, $Q_n(y)$, di Darboux.

2°. Determino la relazione di ricorrenza che è verificata dalle funzioni $Q_n(y)$.

3°. Dimostro che (prendendo come limiti 0 ed 1 invece di a e b),

$$Q_n(y) = \int_0^1 \psi(t) \frac{t^n(1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt .$$

4°. Nel caso $\varphi(x) = \psi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, la seconda soluzione dell'equazione differenziale che è verificata da $P_n(x)$, è

$$\frac{1}{n!}(1-x)^{-\mu} x^{-\lambda} Q_n(x) .$$

5°. Valendomi del metodo di Darboux per il calcolo dei valori approssimati dell'integrale di Laplace, dimostro che i valori assintotici di $Q_n(y)$ ed I_n sono

$$Q_n(y) = \int_a^b \psi(t) \frac{t^n(1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt = \Phi(\eta)\, n^{-\frac{1}{2}} \eta^{-n-1}(1+\varepsilon),$$

$$\eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y} ,$$

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \int_0^1 \psi(t)\, t^n (1-t)^n dt = \frac{k}{n}(1+\varepsilon') ,$$

$\Phi(\eta)$ e k essendo indipendente da n.

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota II di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Si è visto, nella precedente Nota [1], che affinchè lo spazio-tempo

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 d\varphi^2 + c^2 e^\nu dt^2 , \tag{1}$$

in cui λ, μ, ν sono funzioni di r soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{r \to \infty} \lambda = \lim \mu = \lim \nu = 0 , \tag{2}$$

ammetta geodetiche che siano rappresentate, quando si elimini il tempo, da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{cost} = a , \quad u = \frac{1}{r} , \tag{3}$$

occorre e basta che sia

$$e^\nu = \frac{1+\beta u}{1+\alpha u} , \quad e^\mu = e^\lambda = 1 + \beta u \tag{4}$$

[1] Questi Rendiconti. 1922, vol XXXI, 1° sem., pag. 18.

essendo α, β due costanti arbitrarie. Si ha in tal caso

$$a = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right) \tag{5}$$

in cui h, k sono due costanti di integrazione il cui significato è fornito dalle relazioni

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h e^{-\mu}, \quad \frac{dt}{ds} = k c^{-2} e^{-\nu}. \tag{6}$$

2. La (3) è formalmente identica alla prima legge di Kepler. Se si vuole che risulti anche $r^2 d\varphi/dt =$ cost. (espressione formale della seconda legge di Kepler) si dovrà porre, per le (6), (4), $\alpha = 0$. In questo caso si ha quindi da considerare lo spazio-tempo la cui metrica è assegnata da

$$ds^2 = -(1 + \beta u)(dr^2 + r^2 d\varphi^2 - c^2 dt^2). \tag{7}$$

Nel caso in esame si è condotti, per note considerazioni, a porre $-\beta = 2 f M/c^2$, essendo f la costante d'attrazione newtoniana ed M la massa del Sole; se ne trae $\beta = -2m = -$ km. 2,94.

Si può affermare, nel caso presente, che il moto di un punto materiale intorno al Sole soddisfa, nel sistema di coordinate adottato, alle prime due leggi di Kepler. Dalla (7) si deduce che i raggi luminosi, il cui cammino è segnato dalle geodetiche di lunghezza nulla, non subiscono deflessione nel campo gravitazionale; si deduce altresì una influenza del campo stesso sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura identica a quella dedotta da Einstein.

3. Un altro caso, degno di nota, si ottiene ponendo $\beta = 0$ nelle (4), per cui si ha

$$ds^2 = -(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + \frac{c^2}{1 + \alpha u} dt^2. \tag{8}$$

Si è condotti ad attribuire ad α il valore $2m =$ km 2,94 e si può affermare che il moto di un punto materiale intorno al Sole soddisfa alla prima ma non alla seconda legge di Kepler. Si deduce che un raggio stellare, rasente il bordo solare, dovrebbe subire una deflessione di 0'',88, pari alla metà di quella preveduta da Einstein, e si ricava pure una influenza del campo di gravitazione sul numero delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella indicata da Einstein.

4. Si possono attribuire ad α, β valori tali da condurre, nello stesso tempo, ad una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, pari a quella dedotta da Einstein (1'',75) e ad una influenza del campo gravitazionale sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella indicata da Einstein. Basta porre, a

tale scopo, $\alpha = 4m$, $\beta = 2m$. essendo $m =$ km. 1,47, ossia basta considerare lo spazio-tempo la cui metrica è assegnata da

$$(9) \qquad ds^2 = -(1+2mu)(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + c^2 \frac{1+2mu}{1+4mu} dt^2 .$$

Dalla (9) non si deduce, ovviamente, per il moto di un punto materiale intorno al Sole, la relazione $r^2 d\varphi/dt =$ cost.

5. Per i casi esaminati, che si presentano come i più interessanti, si può affermare che quando si tratti di moti lenti intorno al Sole (cioè quando siano piccoli i rapporti delle velocità dei punti materiali alla velocità della luce) valgono, almeno in via approssimativa, le tre leggi di Kepler. Queste, nei casi esaminati, possono ritenersi valide, a meno di quantità trascurabili, per il moto dei pianeti.

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota II di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In questa Nota dimostrerò il *Teorema A* enunciato al n. 2 della precedente, e avrò anche occasione di fare qualche osservazione concernente quel teorema e qualche altra concernente la teoria dei problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari autoaggiunte, del tipo ellittico, alle derivate parziali del second'ordine.

1. Si abbia l'espressione, lineare autoaggiunta alle derivate parziali,

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(R_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(R_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Bu ,$$

ove le funzioni R_{11}, R_{12}, R_{22}, B, con le derivate parziali del primo ordine per le R_{11}, R_{12}, R_{22}, sono finite e continue nel dominio D considerato al n. 1 della Nota I, e soddisfano ivi alle limitazioni

$$R_{11}(x,y) > 0 , \quad R_{11}(x,y)\,R_{22}(x,y) - R_{12}^2(x,y) > 0 , \quad B(x,y) \leq 0 .$$

Nel caso particolare che il dominio D sia semplicemente connesso e che ivi risulti $R_{11} \equiv R_{22}$, $R_{12} \equiv 0$, $B \equiv 0$, Hilbert (¹) ha dimostrato l'esistenza della funzione di Green relativa all'espressione $L(u)$ e alla condizione al contorno $u(x,y)$ su $C = 0$. Ora è possibile estendere il procedimento seguìto da Hilbert, per dimostrare tale esistenza, anche nelle ipotesi più generali che noi facciamo sulla $L(u)$ e sul dominio D. *Basta solo ammettere* (come

(¹) Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 58-73.

appunto fa Hilbert nel caso da lui considerato) *l'esistenza, per il dominio D della funzione di Green, relativa alla stessa condizione al contorno e alla espressione $\Delta_2 u$* (1).

Indicando con

$$g(xy\,,\xi\eta) = g_2(xy\,,\xi\eta) - g_1(xy\,,\xi\eta)\log \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,,$$

la funzione che, per ogni punto $(x\,,y)$, interno a D, rappresenta, nelle variabili ξ e η, la soluzione fondamentale dell'equazione $L(u)=0$, nulla su C, si trova che l'indicata funzione di Green è data da

$$G(xy\,.\,\xi\eta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{g(xy\,,\xi\eta)}{R_{11}(xy)+R_{22}(xy)}\,,$$

ed inoltre che, se $\varphi(x\,.\,y)$ rappresenta una qualsivoglia funzione definita in D, *ivi continua con le sue derivate parziali del primo ordine*, ogni soluzione finita e continua in D con le sue derivate parziali dei due primi ordini delle due equazioni

$$(1) \qquad L(u)+\varphi(x\,.\,y)=0\,, \qquad u \text{ su } C = 0\,,$$

è data da

$$(2) \qquad u(xy) = \int\!\!\int_D G(xy\,,\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

e, viceversa, dalla (2) segue la continuità in D di u e delle sue derivate parziali dei due primi ordini, e seguono le (1).

2. Consideriamo ora l'equazione

$$(3) \qquad L(u)+\lambda A u = 0\,,$$

contenente il parametro λ, ove la A designa una funzione definita in D, ivi finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine. Sia λ_n un autovalore di λ relativo alla condizione al contorno u su $C=0$, e sia u_n l'autosoluzione corrispondente, la quale potrà dipendere, linearmente ed omogeneamente, da parecchie costanti arbitrarie (2). Questi autovalori dànno tutti e soli gli zeri della funzione $\Delta(\lambda)$, intera in λ, esprimente il deter-

(1) Senza far questa ipotesi, introducendo però altre ipotesi qualitative, più restrittive per il contorno di D e per i coefficienti di $L(u)$, si perviene facilmente all'esistenza della indicata funzione di Green, anche con i procedimenti di E. E. Levi, da lui dati nella Memoria *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. (Memorie della Società italiana delle scienze, tom. XVI, serie 3a), pp. 61-70.

(2) È ben nota l'esistenza di un'infinità di autovalori. Essi sono tutti reali ed hanno il punto ∞ per unico punto limite. All'esistenza ed al calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni si perviene anche mediante una facile estensione dei procedimenti da me dati nella mia *Tesi d'abilitazione* (citata nella Nota I) ai n. 29, 30 e 31.

minante dell'equazione integrale di Fredholm

$$(4) \qquad u(xy) = \lambda \int\int_D G(xy, \xi\eta)\, A(\xi\eta)\, u(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

cioè gli autovalori λ_n sono tutti e soli gli autovalori di λ per questa equazione. Le autosoluzioni della (3) dànno tutte e sole le autosoluzioni della (4)

Dalla (3) e dalla u_n su $C = 0$, si deduce

$$(5) \qquad \lambda_n \int\int_D A u_n^2\, dx\, dy = \int\int_D \left[R_{11}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + 2 R_{12} \frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + R_{22}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy - \int\int_D B u_n^2\, dx\, dy,$$

e quindi, per $\lambda_n > 0$,

$$(6) \qquad \int\int_D A u_n^2\, dx\, dy > 0.$$

3. Per dimostrare il *Teorema A*, dovremo considerare la $L(u)$ nel caso particolare $B \equiv 0$. Sia $z = z_0(x, y)$ l'estremale per l'integrale $J(z)$, a cui si riferiscono le funzioni $R_{11}, R_{12}, R_{22}, A$. Per ogni autosoluzione u_n, si può determinare un numero positivo ϱ_n tale che, per $|\varepsilon| < \varrho_n$, la superficie $z = z_0 + \varepsilon u_n$ appartenga all'insieme S e, di più, la differenza $J(z_0 + \varepsilon u_n) - J(z_0)$ abbia il segno di

$$I(u_n) \equiv \int\int_D \left[R_{11}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + 2 R_{12} \frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + R_{22}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy - \int\int_D A u_n^2\, dx\, dy.$$

Supposta non soddisfatta la condizione espressa dal *Teorema A*, indichiamo con $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di λ *interni* all'intervallo $(0, 1)$; si avrà allora, in forza delle (5) e (6), $I(u_n) < 0$, per $n = 0, 1, \ldots, k$, e quindi,

$$\text{per } |\varepsilon| < \varrho_n, \quad J(z_0 + \varepsilon u_n) - J(z_0) < 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, k).$$

La superficie $z = z_0(x, y)$ non potrà dunque fornire un minimo, nell'insieme S, per l'integrale $J(z)$.

4. Poichè le funzioni z_0 e $z_0 + \varepsilon u_n$ risultano in D finite e continue con le loro derivate dei primi due ordini, possiamo osservare che:

La condizione, espressa dal Teorema A, *per un minimo dell'integrale* $J(z)$, *è necessaria anche se il minimo deve aver luogo solamente per quella porzione dell'insieme* S, *costituita dalle superficie* $z = z(x, y)$, *per le quali le funzioni* $z(x, y)$ *sono in* D *finite e continue con le loro derivate parziali dei primi* due *ordini.*

5. Domandiamo, ora, in primo luogo, la condizione necessaria, espressa dal *Teorema A*, è forse equivalente a quella data dal Sommerfeld (loc. cit. nella Nota I)? Tale equivalenza si riscontra nel caso particolare che D si riduca ad un rettangolo o ad un cerchio e che in D sia $R_{12} \equiv 0$, $R_{11} \equiv R_{22} \equiv 1$, $A(x, y) \equiv k^2$, con k costante. Il rispondere ora, in tutta generalità, alla domanda posta, appare assai difficile. Occorrerebbe possedere — ciò che avrebbe, anche per di sè, un grandissimo interesse — più precise nozioni sulle linee di D, luogo, per i varî valori di λ, dei punti di zero delle soluzioni della (3).

Domandiamo, in secondo luogo, per un minimo debole dell'integrale $J(z)$ è sufficiente la condizione espressa dal *Teorema B* enunciato in principio della Nota I? È sufficiente, cioè, che la funzione intiera $\varDelta(\lambda)$ si conservi sempre diversa da zero, in tutto l'intervallo $(0, 1)$? Per rispondere affermativamente basterebbe dimostrare che, soddisfatta questa condizione, se cioè $\varDelta(\lambda) > 0$ per $0 \leq \lambda \leq 1$, l'equazione $L(u) + Au = 0$ possiede una soluzione sempre diversa da zero in tutto D. Di ciò mi propongo di trattare in una Nota futura.

Matematica. — *Sulle successioni di funzioni assolutamente continue, convergenti in media.* Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

Mi propongo d'indicare in questa Nota un criterio notevole per riconoscere la convergenza uniforme di una successione, convergente in media, i cui termini siano funzioni assolutamente continue, aventi derivate sommabili insieme coi loro quadrati. Il criterio ha particolare importanza per lo studio delle serie di funzioni ortogonali e normali, soddisfacenti alle condizioni ora dette.

1. Le funzioni:

$$f_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

definite in un intervallo finito (a, b) $(a < b)$, siano ivi assolutamente continue, abbiano le derivate sommabili insieme coi loro quadrati, e costituiscano una successione convergente in media, rispetto ad una funzione caratteristica $p(x)$ misurabile, limitata, avente un limite inferiore l maggiore di zero, tale cioè da avere, essendo p un numero intero positivo qualsivoglia, indipendente da n:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b p(x) \Big[f_n(x) - f_{n+p}(x) \Big]^2 dx = 0. \tag{2}$$

Sussiste allora il seguente teorema, che contiene il criterio dianzi accennato.

La successione (1) *converge uniformemente nell'intervallo* (a, b) *ad una funzione limite continua* $f(x)$, *se*:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_a^b p(x) \left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 dx \, . \int_a^b \left[f'_n(x) - f'_{n+p}(x) \right]^2 dx \right\} = 0 ;$$

in particolare se risulta, qualunque siano n *e* p:

$$\int_a^b \left[f'_n(x) - f'_{n+p}(x) \right]^2 dx \leqq C \qquad \text{(C costante)}.$$

Essendo x' un punto qualunque di (a, b), si può infatti scrivere:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 = \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ 2 \int_{x'}^{x} \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right] \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right] d\xi ,$$

e quindi per la disuguaglianza di Schwarz:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ 2 \sqrt{\int_{x'}^{x} \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \, . \int_{x'}^{x} \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} ,$$

ed a maggior ragione:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{l}} \sqrt{\int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \, . \int_a^b \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} .$$

Poichè è lecito supporre che sia x' un punto di minimo assoluto per la funzione $\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2$, risulta ancora:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \frac{1}{(b-a)\, l} \int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{l}} \sqrt{\int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \, . \int_a^b \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} .$$

Questa disuguaglianza sussiste, qualunque siano n, p ed x in (a, b), e serve senz'altro, a causa della (2), a provare che, nelle dette ipotesi, la (1) converge ivi uniformemente.

2. Si consideri ora una successione infinita di funzioni assolutamente continue, aventi derivate sommabili insieme coi loro quadrati nell'intervallo (a, b):

$$V_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

le quali siano ortogonali e normali rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, tali cioè che si abbia:

$$\int_a^b p(x)\, V_h(x)\, V_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ 1 & \text{se } h = k. \end{cases}$$

Si consideri inoltre una successione infinita di costanti reali:

$$A_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

soggette alla sola condizione, che converga la serie dei loro quadrati:

$$\sum_0^\infty {}_k A_k^2.$$

Poichè la successione:

$$S_n(x) = \sum_0^n {}_k A_k V_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

risulta convergente in media, rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, essendo:

$$\int_a^b p(x) \left[S_n(x) - S_{n+p}(x) \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b p(x) \left[\sum_{n+1}^{n+p} {}_k A_k V_k(x) \right]^2 dx = \sum_{n+1}^{n+p} {}_k A_k^2,$$

può applicarsi alla (3) il precedente teorema, e se ne deduce senz'altro che *la serie*

$$\sum_0^\infty {}_k A_k V_k(x)$$

converge uniformemente nell'intervallo (a, b), *se*:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \left(\sum_{n+1}^{n+p} {}_k A_k^2 \right) \cdot \int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p} {}_k A_k V'_k(x) \right]^2 dx \right\} = 0;$$

in particolare se, qualunque siano n *e* p, *risulta*:

$$\int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p} {}_k A_k V'_k(x) \right]^2 dx \leq C \qquad (C \text{ costante}).$$

3. Vari problemi di fisica matematica si riducono alla determinazione, in un intervallo (a, b), di funzioni:

$$U_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

soddisfacenti ad equazioni della forma:

$$U''_k(x) + [\lambda_k q(x) - r(x)]\, u_k(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

ed a condizioni ai limiti, espresse da relazioni del tipo:

$$(5)\quad \begin{cases} a_1\,U_k(a) + a_2\,U'_k(a) + a_3\,U_k(b) + a_4\,U'_k(b) = 0 \\ b_1\,U_k(a) + b_2\,U'_k(a) + b_3\,U_k(b) + b_4\,U'_k(b) = 0 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove $q(x)$ ed $r(x)$ sono due funzioni note, continue, di cui la prima è anche maggiore di zero in ogni punto di (a, b); λ_k è un parametro indeterminato, ed

$$a_s\,,\ b_s \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

sono costanti assegnate, per le quali si ha:

$$a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = a_3\,b_4 - a_4\,b_3\,.$$

È noto (¹) che esistono infiniti valori reali del parametro λ_k (*numeri caratteristici*), per ciascuno dei quali l'equazione (4) ammette uno o più integrali, in numero finito, linearmente indipendenti (*funzioni fondamentali*), che soddisfano alle (5), e di cui due qualsivogliano, corrispondenti a numeri caratteristici diversi, sono fra loro ortogonali rispetto alla funzione caratteristica $q(x)$.

Mediante il metodo di ortogonalizzazione si può allora assegnare una successione di numeri caratteristici:

$$\Lambda_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

disposti per moduli non decrescenti, intendendosi ogni numero caratteristico ripetuto tante volte, quante sono le funzioni fondamentali, linearmente indipendenti ad esso relative, ed una corrispondente successione di tali funzioni:

$$(6)\qquad W_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ortogonali e normali rispetto alla stessa funzione caratteristica $q(x)$.

Poichè il sistema delle (6) risulta chiuso (²), il problema della rappresentazione di una funzione $f(x)$, sommabile insieme col suo quadrato in (a, b), mediante la serie:

$$(7)\qquad \sum_0^{\infty}{}_k\, B_k\, W_k(x), \qquad B_k = \int_a^b q(x)\, f(x)\, W_k(x)\, dx\,,$$

si riduce (³) alla ricerca delle condizioni, sotto le quali questa serie con-

(¹) Cfr. W. Stekloff: *Sur certaines questions d'Analyse, qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VIII série, classe physico-mathématique, vol. XXXI, n. 7 (1913)].

(²) Cfr. Stekloff, l. c. (¹), Chap. II, n. 11.

(³) Cfr. C. Severini: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali* [Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, serie V, vol. III, (1910), Memoria XI].

verge ivi quasi dappertutto, fatta cioè al più eccezione per i punti di un insieme di misura nulla. In tale ricerca torna utile, come mi propongo di far vedere in un'altra Nota, il teorema del § 2. Per mezzo di questo teorema si arriva infatti a dimostrare che *la* (7) *converge uniformemente nell'intervallo* (a, b), se:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k^2\right)\cdot\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k B_k^2\right)\right]=0;$$

in particolare se risulta, qualunque sia n:

$$\left|\sum_{1}^{n}{}_k A_k B_k^2\right| \leq C \qquad (\text{C costante}).$$

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota III di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio-tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_M = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = (1 + C \times M - P)^2\, ds_P^2 + d\overline{y}_1^2 + d\overline{y}_2^2 + d\overline{y}_3^2 .$$

Per evitare la comparsa di immaginarii e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_P = vt\,;\ \overline{y}_1 = ix\,;\ \overline{y}_2 = iy\,;\ \overline{y}_3 = iz\,,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

dove

$$a = v^2(1 + C \times M - P)^2 . \tag{10}$$

Da ora in avanti, con gli ordinarî simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z. Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purchè per C si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con $M - P$ il vettore di componenti x, y, z. Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).

§ 5. Sia [1] F_{ik} il campo elettromagnetico e $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ il tensore di primo ordine « potenziale » di F_{ik}, in modo che sia $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$. Poniamo $\varphi_0 = \varphi$ e chiamiamo u il vettore di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Si avrà intanto:

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \,;\; \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = - \operatorname{rot} u \,,\quad F_{ii} = 0 \,,\quad F_{ik} = - F_{ki},$$

parimenti

$$\left.\begin{matrix} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(- \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial u}{\partial t}\right) , \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = - \operatorname{rot} u \,,\ F^{(ii)} = 0 \,,\ F^{(ik)} = - F^{(ki)}$$

e quindi

$$\frac{1}{4} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{a} \left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\},$$

Sia $d\omega$ l'elemento di ipervolume di V_4. Avremo

$$d\omega = \sqrt{- \| g_{ik} \|}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{a}\, dt\, d\tau$$

dove $d\tau = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di volume dello spazio.

Si ha anche:

$$\Sigma\, \varphi_i\, dx_i = \varphi\, dt + u dM \qquad dM = (dx\,, dy\,, dz)\,.$$

Prescindendo dall'azione del campo metrico, la cui variazione è nulla perchè lo riguardiamo come dato *a priori* dalla (9), l'azione prenderà la seguente forma:

$$W = \frac{1}{4} \int_\omega \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)}\, d\omega + \int_e de \int \sum_i \varphi_i\, dx_i + \int_m dm \int ds$$

$$\begin{pmatrix} de = \text{elemento di carica elettrica} \\ dm = \text{elemento di massa} \end{pmatrix}.$$

Introducendo le notazioni indicate, si trova

$$(11) \qquad W = \frac{1}{2} \iint \left\{ \operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \sqrt{a}\, dt\, d\tau +$$
$$+ \iint \left(\varphi + u \times V_L \right) \varrho\, d\tau\, dt + \iint \sqrt{a - V_M^2}\, k\, d\tau\, dt,$$

dove ϱ, k sono rispettiv. le densità di elettricità e di materia, per modo che $de = \varrho\, d\tau$, $dm = k\, d\tau$, V_L è la velocità delle cariche elettriche, V_M quella delle masse.

Gli integrali del secondo membro possono estendersi ad un campo arbitrario τ tra due tempi qualunque $t_1\, t_2$. Si ha poi il vincolo che sul contorno del campo τ, e per i due tempi $t_1\ t_2$, siano nulle tutte le variazioni.

[1] Per le notazioni e per la deduzione Hamiltoniana delle leggi della fisica, vedi Weyl., op. cit., pp. 186 e 208.

All'infuori di queste condizioni, le variazioni di φ e di u sono completamente arbitrarie. Per contro, alle variazioni di x, y, z, considerate come coordinate di un elemento di carica o di massa, possono essere imposte ulteriori condizioni, traducenti i vincoli del particolare problema che si sta studiando. Scrivendo intanto che è nullo dw per una variazione qualunque $\delta\varphi$ di φ, si trova

$$0 = -\iint \left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \times \delta \operatorname{grad}\varphi \frac{dt\, d\tau}{\sqrt{a}} + \iint \delta\varphi\, \varrho\, dt\, d\tau.$$

trasformando il primo integrale con opportuna applicazione del teorema di Gauss, e tenendo presente che $\delta\varphi$ si annulla sul contorno, troviamo

$$0 = \iint \delta\varphi \left\{ \varrho + \operatorname{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} dt\, d\tau$$

e, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario, abbiamo intanto l'equazione

$$\varrho + \operatorname{div}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} = 0. \tag{12}$$

In modo analogo, facendo variare u, si trova

$$\varrho\, V_L + \operatorname{rot}(\sqrt{a}\operatorname{rot} u) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

Queste due ultime equazioni permettono di determinare il campo elettro-magnetico, una volta assegnate le cariche ed il loro movimento.

Un altro gruppo di equazioni si può ottenere facendo variare in W le traiettorie delle cariche e delle masse. Siano δP_M la variazione della traiettoria delle masse, δP_L quella delle cariche. Indichiamo inoltre, essendo u un vettore funzione di punto e V un vettore, con $\frac{\partial u}{\partial P}(V)$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} V_z$ ed analoghe. Scrivendo che è nulla la variazione di W, si trova allora, coi soliti artifici:

$$\iint \left(\delta P_L \times \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right) + V_L \times \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right) \varrho\, dt\, d\tau + \\ + \iint \delta P_M \times \left\{\frac{dt}{ds}\frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds} V_M\right)\right\} k\, dt\, d\tau = 0. \tag{14}$$

Se i δP ad un tempo non dipendono da i loro valori, per altri tempi dovrà essere nullo in (14) il coefficiente di dt. Si trova così:

$$\int \left\{ \delta P_L \times \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right] + V_L \times \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right\} \varrho\, d\tau + \\ + \int \delta P_M \times \left\{\frac{1}{2}\frac{dt}{ds}\operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds} V_M\right)\right\} k\, d\tau \tag{15}$$

che deve essere verificata per tutti i sistemi di δP soddisfacenti ai vincoli.

Fisica terrestre. — *I pseudo-terremoti nel Vulcano Laziale.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio V. Cerulli.

Alle cause di disturbo del R. Osservatorio Geodinamico di Rocca di Papa, accennate in una mia Nota precedente (1), devo aggiungerne un'altra non meno importante e, cioè, la natura del terreno. È ben noto essere un vulcano costituito di strati inclinati di ceneri, lapilli, bombe e di colate di lava e di fango che si sovrappongono con alternazione e spesso risultano spezzate, scompaginate e rimaneggiate in seguito a franamenti od a formazioni di crateri secondari. Inoltre, gli strati friabili di cenere e lapillo possono racchiudere massi anche enormi di lava, lanciati attraverso la gola del vulcano dalla forza espansiva dei gas e del vapor acqueo. Da ciò si comprende come la sovrapposizione d'un materiale così eterogeneo, e talora caotico con varie inclinazioni, costituisca un insieme di problematica stabilità, insidiata più facilmente dalla degradazione meteorica e dalla circolazione delle acque sotterranee.

All'Osservatorio di Rocca di Papa, che sorge appunto sul labbro craterico dello spento Vulcano Laziale, si risentono spesso le conseguenze dell'instabilità del suolo sotto forma di piccoli scuotimenti che ci lasciano perplessi sulla loro origine e sulla vera posizione del loro epicentro. Così, in occasione di lievissime perturbazioni ivi registrate il 25 e 29 aprile 1897, l'assistente di quel tempo, dott. A. Cancani, faceva rilevare che le medesime stavano in relazione con minime scosse sentite da qualcuno nel sottostante paese, e tuttavia non indicate dai più sensibili sismoscopi; e che anzi si doveva ritenere che passassero inosservate agli strumenti alcune scossette, avvertite in varî punti del paese, o per insufficienza degli apparati allora posseduti, o perchè gli ammassi poco coerenti di lapillo, che separano i grandi blocchi di lava basaltina, spegnevano le vibrazioni del suolo. Aggiungeva essere cosa evidentissima che l'origine di tutte queste scosse, eminentemente localizzate e superficiali, dovesse risiedere nell'assestarsi di quando in quando dei massi isolati di lava che si trovavano in una posizione d'equilibrio instabile.

I dannosi effetti di questa causa disturbatrice si sono naturalmente accresciuti dopo che, a partire dal 1900, ho cercato di porre in azione strumenti sempre più delicati, in grazia de' quali non s'è dato più il caso che

(1) *I terremoti mondiali del 1916 e l'Osservatorio di Rocca di Papa* (Rend. della R. Acc. dei Lincei; seduta del 6 marzo 1921).

gli abitanti di Rocca di Papa abbiano percepite minime scosse, senza che venissero registrate in quell'Osservatorio. Numerose sono le perturbazioni lievissime e brevissime indicate dai più sensibili strumenti, talora coincidenti con vere scosse, segnalate lievemente nei vicini paesi e delle quali si ha generalmente notizia nei giornali quotidiani di Roma, talvolta in corrispondenza di frane palesi più o meno vicine, più spesso dovute ad altre frane subaeree, ma rimaste sconosciute. oppure a piccoli cedimenti superficiali del terreno o assestamenti di strati sotterranei, senza che ne apparisca traccia alcuna all'esterno. Ecco alcune delle frane più notevoli:

Il 7 dicembre 1901 sprofondò uno strato di lapilli, sovrastante ad una grotta in esso scavata; ed il materiale di c. 100 m³., caduto da un'altezza di 6-7 m., scosse sensibilmente il suolo per un raggio di c. 100 m. e perturbò varî strumenti all'Osservatorio, distante un 200 m. — Il 21 marzo 1909 una ragguardevole frana cadde sulla strada provinciale presso Marino a quasi 4 km. dall'Osservatorio di Rocca di Papa, i cui strumenti provarono una sensibile perturbazione che lì per lì sembrò dovuta ad un vero terremoto, sebbene non si trattasse che di c. 1000 m³. di materiale vulcanico caduto da un'altezza di soli 10 m.! — Sopra un'altra frana ben più modesta, avvenuta nei pressi dell'Osservatorio un paio di anni dopo. mi dilungo alquanto perchè spiega quella che si è manifestata nello stesso punto pochi giorni or sono e che ha messo tanto a rumore i giornali della Capitale.

Quando fu fondato l'Osservatorio sopra una rupe quasi a picco e poco sotto la distrutta Fortezza medioyale che domina Rocca di Papa, venne costruito un muraglione a sostegno della nuova via che facilitava l'accesso all'Osservatorio, costeggiando una piccola colata di lava. Quest'ultima, che si trova sovrapposta ad uno strato di lapilli a rapido pendìo, s'è spezzata in molti blocchi, l'uno addossato all'altro, sia per lo stiramento causato dal forte declivio, sia per il conseguente raffreddamento. Lo strato di lapilli sottostante è andato col tempo sfaldandosi per la continua degradazione meteorica fino al punto che uno dei blocchi di c. 2-3 m³., scalzato alla sua base e in strapiombo, cadde il 26 settembre 1911 da un'altezza di 4-5 m. e poi ruzzolò in mezzo alla via, perturbando sensibilmente gli strumenti dell'Osservatorio a circa 50 m. di distanza in senso orizzontale e 30 m. in senso verticale. Poco più in su, la resistenza di questo stesso strato di lapilli è stata compromessa dall'escavazione nel medesimo di tre ampie grotte, a pochi metri di distanza l'una dall'altra; e già nel passato autunno s'era reso ben visibile un lieve distacco tra due dei sovraincombenti massi di lava, quando crebbe in modo sensibile la mattina del 27 del passato mese, evidentemente in seguito ad una nuova posizione di riposo assunta dagli stessi. Conseguenza di questa brusca inclinazione dei blocchi fu la caduta, da un'altezza di c. 4 m., di un pezzo di roccia di c. 1 m³., la quale produsse una lievissima perturbazione nei più delicati strumenti dell'Osservatorio. Non si trattava affatto d'immediato

pericolo, e se per precauzione, il Comune avesse fatto subito puntellare qualche masso maggiormente pendente, avrebbe evitato un allarme affatto ingiustificato che originò un lungo esageratissimo articolo, e oltracciò pieno d'inesattezze, d'un giornale romano dal titolo impressionante *Il paese di Rocca di Papa sotto la spaventosa minaccia di una enorme frana.*

Del resto, data la topografia del paese, ben altri franamenti potrebbero verificarsi in varî punti, e non sarebbe neppure da escludersi la possibilità che in seguito a scorrimento di strati, specialmente in occasione di qualche violento terremoto, la stessa cima della collina a ripidissimo pendìo, sulla quale si aderge l'Osservatorio, precipitasse sul sottostante paese. Simili catastrofi sono tutt'altro che rare, e numerosi villaggi, arrampicati su scoscesi e franosi fianchi di monti, o accoccolati sul cucuzzolo di friabili collinette, corrose alla base da inesorabili torrenti, si trovano pur troppo sotto la continua e spaventosa minaccia d'essere distrutti [1]. Ma chi si preoccupa di tali possibilità? Per sua natura l'uomo è un grande ottimista il quale conta sopra un largo margine della Provvidenza, e tira innanzi di generazione in generazione, attraverso calamità d'ogni genere e più o meno gravi, quasi sempre causate dalla sua imprudenza e imprevidenza.

Tornando all'Osservatorio, concludo che per il progresso della sismometria, essendo indispensabile poter disporre di apparati estremamente delicati, non è certo raccomandabile che i medesimi seguitino ad essere installati sopra un suolo tanto instabile; e questa è dunque un'altra ragione che consiglia il trasferimento dell'Osservatorio di Rocca di Papa in una località più opportuna.

Fisica terrestre. — *Risultati di misure attinometriche eseguite a Catania.* Nota I del Prof. GIOVANNI TROVATO, presentata dal Corrispondente BEMPORAD.

Il Prof. A. Bemporad, studiando l'assorbimento della radiazione calorifica solare nell'atmosfera terrestre, e discutendo, sia le proprie osservazioni eseguite nel 1904 negli osservatori di Catania e dell'Etna [2], sia quelle eseguite nel 1896 dar Prof. K. Angström a varie altitudini nell'isola di Te-

[1] Tra i più recenti disastri di simil genere, mi piace ricordare la gigantesca frana che il 13 aprile 1909 distrusse *Alvi*, piccola frazione di Crognaleto (Teramo). Una vasta zona di terreno di un paio di chilometri di lunghezza per un mezzo chilometro di larghezza, per effetto d'infiltrazione delle acque, slittò, per fortuna lentamente, sulla sottostante roccia dura verso un profondo burone, abbattendo e travolgendo il paese, trasformato in un ammasso di nere rovine.

[2] A. Bemporad e Mendola: *L'assorbimento selettivo delle radiazioni calorifiche dedotte dalle osservazioni eseguite negli Osservatori di Catania e dell'Etna nel settembre del 1904.* Mem. Soc. Spett. ital., Vol. XXXVI.

neriffa (1), sia ancora quelle dei Proff. Giovanni Platania e C. Bellia, eseguite nel 1908 sull'Etna (2), pervenne alla conclusione che *il coefficiente di assorbimento cresce progressivamente coll'innalzarsi del sole sull'orizzonte.* Questo risultato, come è noto, è in perfetto accordo colla teoria dell'assorbimento selettivo.

Avendo creduto non privo d'interesse l'estendere queste ricerche nelle regioni basse dell'atmosfera e per una piccola differenza di livello, nell'agosto del 1919 ho eseguito una serie di misure attinometriche, in giorni consecutivi, fra la Plaia di Catania (quasi al livello del mare) ed il R. Osservatorio Astrofisico con una differenza di livello di 62 metri circa. Ho adoperato un attinometro di Arago (coppia di termometri di cui uno a bulbo affumicato). Fra il 10 ed il 31 agosto si ottennero 15 giorni di osservazioni in condizioni favorevoli, di cui nove alla Plaia e sei all'Osservatorio, convenientemente alternati.

Le letture all'attinometro si facevano ogni mezz'ora, dalle ore 10 alle ore 16 (tempo medio), e quelle allo psicrometro tre volte al giorno: ore 11, 13, 15. I valori della intensità della radiazione solare q, osservati nelle diverse ore del giorno, sono proporzionali alla differenza di temperatura dei termometri dell'attinometro. Ho inoltre calcolato per ogni serie di osservazioni i coefficienti a, b, n, della formula di ragguaglio, proposta dal Professor A. Bemporad (3):

$$\log q = a - b\varepsilon^n$$

ove ε è lo strato atmosferico attraversato dai raggi. Confrontando tutti i valori di q osservati, ed i rispettivi valori di q calcolati per ogni giorno di osservazione, si può concludere quanto appresso:

1) *Il massimo valore della intensità della radiazione solare nei varii giorni di osservazione, non corrisponde, generalmente, alla massima altezza del sole, cioè al minimo valore dello strato atmosferico ε attraversato dai raggi, ma anticipa di circa un'ora alla Plaia, e ritarda di altrettanto all'Osservatorio.*

2) *I valori della intensità della radiazione solare, trovati alla Plaia, sono sempre più bassi di quelli trovati all'Osservatorio.*

(1) A Bemporad: *L'assorbimento selettivo della radiazione solare nell'atmosfera terrestre.* Mem. Acc. Lincei, serie V, vol. 7, 1908.

(2) A. Bemporad: *Sull'assorbimento subìto dalla radiazione solare negli strati atmosferici a varie altezze sull'Etna.* Mem. Soc. Spett. ital., 1909.

(3) A. Bemporad: *Saggio di una formula empirica per rappresentare il modo di variare della radiazione solare col variare dello spessore atmosferico attraversato dai raggi.* Rend. Acc. Lincei, Serie V, vol. XVI, 1907.

Riporto qui i dati relativi ai giorni 21, 23 e 25 agosto.

21 Agosto — PLAIA.

MATTINO

Ora	z apparen.	ε	q osserv.	q calcolato	Δq oss.-cal.
10	36°,24	1,239	11,75		
10,30	31,76	1,175	11,86		
11	28,17	1,134	11,95		
11,30	25.81	1,110	11,80		

CONDIZIONI METEORICHE

	11^h	13^h	15^h
Termom. asciutto	25.4	25,8	26,6
Termom. bagnato	21,6	22.0	20,6
Tensione del vapore	16,85	17,32	14,37
Umidità relativa	70	70	55
Intensità del vento	leggeris.	leggero	leggero

POMERIGGIO

Ora	z apparen.	ε	q osserv.	q calcolato	Δq oss.-calc.
12	25,13	1,104	11,71	11,56	+ 0,15
12,30	26,18	1,104	11,60	11,51	+ 0,09
13	28,83	1,141	11,38*	11,38	0
13,30	32.65	1,187	11,09	11,16	— 0,07
14	37,27	1,255	10,84	10,87	— 0,03
14,30	42.44	1,353	10,45*	10.45	0
15	47,95	1,491	9,90*	9,90	0
15,30	53,69	1,686	9,31	9,18	+ 0,13
16	59,56	1,968	8,35	8,27	+ 0,08

$\log q = 1,3095 - 0,2280\, \varepsilon^{0,8}$

23 Agosto — OSSERVATORIO.

MATTINO

Ora	z apparen.	ε	q osserv.	q calcolato	Δq oss.-calc.
10	36°,81	1,248	12,85		
10,30	32.36	1,183	13,12		
11	28,81	1,141	13,43		
11,30	26,49	1,117	13,78		

CONDIZIONI METEORICHE

	11^h	13^h	15^h
Termom. asciutto	30,1	29,0	30,2
Termom. bagnato	19,6	21,6	22,0
Tensità del vapore	10,53	14,63	14,61
Umidità relativa	33	49	46
Intensità del vento	leggeris.	leggeris.	leggeris.

Giornata caldissima ed afosa quasi senza vento

POMERIGGIO

Ora	z apparen.	ε	q osservato	q calcolato	Δq oss.-calc.
12	25,80	1,110	13,98		
12,30	26,81	1,120	14,25		
13	29,39	1,147	14,45		
13,30	33,15	1,193	14,76*	14,76	0
14	37,71	1,262	14,45	14,50	— 0,05
14,30	42,83	1,362	14,15*	14,15	0
15	48,31	1,501	13,60	13,69	— 0,09
15,30	50,02	1,699	12,90	13,03	— 0.13
16	59,88	1,988	12,15*	12.15	0

$\log q = 1.3137 = 0,1234\, \varepsilon^{0,9}$

25 Agosto — PLAIA.

MATTINO

Ora	z apparen.	ε	q osserv.	q calcolato	Δq oss.-calc.
10	37°,41	1,257	10,82*	10,82	0
10,30	33,01	1,191	11,19	11,25	— 0,06
11	29,48	1,148	11,57*	11,57	0
11,30	27,19	1,124	11,62	11,73	— 0,11
12	26,47	1,117	11,79*	11,79	0

$\log q = 1,3696 - 0,2670\, \varepsilon$

CONDIZIONI METEORICHE

	11ʰ	13ʰ	15ʰ
Termom. asciutto	27,0	27,0	27,3
Termom. bagnato	21,6	22.5	23,4
Tensione del vapore	15,86	17,49	19,0
Umidità relativa	60	66	70
Intensità del vento	leggero	leggero	leggero

POMERIGGIO

Ora	z apparen.	ε	q osserv.	q calcolato	Δq oss.-calc.
12,30	27,44	1,126	11,96	11,97	— 0,01
13	29,94	1,153	11,85*	11 85	0
13,30	33,64	1,200	11,65	11,67	— 0,02
14	38,14	1,269	11,40*	11,40	0
14,30	43,22	1,371	11,00	10,98	+ 0,02
15	48,67	1,512	10,51	10,41	+ 0,10
15,30	54,34	1,712	9,46	9,57	— 0,11
16	60,20	2,007	8,35*	8.35	0

$\log q = 1,1711 - 0,0762\, \varepsilon^{1,7}$

Chimica. — *L'analisi termica del sistema* $Tl_2O-B_2O_3$ (1).

Nota di G. CANNERI e R. MORELLI, presentata dal Corrispondente G. PELLIZZARI.

Lo studio dei borati del tallio fu intrapreso per la prima volta da H. Buctala [I. Pr. 88, 771 (1913)] il quale preparò una serie numerosa di poliborati tallosi (non pare possibile l'esistenza di composti stabili tra acido borico e l'ossido tallico), per cristallizzazione di soluzioni contenenti carbonato talloso e acido borico in rapporti variabili. Talvolta, facendo avvenire la reazione per via ignea e cristallizzando frazionatamente il prodotto della fusione, l'autore pervenne a stabilire che il composto più ricco rispetto all'ossido metallico ottenibile in soluzione è il tetraborato talloso dalla formola: $Tl_2B_4O_7$.

Solo modificando le condizioni di esperienza avremmo potuto estendere lo studio ad un campo più vasto di concentrazioni tra acido borico e ossido talloso. Per questo abbiamo eseguito l'analisi termica del sistema.

L'anidride borica che ci servì alla ricerca fu mantenuta fusa per lungo tempo a circa 1300° fino a che la schiuma era completamente allontanata,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica inorganica e chimica fisica del R. Istituto di studî superiori. Firenze, ottobre 1921.

poi versata su lastra metallica, rapidamente spezzata e posta in essiccatore. Assieme a questa veniva fuso non l'ossido, ma il carbonato talloso e ciò per la difficoltà di ottenere il Tl_2O esente da Tl_2O_3. Il carbonato fu ottenuto purissimo per doppio scambio tra $BaCO_3$ e Tl_2SO_4.

Abbiamo adoperato in tutte le esperienze pesi uguali di miscugli e le concentrazioni sono state variate tenendo costante un equivalente di anidride borica e aumentando gradatamente la quantità in equivalenti di ossido talloso. Le miscele polverizzate finemente e intimamente mescolate erano fuse in crogiuolo di platino in un forno elettrico a resistenza di nichel. Il raffreddamento, sempre molto lentamente, si faceva compiere entro lo stesso forno dopo avere mantenuta la massa fusa per un certo tempo a temperatura superiore a quella di fusione.

Per la misura delle temperature ci siamo serviti di una coppia termoelettrica Pt — Pt + Rh la cui saldatura era immersa nel bagno fuso senza alcun rivestimento. I due fili del termoelemento erano tenuti separati tra loro da un tubo sottile di terra refrattaria e le loro estremità erano congiunte per mezzo di serrafili, mantenuti alla temperatura del ghiaccio fondente, con grossi fili di rame uniti ad un millivoltmetro Weston tarato.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella seguente:

Conc. in equiv. di Tl_2O per 1 equiv. di B_2O_3	Temperatura di inizio della cristallizzazione	Durata in secondi della cristallizzazione	Temperature eutettiche	Durata d'arresto in secondi della separazione eutettica.
0.05	—	—	—	—
0.25	—	—	—	—
0.27	446°	240	—	—
0.30	466	270	—	—
0.33	472	420	—	—
0.45	448	210	410°	90
0.50	440	180	410	180
0.55	426	120	410	240
0.60	—	—	410	300
0.62	430	210	410	240
0.666	434	270	—	—
0.70	434	180	—	—
0.80	420	120	358	—
0.85	414	90	358	90
0.90	400	90	358	120
0.95	388	60	358	180
0.98	—	—	358	270
1.00	370	360	—	—
1.10	350	300	—	—

Fino alla concentrazione di 0.27 equiv. di Tl_2O per 1 equiv. di B_2O_3, non fu possibile apprezzare alcuna evoluzione termica durante il raffreddamento, dato l'enorme attrito interno della massa fusa. Solo da questa concentrazione, con un raffreddamento molto più lento, si poterono osservare le deviazioni della curva con forte sopraraffreddamento. Questo fenomeno arrivò spesso a raggiungere il valore di 80°, ma l'inconveniente fu quasi sempre eliminato fondendo di nuovo incompletamente la massa e ripetendo la curva di raffreddamento.

Il diagramma, fig. 1, presenta tre punti di maximum corrispondenti a tre composti definiti. Sull'asse delle ordinate sono riportate le temperature

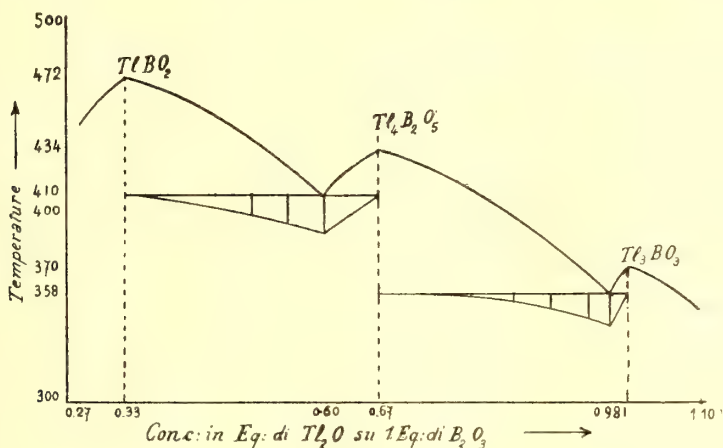



Fig. 1.

sull'asse delle ascisse le concentrazioni in ossido talloso per 1 equiv. di anidride borica. I tempi di fermata eutettica sono riportati sull'orizzontale eutettica con segmenti proporzionali alle durate di arresto.

Il punto di massimo alla concentrazione di 0.33 equiv. di Tl_2O rappresenta la composizione del metaborato talloso il cui punto di fusione corrisponde a 474° circa.

Alla concentrazione di 0.67 equiv. compare un secondo punto di massimo corrispondente alla composizione del piroborato talloso il cui punto di fusione si aggira intorno a 434°.

Infine un terzo punto di massimo si nota nel diagramma alla concentrazione del borato normale e in corrispondenza della temperatura di 370°. Data la piccola differenza di concentrazione e di temperatura tra la separazione eutettica e il massimo corrispondente al Tl_3BO_3, si può anche essere indotti a ritenere che alla concentrazione unitaria corrisponda un punto di transizione. In tal caso si dovrebbe ammettere che il borato normale fonda decomponendosi.

Cristallografia. — *Sulle proprietà ottiche di alcune sostanze importanti nella microchimica* [1]. Nota del dott. Luigi Raiteri, presentata dal Corrispondente F. Zambonini.

I metodi dell'analisi microchimica qualitativa, escogitati ed usati dapprima dai mineralisti, si vanno sempre più diffondendo, essendosi ormai da tutti riconosciuta la loro grande importanza pratica. Con quei metodi, infatti, qualora sieno esattamente impiegati, è possibile riconoscere con sicurezza la presenza di quantità minime dei più svariati elementi, cosa particolarmente utile, quando si dispone solo di poca sostanza da cimentare.

Perchè i risultati dell'analisi microchimica sieno sicuri, occorre, però, accertarsi della vera natura dei cristallini formatisi mediante il controllo delle loro proprietà ottiche. Fra queste, presentano una grande importanza gli indici di rifrazione, che si possono determinare al microscopio con sufficiente esattezza, mediante il metodo della linea di Becke. Un esempio basterà a mostrare la necessità di non trascurare questa determinazione.

È ben noto che la presenza del sodio nei silicati naturali si stabilisce soprattutto mediante la formazione dei cristallini esagonali di fluosilicato sodico, mentre il potassio dà, nelle stesse condizioni, dei cristalli cubici di fluosilicato potassico. Ma, come ha mostrato Gossner [2], questo composto possiede anche una fase esagonale, uniassica negativa come il composto di sodio, sicchè dalla formazione dei cristallini esagonali non si è autorizzati a concludere con certezza intorno alla presenza del sodio: si potrà esserne sicuri, soltanto dopo aver stabilito che gli indici di rifrazione dei cristalli ottenuti sono uguali a quelli del fluosilicato sodico.

Ora, per molti composti assai importanti nella microchimica, gli indici di rifrazione, o non sono conosciuti affatto o lo sono in modo imperfetto [3]. Si tratta di un'ampia lacuna nelle nostre cognizioni: io, per consiglio del

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal Prof. Ferruccio Zambonini.

[2] Gossner, Zeitschrift. für Krystall. 1904, XXXVIII, 147.

[3] Nell'ultima edizione della *Mikrochemische Analyse* di Behrens-Kley (1920) non sono indicati mai i valori numerici degli indici di rifrazione, ma sono usati, al contrario, i termini piuttosto vaghi di rifrangenza debole, forte, ecc.

prof. Zambonini, che vivamente ringrazio per l'interesse preso alle mie ricerche, ho cercato di contribuire a colmarla in piccola parte, determinando l'indice o gli indici di rifrazione di quattro sostanze assai usate in microchimica, quali: il *fluosilicato di sodio*, il *fluosilicato di potassio*, l'*uranilacetato di sodio* ed il *cloroplatinato di potassio* (1).

L'indice o gli indici di rifrazione furono determinati col metodo del prisma, salvo che per il fluosilicato di potassio per il quale mi servii, invece, del metodo della linea di Becke.

I. Uranilacetato di sodio. $Na(UO_2)(CH_3 . COO)_3$. — I cristallini di questo sale si usano, come è noto, nella ricerca microchimica del sodio e dell'uranio.

Io ho preparato nitidi cristallini, che raggiungevano anche 3,5 mm. nella loro maggiore dimensione. Generalmente presentavano la combinazione dei due tetraedri $\{111\}$ e $\{1\bar{1}1\}$, qualche volta con alcune piccole faccette di $\{110\}$.

Ho determinato l'indice di rifrazione per le luci del litio, del sodio e del tallio, ottenendo i risultati seguenti:

Sorgente di luce monocromatia	Lunghezza di onda in micron	Angolo del prisma	Angolo di deviazione minima	Indici di rifrazione
Verde del tallio (Tl_2SO_4)	535	70° 27′ 30″	50° 27′	1,5082
Gialla del sodio (Na Br)	589	idem	49° 57′ 30″	1,5044
Rossa del litio (Li_2CO_3)	671	idem	49° 24′ 30″	1,5003

Johnsen (2) aveva trovato $n_{Na} = 1.5014$. H. Rose (3), più tardi, fece conoscere n per otto diverse lunghezze d'onda, tra le quali non vi erano,

(1) I cristallini macroscopici dei quattro sali li ho preparati con un metodo semplicissimo in uso nell'Istituto Mineralogico di Torino, e che costituisce una semplificazione di quello adoperato nel laboratorio del Prof. von Groth.

Fatti sciogliere pochi grammi del composto da cristallizzare a 100°, ho filtrato ben bene. Il liquido filtrato l'ho riportato a 100° e quindi rapidamente ho collocato il recipiente contenente la soluzione filtrata, in una cassa di cottura all'uopo preparata. La cassetta, rivestita internamente di uno spesso strato di sughero, l'ho riempita per i $^4/_5$ circa di segatura di legno ben asciutta; nel mezzo vi ho praticato un foro che potesse esattamente contenere il recipiente della soluzione. Coperto ben bene il recipiente con lana e carta fino alla imboccatura, ho chiuso l'apertura della cassa con l'apposito coperchio, pure rivestito con abbondante strato di sughero, forzando con pesi. Il lento e tranquillo raffreddamento favorisce la formazione di cristalli macroscopici nitidi, che si depositano sul fondo del recipiente.

(2) A. Johnsen. Neues Jahrb. f. Min. usw. 1907, Beil. Bd. XXIII, 259.

(3) H. Rose. Neues Jahrb. Beil-Bd. XXIX, 63-65.

però, quelle del Li, Na, Tl. Graficamente, dai valori di Rose si deduce $n_{Na} = 1,5044$, un valore, cioè, identico a quello trovato da me e che differisce di ben tre unità della terza decimale dal valore di Johnsen. Anche le mie determinazioni per Li, Tl, trovano esattamente il loro posto nella serie di misure di Rose, che viene, così, confermata e completata.

II. Fluosilicato di sodio. $Na_2 Si F_6$. — Questo composto è assai importante, servendo nella ricerca microchimica del sodio, del silicio e del fluoro.

I cristallini macroscopici da me ottenuti, nitidissimi, limpidi ed incolori [1], vivamente splendenti, presentano i due prismi $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, la base e la bipiramide $\{10\bar{1}1\}$. Sono queste le stesse forme che aveva già osservato Marignac [2].

Con un minutissimo ritaglio di carta bibula imbevuta di una goccetta d'una soluzione satura di fluosilicato di sodio, ho umettato una faccetta di prisma posta sotto il microscopio a debole ingrandimento, ed ho, così, ottenuto delle nitide figure di corrosione, costituite da esagoni con due lati paralleli all'asse verticale assai sviluppati e gli altri quattro lati, equiinclinati sui primi, riunentesi due a due in vertici rivolti verso i due estremi del prisma. Le figure di corrosione mi farebbero porre i cristallini nella classe diesagonale bipiramidale.

Cesàro [3], mediante il metodo, certamente poco esatto, del Duca di Chaulnes, ottenne $\varepsilon = 1,296$ $\omega = 1,300$. Nel migliore cristallo da me studiato ho ottenuto

Sorgente di luce monocromatica	Lunghezza d'onda in micron	Angolo del prisma	Per il raggio ε		Per il raggio ω	
			Angolo di deviazione minima	Indici	Angolo di deviazione minima	Indici
Col filtro Wratten α	677	60° 29′ 30″	21° 54′ 30″	1,3077	22° 10′ 45″	1,3112
" " " β	649	idem	21° 56′ 30″	1,3081	22° 12′ 45″	1,3117
" " " γ	606	idem	21° 59′	1,3087	22° 15′ 30″	1,3122
Con la luce del sodio	589	idem	22° 0′ 15″	1,3089	22° 16′ 30″	1,3125
Col filtro Wratten δ	577	idem	22° 1′	1,3091	22° 17′ 30″	1,3127
" " " ε	535	idem	22° 3′	1,3097	22° 19′ 45″	1,3132
" " " η	501	idem	22° 6′ 30″	1,3103	22° 23′	1,3138
" " " θ	458	idem	22° 10′	1,3111	22° 26′ 30″	1,3146

[1] Nella *Mikrochemische Analyse* di Behrens-Kley (1920, pag. 34) è asserito che molto caratteristica per il fluosilicato sodico è una debole colorazione rosa, visibile in tutti i cristalli un po' spessi. I miei cristalli macroscopici, che erano assai puri, non la presentavano affatto, ed apparivano incolori.

[2] Marignac. Annales des Mines, 1857 (5), XII, 20, Oeuvres I, 496.

[3] Cèsaro. Bull. Acad. R. Belg. 1893 (3) XXVI, 721.

Determinazioni per la luce del sodio in altri tre cristallini.

Sorgente di luce monocromatica	Lunghezza d'onda in m cron	Angolo del prisma	Per il raggio ε		Per il raggio ω	
			Angolo di deviazione minima	Indici	Angolo di deviazione minima	Indici
Luce del sodio	589	59°58′	21°41′30″	1,3089	22° 0′45″	1,3124
idem	,,	59°45′30″	21°38′	1,3088	21°54′30″	1,3125
idem	,,	60°22′	21°56′	1,3089	22°12′30″	1,3125

III. Fluosilicato di potassio. $K_2 Si F_6$. — La ricerca microchimica del potassio, specie nei silicati costituenti le rocce eruttive, può essere fatta con vantaggio mediante il processo Bořicky, che è fondato sull'impiego dell'acido fluosilicico. Si originano in tal modo i cristallini di fluosilicato di potassio, ordinariamente nella modificazione cubica, raramente nella modificazione esagonale sotto forma di sottili lamine secondo {0001} con {10$\bar{1}$1}.

Probabilmente per la pochissima solubilità di questo sale (0,12 parti di sale su 100 parti di acqua a 17°,5 e una parte su 100 a 100°), non mi fu possibile ottenerne cristallini nitidi, macrospici.

Con l'aiuto del microscopio a debole ingrandimento ho potuto osservare nei miei cristallini il cubo {110} come forma predominante, combinata con l'ottaedro {111} e col rombododecaedro {110}, e anche l'ottaedro {111} predominante, combinato col cubo {100} e col rombododecaedro {110}.

Ho determinato l'indice di rifrazione col metodo della linea di Becke, adoperando diverse miscele formate da alcool metilico, alcool etilico e soluzione acquosa satura di fluosilicato di potassio.

Ho ottenuto $n = 1,339$.

IV. Cloroplatinato di potassio. $K_2 Pt Cl_6$. — Nella ricerca microchimica del potassio si ottengono i caratteristici cristallini di questo sale. Nei cristalli da me preparati, ho osservato soltanto l'ottaedro {111}; spesso due faccie parallele sono molto più sviluppate delle altre. In questo caso i cristallini poggiano su una di quelle facce, che è piana, mentre la parallela, libera, è affetta da poliedria abbastanza spiccata. Altri cristalli sono sviluppati in modo da simulare la combinazione di due prismi rombici {h0l} {0kl}, uno dei quali è più esteso dell'altro.

L'indice di rifrazione di questo sale è superiore a quello dello ioduro di metilene, sicchè non può adoperarsi un prisma formato da due faccie di ottaedro ad angolo (vero) di 70°32′, a meno di ricorrere ad una serie di riflessioni interne, come fece il Sella nel suo lavoro sull'influenza della temperatura sull'indice di rifrazione del diamante. Io ho preferito tagliare in

due cristalli delle faccette adatte, mediante l'apparecchio di Wülfing. I valori ottenuti, con i prismi da me preparati, sono i seguenti:

Sorgente di luce monocromatica	Lunghezza d'onda in micron	Primo cristallino studiato			Secondo cristallino studiato			Indici definit. (medie)
		Angolo del prisma	Angolo di deviazione minima	Indici	Angolo del prisma	Angolo di deviazione minima	Indici	
Col filtro Wratten α	677	25° 5′	21° 13′	1,8104	28° 11′	24° 7′	1,8101	1,8103
" " " β	649	idem	21° 18′ 45″	1,8140	idem	24° 13′ 45″	1,8138	1,8139
" " " γ	606	idem	21° 30′ 15″	1,8211	idem	24° 28′ 30″	1,8206	1,8209
" " " δ	577	idem	21° 40′	1,8270	idem	24° 38′	1,8268	1,8269
" " " ε	535	idem	21° 53′ 30″	1,8354	idem	24° 53′ 30″	1,8351	1,8353
" " " η	501	idem	22° 8′	1,8443	idem	25° 10′	1,8440	1,8442
" " " θ	458	idem	22° 28′	1,856	idem	?	?	1,856

Come si vede, si ha accordo assai soddisfacente. La differenza un poco più forte per il vetro γ dipende probabilmente dal fatto che esso non è perfettamente monocromatico.

Mineralogia. — *Ulteriori ricerche sui liquidi pesanti per la separazione dei minerali.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Socio F. Millosevich.

Le ricerche delle quali ho dato ragguaglio in questi Rendiconti [1], mi condussero a proporre, per la tecnica della separazione meccanica dei minerali, tre nuovi liquidi, che sono soluzioni acquose, incolori, diluibili e rigenerabili, cioè:

1) Soluzione di bromomercurato di bario, la quale, raggiungendo il peso specifico di 3,11 a 11° e di 3,14 a 18° C., ha presso a poco lo stesso campo di applicabilità del liquido di Sonstadt-Thoulet, col vantaggio del minor costo.

2) Soluzione satura di formiato di tallio, il cui peso specifico è 3,31 a 10°; 3,40 a 20°; 4,10 a 50°, ecc.

3) Soluzione di formiato di tallio e malonato di tallio, a parti eguali, la quale a 0° ha peso specifico superiore a quello di tutti i liquidi già im-

[1] Clerici E., *Preparazione di liquidi per la separazione dei minerali.* Rendiconti R. Acc. Lincei, XVI, 1907, pag. 187. Vedasi pure: Clerici E., *Sulla analisi isopicnometrica delle roccie.* Nuovi Annali del Ministero per l'Agricoltura, anno I, n. 2 (31 dicembre 1921).

piegati; a 10° è 4,00; 4,70 a 50° e verso 100° raggiunge e sorpassa anche 5. Per cui l'applicabilità dell'analisi isopicnomerica viene notevolmente estesa; infatti con il liquido di Retgers (tetraioduro di stagno in tribromuro d'arsenico), che presentava il maggior peso specifico, si arrivava soltanto a 3,73.

Per pesi specifici maggiori di 3,73 bisognava ricorrere a liquidi di fusione. Le mie ulteriori ricerche riguardano appunto tali liquidi.

I migliori, e forse ormai i soli usati, sono due proposti dal Retgers; cioè: nitrato di argento con nitrato di tallio, fusibile a 75°, peso specifico 4,8; nitrato mercuroso con nitrato di tallio, fusibile a 76°, peso specifico circa 5,2.

Il primo intacca i solfuri e può essere sostituito dal mio liquido al formiato-malonato di tallio, il cui uso è più comodo di quello di un liquido di fusione. Anche il solo formiato di tallio, che fonde a 95° in liquido mobilissimo, può servire allo stesso scopo.

Una miscela a parti uguali di formiato e malonato di tallio, polverizzati, fonde a temperatura molto più bassa, in liquido limpido ed incoloro di peso specifico superiore a 5, nel quale galleggia anche la pirite. È più comodo servirsi di questa miscela fusa anzichè aggiungere una sufficiente quantità dei due sali alla loro soluzione (1).

Il formiato di tallio fuso ha peso specifico inferiore a 5 e perciò la pirite non vi galleggia; ma aggiungendovi carbonato di tallio in polvere, questo vi si scioglie accrescendone il peso specifico. Quando la quantità aggiunta è, nella miscela, in proporzione del 13 per cento, la pirite vi galleggia.

Se invece del carbonato si aggiunge il fluoruro di tallio, quando la proporzione di questo è del 3,8 per cento, galleggia la pirite; al 9 per cento galleggia la magnetite in cristalli isolati di Zillerthal, e al 16,6 per cento l'oligisto crist. dell'Elba (2). Lo stesso oligisto non galleggia nella seconda miscela del Retgers, la quale, se fonde a 76°, richiede una temperatura più elevata, oltre 100°, per essere ben fluida e limpida ed usabile; essa però consente soltanto una piccolissima aggiunta d'acqua, perchè altrimenti si separa un sale basico: perciò le lavature bisogna farle con acqua acidulata con acido nitrico. Tale inconveniente non si presenta con le miscele fuse formiato-malonato, formiato-carbonato, formiato-fluoruro, le quali, filtrate per carta, dànno un liquido limpidissimo, incoloro, che, però, incomincia a imbrunire oltre la temperatura di 120°.

La miscela formiato-fluoruro di tallio fonde tra 76° e 80° e può essere usata anche sotto i 100° in bagno d'acqua; ma forse è preferibile, affinchè

(1) La miscela solida è igroscopica; ciò confermerebbe il criterio che aveva ispirato le mie prime ricerche.

(2) Anche altri sali di tallio sono più o meno solubili nel formiato fuso: cloruro, solfocianuro, nitrito, solfato, nitrato, perclorato, ecc., senza offrire risultati migliori; eccettuata quella col nitrito, in nessuna di queste miscele può galleggiare la pirite.

il fluoruro sia tutto disciolto, usarla tra 100° e 110° formando il bagno con un liquido ad elevato punto d'ebollizione oppure in stufa. La miscela solida è igroscopica: fusa ha reazione alcalina alle carte reattive: i solfuri, pirite, cinabro, blenda, proustite, antimonite, vi resistono; cristalli e frammenti di silicati varî, granati, pirosseni, anfibolo, cordierite, olivina, tenutivi per ben dieci ore a temperatura di 115°, non sembra abbiano sofferto. Nella pratica applicazione, il più lungo uso mostrerà se vi siano circostanze speciali in cui tale liquido sia in difetto; si può, peraltro, affermare offra qualche vantaggio rispetto ad ambedue le miscele del Retgers.

Geologia. — *Il conglomerato di Como.* Nota I di Emilio Repossi, presentata dal Socio Artini.

Il così detto *conglomerato di Como*, o *gonfolite della Camerlata*, ha richiamato già da molto tempo l'attenzione degli studiosi, e qualche diagnosi sulla natura de' suoi ciottoli si rintraccia già in scritti della prima metà del secolo scorso (Curioni, 1844). Ma il primo studio petrografico preciso degli elementi che lo costituiscono è dovuto al Chelussi e risale al 1908. Scopo di questo osservatore quello di determinare il presumibile luogo di provenienza dei ciottoli stessi, che, prima d'allora, si era ripetutamente affermato doversi ricercare ad occidente del Lago Maggiore.

Il Chelussi, constatando che nel conglomerato mancano o sono scarsissimi gli elementi che potrebbero per la loro natura appartenere alla zona basica d'Ivrea, e sono invece costantemente presenti rocce di tipo valtellinese, come il *serizzo* di Val Masino, concludeva il suo breve studio affermando giustamente che non v'è ragione per attribuire agli elementi del conglomerato comense un'origine tanto occidentale.

Io avevo già più volte pensato di tornar sull'argomento per estendere alquanto le osservazioni del Chelussi e fornire così un più completo quadro della composizione petrografica del conglomerato, che, data l'età tongriana ad esso ordinariamente attribuita, mi pareva potesse fornire qualche notizia sulle formazioni affioranti nella regione alpina, o in un tratto almeno di questa, in uno dei momenti più interessanti della sua storia.

Ma il mio disegno sarebbe forse rimasto più a lungo allo stato di semplice disegno se il sig. ing. Cesare Porro non avesse pur egli pensato ad una consimile ricerca, con base ancora più larga, e non m'avesse proposto — cosa di cui gli sono estremamente grato — di associarmi a lui nell'esecuzione pratica del lavoro, incaricandomi specialmente dell'indagine strettamente petrografica.

Il piano di lavoro adottato di comune accordo fu il seguente: revisione e studio di tutta l'area d'affioramento del conglomerato comense dalla Brianza al Lago Maggiore; revisione e studio dei conglomerati terziari con elementi alpini del Monferrato e della collina di Torino, presumibilmente coevi col primo; studio petrografico dei componenti di questi conglomerati e confronto con le formazioni alpine con le quali possono aver relazione. Animatrice di tutto il lavoro la speranza di raccogliere, oltre ad una mèsse più o meno abbondante di fatti la cui conoscenza sia utile per sè stessa o per lo scopo sopra accennato, qualche dato che permetta di far un po' di luce sul modo e sull'ordine di messa in posto delle varie formazioni alpine secondo le odierne vedute tectoniche.

Piano vasto, dunque, e promettente. Ma, sventuratamente, per ragioni varie e indipendenti dalla buona volontà di ciascuno di noi, sino ad ora son rimasto solo nell'esecuzione del nostro disegno, il quale, per giunta, all'atto pratico si dimostra anche più gravoso di quanto non pensassimo. Di conseguenza il lavoro procede alquanto lentamente, e per adesso può dirsi limitato allo studio petrografico e di rilievo del conglomerato comense nell'area, già abbastanza vasta, compresa fra la Brianza ed il Lago Maggiore.

Cionostante, i dati ora raccolti hanno già, a mio avviso, qualche interesse; ed in attesa che il lavoro possa essere ultimato giusta i nostri disegni, credo di far cosa utile accennando sommariamente ad alcuno di essi.

Ricordo che la formazione, costituita essenzialmente da arenarie, con vaste intercalazioni di lenti conglomeratiche specie nella sua parte inferiore, comincia verso est ad affiorare poco lungi da Besana Brianza; si sviluppa poi ampiamente nelle vicinanze di Como e tra Como, Chiasso e Malnate, raggiungendo uno spessore notevolmente superiore al chilometro; riaffiora a sud del lago di Varese e intorno al lago di Comabbio, e termina ad ovest vicino a Lissanza, sul Lago Maggiore.

Essa ha risentito fortemente dei movimenti orogenetici dell'area alpina, poichè si trova dovunque irregolarmente e molto spostata dall'orizzontalità, e fra Como e Chiasso i suoi banchi sono in qualche tratto raddrizzati sino a 70°.

È pure già ben noto che essa, oltre a banchi di arenarie più o meno fine, di arenarie argillose a sottili strati e di conglomerati variamente grossolani, contiene ad un determinato livello e quasi in tutta la sua estensione, ma specie fra Camerlata e Malnate, grossi blocchi disseminati di preferenza nei banchi arenacei, affatto caratteristici e simili a quelli che si osservano nelle analoghe formazioni della collina di Torino.

Una delle prime difficoltà, che si presentano a chi si accinga al rilievo ed allo studio del conglomerato comense, è dovuta al fatto che tutta l'area del suo affioramento è ingombra di materiali morenici; di guisa che spesso lo sfacelo del conglomerato si confonde coi detriti glaciali.

Ma aggiungo subito che l'occhio si abitua ben presto a discernere il complesso petrografico presentato dalle morene da quello caratteristico del conglomerato; e ciò anche prescindendo dalla serie degli altri caratteri distintivi delle due formazioni, di tipo e di origine del resto tanto differenti. E con questo vengo già a fare una prima notevole affermazione generale sui caratteri petrografici del conglomerato. In esso infatti si osserva un'associazione di elementi nettamente diversa da quella dei cumuli morenici, i quali pur provennero, sebbene in modo e in tempo differenti, dal medesimo tratto della regione alpina. Ci sono, naturalmente, nei due depositi elementi comuni; ma ci son pure elementi che mancano o scarseggiano da una parte e non dall'altra, e viceversa. E questo vale sia che consideriamo le morene del ghiacciaio dell'Adda, sia che consideriamo quelle del ghiacciaio del Ticino, in confronto con le rispettive aree d'affioramento del conglomerato.

Di constatazioni di questo genere ne furon fatte parecchie. Mi limito per ora a ricordare che al conglomerato comense, intorno a Como ed a Chiasso, manca in modo quasi assoluto il *serpentino*, tanto abbondante nel morenico del ghiacciaio dell'Adda, mentre vi è frequentissima una *tonalite*, molto caratteristica e assai simile a quella classica del Tonale, che non si osserva affatto nelle morene.

Nel conglomerato abbonda in modo assolutamente inatteso il calcare nummulitico tipo Montorfano, e non solo ad oriente di Como (ciò che sarebbe abbastanza ovvio) ma anche ad occidente di Como e sin presso Bizzarone, dove attualmente non v'è traccia di eocene con la *facies* ora detta.

Manca invece al conglomerato il *porfido quarzifero* a *facies* granitoide tipo Val Ganna, anche nel tratto in cui più ci si potrebbe attendere di trovarlo; mentre, d'altro lato, vi sono rappresentate con discreta frequenza le *porfiriti* luganesi ed i porfidi a *facies* più normale, ma ora meno abbondanti nell'area intorno al Ceresio.

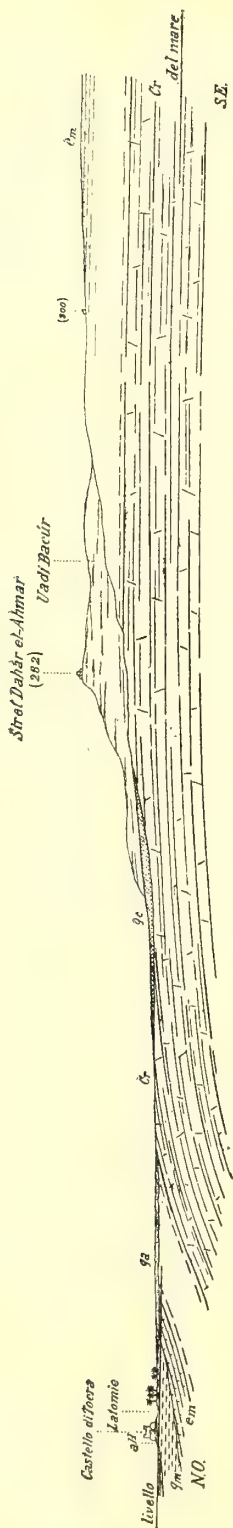
La presenza di certe rocce è degna di nota perchè serve a segnare il limite superiore alla determinazione della loro età geologica. Così, a cagion d'esempio, mi sembra interessante la presenza constatata del granito di Baveno nel conglomerato dei dintorni di Lissanza.

Geologia. — *Il Maestrichtiano in Cirenaica.* Nota preliminare dell'ing. dott. CAMILLO CREMA, presentata dal Socio C. F. PARONA.

È noto che, se in Cirenaica non furono finora segnalati terreni più antichi dell'Eocene, anzi la presenza stessa dell'Eocene inferiore non può ancora dirsi interamente dimostrata [1], tuttavia il Gregory, nonchè escludere la possibilità che vi esistessero anche terreni precenozoici, ha da tempo indicato come luogo, dove più probabilmente questi potevano venire a giorno, la base della scarpata di Tocra [2]. Colla quale denominazione egli designava, come risulta dalla carta geologica annessa al suo lavoro, il tratto compreso fra Bengasi e Tolmetta e lungo un centinaio di chilometri dell'erto ciglione calcareo che, bruscamente o coll'interposizione di terrazzi più o meno ampii, delimita la pianura costiera, determinando il primo dei tre gradini nei quali si suddivide il fronte mediterraneo del massiccio cirenaico.

Per incarichi ricevuti dal Ministero delle Colonie e da quel Governo coloniale, avendo dovuto recentemente eseguire una serie di ricognizioni geologiche in Cirenaica ed importando per queste di ricercare i terreni costituenti la base della serie locale, era quindi naturale che la mia attenzione si portasse su questa scarpata e particolarmente su quella parte di essa la quale non era ancora stata percorsa da altri geologi. Circostanze, sulle quali sarebbe ozioso soffermarsi, vietarono di dare alle ricerche l'ampiezza che sarebbe stata desiderabile attesa l'estensione della zona da esplorarsi: tuttavia, per quanto limitate ad un ristretto numero di punti ed a volte anche alquanto sommarie, grazie alla tettonica estremamente semplice della regione esse non riuscirono sterili e consentirono tra altro di stabilire la fondatezza delle affermazioni del Gregory. Non sarà quindi inopportuno di darne brevemente notizia: rimandando però ad altra occasione l'esame delle località nelle quali il Cenozoico discende fino ai piedi della scarpata, mi occuperò qui soltanto dei dintorni di Tocra, dove in corrispondenza dell'uadi Bacúr compaiono anche terreni più antichi.

[1] G. Stefanini, *Sulla costituzione geologica della Cirenaica,* Rend. Acc. Lincei, vol. XXX, 2° sem., Roma 1921, pag. 53.

[2] J. W. Gregory, *Contributions to the Geology of Cyrenaica.* Quart. Journ. geol. Soc., vol. 67, London, 1911, pag. 601.

Come si scorge dall'unita sezione prospettica nella scala approssimata di 1:50000, la balza non dista qui che pochi chilometri dal mare; il suo piede sta a circa 50 m. s. m.; la sommità a 300 m., altezza media del primo ripiano od altipiano di El Merg; a destra ed a sinistra dell'imboccatura dell'uadi essa si protende in due sproni pianeggianti, dell'altezza media di 120 m., evidentemente relitti di un antico terrazzo interposto fra l'altipiano e la pianura. L'uadi taglia il gradino all'incirca ad angolo retto incidendolo fino alla quota di 100 m., e da questo punto si apre il varco attraverso ad un ampio ventaglio di deiezione (*qc*) nel quale, come nella maggior parte dei depositi vallivi della Cirenaica, si osservano due ordini di terrazzi ben conservati. Al di là del ventaglio subito si perde ogni traccia dell'uadi, le cui scarse acque sono assorbite dai crepacci del suolo prevalentemente calcareo [1].

[1] L'uadi Sleib (o ed-Dor?), che ha la sua foce presso Tocra, e parecchi altri uadi più ad oriente si spingono coi loro alvei fino al mare attraversando la pianura, qui ridotta ad una esile striscia; alcuni anzi, ad es. l'uadi Asra, raggiungono la costa addirittura coi loro ventagli di deiezione. Invece sulla sinistra dello Sleib, dove la pianura costiera va sempre più allargandosi, un solo fiume riesce a convogliare fino al mare le acque delle sue piene, il Gattara.

Le carte, anche le più recenti, non indicano il corso di questo fiume nella pianura o lo segnano erroneamente colla foce presso Sidi Buscelif, benchè fosse notorio e del resto già da parecchi anni esplicitamente detto da Padre Zanon, che esso si dirige sui giardini della Berka, presso Bengasi (*L'Agricolt. colon.*, X, pag. 276 ed XI, pag. 379, Firenze, 1916-17). Il suo alveo si presenta ben definito, è vero, solamente fino a poco più di un chilometro a SO di Casa Mei ed in seguito si confonde colla bassura che col nome di Rhaba da questo punto si estende fino alla Berka: mi fu però facile fissare il corso delle acque anche in questo tratto, sia approfittando delle piene dell'inverno 1919-1920, sia perchè il suolo, costituito d'ogni intorno esclusivamente da terra rossa, in corrispondenza di esso è cosparso di ciottoli e ghiaiette, abbandonati dalle acque del fiume. Alla Berka queste acque sono in gran parte derivate per irrigazione, ma la porzione residua, insinuandosi fra la caserma ed il cimitero cristiano, dove effettivamente ricompaiono tracce di alveo, e, nelle maggiori piene, anche fra Sidi Daud e la Mafluga sbocca nella Sebcha-el-Malha e nella Sebcha-el-Bunta donde raggiunge il mare attraverso il porto di Bengasi. Nella grande piena del 1903, le acque

Il terreno più profondo (*Cr*) affiora allo sbocco della valle ed è rappresentato da calcari biancastri o bianco-giallastri, ben stratificati, ricchi in rognoni e noduli di selce, ora compatti a frattura concoide, ora teneri a frattura ineguale, e spesso anche alquanto farinosi sì da sporcare le dita. Nelle sezioni sottili questi calcari non mostrano che pochi foraminiferi senza importanza caratteristica. In quanto ai fossili macroscopici, quelli ben conservati non sono molto comuni; ma la loro ricerca mi venne facilitata dai tagli recentemente eseguiti allo sbocco dell'uadi per l'apertura della rotabile che da Tocra sale ad El Merg: oltre a numerosi esemplari di un'alga subcilindracea-spirulata, che corrisponde bene al gen. *Münsteria*, ed a qualche resto indeterminabile di crostaceo, la fauna comprende essenzialmente dei lamellibranchi, spesso allo stato di modelli esterni. Grazie alla cortesia del professore C. F. Parona, che volle studiare il materiale raccolto, posso indicarvi:

Septifer Charmesi (Thom. et Per.)
Lucina (Dentilucina) Calmoni Perv.
" " *subnumismalis* d'Orb.
" cfr. *dachelensis* Wann.
Cardium (Trachicardium) productum Sow.
Cytherea Rohlfsi Quaas
Pholadomya elliptica Münst.

specie, le quali dimostrano che si tratta di Maestrichtiano simile, per non dire identico, a quello che così largamente affiora in Tripolitania dal ciglione del Gebel fino alle oasi di Ghadames e di Dergi ([1]) e sulla cui fauna lo stesso prof. Parona ha preparato da tempo un'ampia illustrazione che sta per veder la luce. Anche litologicamente questi calcari corrispondono bene a taluni tipi del Maestrichtiano libico, segnalati dall' ing. Zaccagna nel complesso superiore alle assise ad *Inoceramus regularis*, ignote fin qui in Cirenaica.

I calcari dell' uadi Bacúr nelle varietà meno compatte possiedono ben marcato il carattere organolettico tipico delle roccie fosfatifere, quello cioè di sviluppare odore di fosforo per semplice sfregamento. Come è noto,

---

del Gattara, per l'abbondante fanghiglia trascinata in sospensione non solo arrossarono tutto lo specchio del porto, ma resero torbido il mare per parecchie centinaia di metri dalla costa.

L'insenatura che costituisce la porzione naturale del porto di Bengasi non è quindi altro che la foce dell' uadi Gattara.

([1]) C. F. Parona, *Per la geologia della Tripolitania*. Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, vol. L, Torino, 1914; D. Zaccagna, *Itinerari geologici nella Tripolitania occidentale,* con appendice paleontologica di P. Principi, G. Checcha-Rispoli, P. Vinassa de Regny e A. Fucini. Mem. descr. della Carta geologica d'Italia, vol. XVIII, Roma, 1919.

tale carattere è però senza rapporto col tenore in fosforo della roccia; ed infatti alcuni campioni, essendo stati sottoposti ad analisi nel laboratorio chimico dell'Ufficio Geologico dal dott. F. Ratto, non rivelarono che quantità minime di P_2O_5; non è tuttavia il caso di dimenticare che queste assise sono sincrone, isomesiche ed isotopiche con quelle che in Egitto si riconobbero ricche di fosfati, e non può quindi escludersi che ulteriori ricerche possano condurre a scoprirvi qualche zona fosfatifera.

Risalendo l'uadi, i calcari sembrano impoverirsi di resti organici; del resto presto spariscono sotto un'abbondante coltre detritica coperta da una folta macchia, la quale nasconde gli strati rocciosi fino all'orlo dell'altipiano. Su questo si hanno dapprima dei calcari molto compatti, selciosi, a frattura concoide e non includenti che rare nummuliti; indi, a maggior distanza dal ciglione, altri calcari più teneri, con strati ricchi di nummuliti che ne mostrano l'appartenenza all'Eocene medio (e_m). Questi calcari nummulitici sembrano in concordanza con quelli a fossili maestrichtiani della base della scarpata, cosicchè non è improbabile che vi sia stata continuità di deposizione [1], nel qual caso gli strati intermedî occultati dalla macchia rappresenterebbero essenzialmente l'Eocene inferiore. La conferma di tale riferimento non sarebbe priva d'interesse, poichè è appunto alla base dell'Eocene che si trovano i ricchi giacimenti di fosfati della Tunisia e dell'Algeria.

L'insieme dei calcari descritti forma un'ampia piega a ginocchio colla cerniera in gran parte demolita, la fronte a nord e l'altra gamba, che appena può dirsi in pendio, rivolta a sud; cosicchè nei calcari della pianura, che dai piedi della scarpata degrada dolcemente a mare, si ritrova la stessa serie che risalendo l'uadi. Ben presto però i banchi calcarei spariscono dapprima sotto una vasta distesa di terra rossa (*qa*), probabilmente limo di antiche alluvioni, indi sotto le note arenarie a *Cardium* (*qm*), comuni lungo il littorale cirenaico e che, più o meno sviluppate, ritrovai verso sud fin oltre Zuetina nella Sirtica. Largamente utilizzate sin dall'antichità per trarne materiale da costruzione, queste arenarie furono anche qui scavate in numerose ed ampie latomie per le costruzioni dell'antica Teuchira, il cui nome, corrotto in quello di Tocra, designa tuttora il tratto di costa occupata dalle sue pittoresche rovine ed il piccolo villaggio arabo che le fiancheggia. La formazione a *Cardium* sostiene infine piccoli lembi dell'arenaria ad *Helix* (a^H), già segnalata in altre località del littorale, e sopra uno di essi sorge il castello di Tocra.

[1] Il dott. Prever nella sua importante Nota sulle *Nummuliti ed Orbitoidi dei dintorni di Derna* (Boll. Soc. geol. it., vol. XXXIII, Roma 1914) a pag. 235 dice incidentalmente che in Cirenaica la Creta fa passaggio graduale all'Eocene. Malgrado la forma recisa della frase ritengo che l'autore non abbia voluto fare un'affermazione ma semplicemente un'ipotesi, poichè in Cirenaica, per quanto mi consta, non erano stati fin qui segnalati terreni cretacei.

Il ripiegamento che si osserva nei calcari incisi dall'uadi Bacúr, come quello indicato dal Gregory nell'uadi Sciáaba, ha però soltanto valore locale, poichè in corrispondenza degli uadi Bilbarabidis ad ovest ed Asra ad est, e fors'anche prima, gli strati non possiedono più che una lieve pendenza a mare e torna a dominare la struttura tabulare, generale in tutta la scarpata.

Che questa, anzichè una balza di frattura, come opinava il Gregory, debba invece ritenersi col Marinelli [1] un'antica ripa di abrasione, parmi ormai abbastanza dimostrato; mi astengo perciò dall'esporre altre mie osservazioni al riguardo.

Patologia vegetale. — *Osservazioni sulla recettività del frumento per la carie.* Nota del prof. O. Munerati, presentata dal Socio R. Pirotta.

Una recente comunicazione di F. D. Heald [2] mi induce ad esumare alcune occasionali osservazioni, che varî anni addietro effettuavo a conferma e a complemento di vecchi rilievi sul tema di cui trattasi [3].

Secondo Heald le probabilità della infezione per *Tilletia* (spp.) sono in dipendenza della carica di spore del fungillo sul tegumento dei granelli: vi sarebbe, cioè, con le inevitabili fluttuazioni, un graduale incremento nel percento di spiche cariate con l'incremento del numero di spore portate da ciascun granello; il percento delle spiche infette non aumenta però proporzionalmente oltre un determinato carico. L'esame di un campione di frumento, eseguito allo scopo di stabilire il numero di spore di *Tilletia* aderenti al tegumento dei granelli, potrebbe permettere di predire, con una soddisfacente esattezza, la percentuale di piante affette da carie da cui verrebbe colpita la cultura se il seme non fosse previamente trattato [4].

(1) O. Marinelli, *Sulla morfologia della Cirenaica.* Rivista geogr. it., vol. XXVII, Firenze, 1920.

(2) Heald F. D., *The relation of spore load to the per cent of stinking smut appearing in the crop.* Phytopathology, XI (1921), n. 7, pp. 269-278. Di detta comunicazione (al quarto Congresso dei fitopatologi americani) lo stesso periodico aveva già pubblicato un *résumé* nel fascicolo di febbraio (p. 103).

(3) Munerati O., *La recettività del frumento per la carie in rapporto al tempo di semina.* Questi Rendiconti, vol. XX (1911), fasc. 11, p. 835; vol. XXI (1912), fasc. 12, p. 875.

(4) Occorre aggiungere che altri Autori avevano già precedentemente accennato, benchè in forma non così circostanziata, ad un certo rapporto tra grado di infezione delle spore e percento di spiche cariate alla raccolta.

Or ecco brevemente i miei pochi rilievi dopo il 1912.

Probabilità dell'infezione rispetto ai decorsi delle temperature al momento della germinazione. — Dato che in pratica accade che le semine precoci di autunno e quelle tardive di primavera portino a far registrare una percentuale normalmente assai meno elevata di spiche cariate di quello che non si verifichi, anche a parità di carica di spore sui granelli, con semine effettuate in condizioni opposte, è logico ammettere che i decorsi delle temperature all'atto della germinazione debbano avere la maggiore efficienza nel determinare l'infezione da parte del fungillo. Ma poichè, in effetti, le temperature minime o medie autunnali da un lato e primaverili dall'altro, non hanno decorsi rigidamente progressivi, e possono quindi virtualmente verificarsi, come in realtà si verificano, eccezioni anche nelle percentuali delle infezioni [1], occorreva, per dirimere ogni dubbio derivante dagli incerti decorsi stagionali, istituire apposite prove ponendo a germinare granelli uniformemente infettati, e a parità d'altre condizioni, a diverse temperature debitamente dominate e controllate. Il che feci servendomi di appositi cassoni collocati rispettivamente in serra e in camera fredda, e con successivi trapianti.

I saggi di codesto genere sono di una semplicità elementare, e poichè è a chiunque estremamente facile di ripeterli per proprio conto, non citerò in questa Nota che qualcuna delle cifre da me raccolte:

	Temperatura del letto di germinaz.	
	18°-20°	7°-8°
	°/₀ di spiche cariate	
Semina: autunn. 1914 (2 ottobre) Gentile rosso . .	3,3	98
» primav. 1915 (28 febbraio) Marzuolo amer.	1,4	92
» autunn. 1915 (7 ottobre) Cologna veneta .	3,3	100
» primav. 1917 (15 marzo) Gentile rosso . .	12,0	96

Volli anche accertare se l'assunto di Müller e Molz, secondo i quali con temperature bassissime (2-3 centigradi) non si verificherebbe infezione per *Tilletia* [le clamidospore del fungo richiederebbero per la germinazione una temperatura relativamente più elevata (5-6 centigradi) rispetto

[1] Qualche sperimentatore, che si è trovato di fronte a resultati contradittorii, ha voluto dare alla conclusione — secondo la quale la percentuale di spiche affette da *Tilletia* è direttamente proporzionale al tempo di semina in autunno e inversamente proporzionale al tempo di semina in primavera — un significato strettamente letterale. Certo è appunto che non sempre l'andamento delle temperature procede in linea uniformemente decrescente o crescente rispettivamente d'autunno o in primavera, onde possono aversi in novembre periodi a temperature più elevate che in ottobre, ed in marzo è facile registrare temperature più basse che in febbraio. Da aggiungere che il grado di umidità del suolo, la profondità cui va a trovarsi il seme entro la terra ed altre circostanze subordinate e accessorie possono avere, a loro volta, una certa portata.

al frumento ([1])], ma con resultamenti incerti. Comunque, se è necessario convenire con Müller e Molz che il problema della infezione del frumento per *Tilletia* in rapporto ai decorsi delle più basse temperature merita di essere ancora meglio elucidato, resta sempre e in modo incontrastabile confermato che una rapida germinazione fa sfuggire la piccola pianta di grano al fungo qualunque sia la carica di spore aderenti al tegumento.

PROBABILITÀ DELLA INFEZIONE RISPETTO ALLA LOCALIZZAZIONE DELLE SPORE DI *TILLETIA* SUL TEGUMENTO DEI GRANELLI. — A prescindere dal concetto ultimamente sollevato da Heald, va ricordato che, ai riguardi delle possibilità di infezione per *Tilletia*, si è sempre attribuito, come si attribuisce, una particolare portata ed importanza al fatto per il quale durante la trebbiatura le spore del fungo vanno soprattutto ad annidarsi nel ciuffetto di peli di uno dei due estremi della cariosside. Orbene: quale influenza specifica sul meccanismo dell'attacco della carie esercitano le clamidospore *ivi* localizzate? Dato e concesso che altre spore di *Tilletia* non fossero ripartite lungo il tegumento, e particolarmente più verso la zona embrionale, la piantina sfuggirebbe o meno alla infezione? Alcune prove iniziate sino dal 1911 comprovavano la ragionevolezza del supposto; e i risultati furono egualmente e sempre concordanti in tutti i saggi effettuati posteriormente.

Il metodo seguito per la preparazione del materiale non offre la minima difficoltà. Si sterilizza innanzitutto il tegumento con acqua calda (solita procedura) e quando i granelli sono bene essiccati vi si fanno aderire carichi di spore in punti distinti del tegumento mediante un pennellino intriso di spore incorporate a soluzione concentrata di gomma arabica o destrina. I granelli devono essere manipolati con pinzette e quindi posti, a una certa distanza tra loro, ad essiccare (si presta assai bene, con i suoi solchi, la così detta carta ondulata o cannettée). Quando si collocano poi i semi in piena terra oppure in vasi o in grandi germinatoi, occorre dare in precedenza al substrato la voluta umidità, ed ulteriormente, se necessario, fornire acqua o con metodo capillare o con nebulizzatrici.

Nelle nostre esperienze infettavamo rispettivamente la zona embrionale o la zona apicale, oppure zone intermedie del lato ventrale o dorsale; nel letto di germinazione, i semi erano quindi posti rispettivamente o con la zona embrionale in su oppure all'ingiù, oppure orizzontalmente. Provammo anche a contaminare la zona apicale in granelli rotondeggianti oppure in granelli allungati (tipo Cologna veneta), ecc.

Per brevità, e per lo scopo precipuo che si propone questa piccola Nota, ci limiteremo ad esporre i rilievi compiuti con il materiale rispondente a

([1]) Müller H. C. und Molz E., *Ueber den Steinbrand des Weizens. Einfluss der Saatzeit auf den Steinbrandbefall beim Winter-und Sommerweizen.* Fühling's Landw. Zeitung, LXIII (1914), Heft 6, p. 204).

condizioni antagonistiche, e cioè con contaminazione della zona embrionale (collocamento zona embrionale in basso od in alto) e con contaminazione della zona apicale (collocamento zona embrionale in basso od in alto); rispettivamente in ambiente a temperatura di 18-20 oppure a 7-8 centigradi.

Fino dalle prove preliminari del 1911-12 resultava che in letto di germinazione a temperatura di 20 centigradi circa le piante sfuggono in grandissima parte all'attacco del fungillo anche se la carica di spore sia localizzata alla zona embrionale, mentre, viceversa, se la carica è circoscritta alla zona apicale le piantine rimangono in grandissima parte immuni anche se la germinazione ha luogo nelle condizioni più propizie di recettività per la *Tilletia*. Rilievi su più abbondante materiale furono compiuti nel 1914 e nel 1916. Nel prospetto qui sotto riportiamo le principali cifre registrate nel 1916 (semina 13 marzo, varietà gentile rosso) osservando che si tratta di percentuali derivate da conteggi di parecchie centinaia di piante.

	°/₀ di spiche cariate
I) *Germinazione a temperatura di 18-20 centigradi.*	
A) Contaminazione zona embrionale	
a) Zona embrionale in su	3
b) " " in giù	5
B) Contaminazione zona apicale	
a) Zona apicale in su	0,2
b) " " in giù	0,7
II) *Germinazione a temperatura di 7-8 centigradi.*	
A) Contaminazione zona embrionale	
a) Zona embrionale in su	82
b) " " in giù	92
B) Contaminazione zona apicale	
a) Zona apicale in su	9
b) " " in giù	2

Codeste percentuali non vanno naturalmente prese in senso assoluto (in qualche altro caso si è registrata una più alta percentuale di piante infette con zona embrionale in su, in altri casi tutte le piante uscirono immuni anche se da semi fortemente contaminati in corrispondenza alla zona embrionale, ecc.), ma il loro significato non poteva lasciare la più tenue ombra di incertezza: così, dopo il 1916 sospendemmo qualunque altro saggio.

Conclusioni.

1°) In linea principale rimane ancora una volta *confermato*:

a) che la presenza di spore di *Tilletia* (spp.), *anche in fortissima carica*, sul tegumento del granello, non è condizione sufficiente a determinare in ogni caso l'attacco delle piante da parte del fungillo. La possibilità

dell'infezione non è, in altri termini, in dipendenza della entità della carica di spore aderenti al tegumento, ma dallo svolgimento e dalla durata del processo germinativo;

b) che quanto più rapidamente avviene la germinazione del seme, tanto più la pianta è in grado di sfuggire all'attacco del parassita, e viceversa;

c) che nella grande pratica, se un trattamento (concia) al seme è sempre consigliabile, a maggior ragione si impone allorchè si effettuano semine tardive d'autunno o precoci in primavera.

2°) In linea subordinata si osserva:

a) che la probabilità teorica della infezione più che dal numero globale od assoluto di spore aderenti al tegumento dipende dalla localizzazione od ubicazione delle spore sul tegumento stesso. Quanto più la carica di spore si trova lontana dalla zona embrionale, tanto più la piantina può sfuggire alla infezione, e viceversa. Che se in atto accade che le possibilità della infezione risultano in un certo senso in diretta correlazione con la entità della carica di spore sulla superficie dei granelli, la circostanza va attribuita al fatto per cui quanto più grande è il numero di spore sul tegumento, tanto più è probabile che una determinata percentuale delle medesime sia localizzata (o vada, nel letto di germinazione, a localizzarsi) in prossimità della zona embrionale;

b) che la « spazzola » di peli trovantisi alla estremità più appuntita dei granelli funge, essenzialmente, da organo di arresto o di immagazzinamento di spore, le quali, attraverso il soffregamento con gli altri granelli o mercè altra azione meccanica, vengono trasportate in prossimità della zona donde spunta o lungo cui può strisciare la piumetta nella sua evoluzione. Che se una carica, anche fortissima, di spore di *Tilletia*, fosse, e rimanesse, in supposto, esclusivamente circoscritta alla zona opposta a quella embrionale, la pianta sfuggirebbe o quasi ad ogni possibilità di auto-infezione;

c) che se si tratta di accertare la resistenza, all'attacco del fungo, di determinate varietà o razze o individui, oppure di verificare il grado di azione di un determinato metodo di concia, è opportuno effettuare i saggi sotto condizioni controllate; eseguendo prove in pieno campo, seminare uno stesso materiale in momenti distinti e successivi lungo un determinato periodo presunto critico, onde acquisire la certezza che almeno in una serie il materiale vada a trovarsi nelle condizioni estreme di massima recettività per il parassita, ed avere, in più, la precauzione che una più forte carica di spore si trovi localizzata in corrispondenza alla zona embrionale.

Fisiologia. — *Osservazioni preliminari sulla radiosensibilità di alcuni stadî della spermatogenesi oligopirenica di Paludina vivipara* (1). Nota del dott. Cesare Artom, presentata dal Socio B. Grassi.

Tra le varie ipotesi per spiegare l'azione disintegratrice che i raggi Röntgen e i raggi delle sostanze radioattive esercitano sulla sostanza vivente, deve essere anzitutto ricordata l'ipotesi di Schwarz, secondo la quale la causale diretta delle necrosi che si osservano sia nelle cellule dei varî tessuti, sia nelle uova in segmentazione esposte ai raggi, sarebbe da attribuirsi ai prodotti tossici (principalmenie colina) derivanti dalla disintegrazione delle lecitine. Viceversa gli Hertwig (2), con ricerche divenute ormai classiche, sull'influenza che l'irradiamento di uova e spermi di Echinodermi, Pesci e Anfibi ha sul consecutivo sviluppo, attribuirebbero principalmente alla disintegrazione delle sostanze nucleari l'azione tossica che viene esercitata sulla sostanza vivente.

Le conclusioni degli Hertwig trovano piena conferma nelle recenti esperienze di Alverdes (3) sul comportamento, che la sostanza nucleare maschile ha durante la segmentazione dell'uovo di Cyclops, quando lo spermatozoo sia stato, prima della fecondazione, convenientemente irradiato. Così pure le osservazioni di Mohr sulla spermatogenesi di un Ortottero (Decticus verrucivorus) dimostrano, non solo che le sostanze del nucleo sono specificatamente radiosensibili, ma lo sono essenzialmente durante gli stadî di spermatocito in accrescimento, quando cioè evidentemente i processi di sintesi nucleinica devono essere assai più intensi e più celeri, che non nelle cellule ordinarie che si preparano alla mitosi.

Date queste sommarie premesse, si comprende senz'altro il particolare interesse che devono avere le osservazioni sull'influenza esercitata dai raggi sulla spermatogenesi dei molluschi prosobranchi, in cui, generalmente, come è noto, esistono nello stesso testicolo due serie di cellule spermatogenetiche, ciascuna con caratteristiche proprie, sia al riguardo della sostanza cromatica, sia al riguardo delle inclusioni citoplasmatiche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Per la bibliografia completa sull'argomento sino al 1920, si consulti la rivista sintetica del prof. G. Hertwig: *Das Radiumexperiment in der Biologie*, in Strahlentherapie, Bd. XI Heft, 2 settembre 1920.

(3) Fr. Alverdes, *Das Verhalten der mit Radium behandelten Spermatozoen von Cyclops nach der Befruchtung*, in Archiv. für Entwick. mechanik. 47 Band, 1921.

La Paludina vivipara è poi tra i molluschi prosobranchi uno dei materiali più adatti per tale genere di ricerche, data la conoscenza profonda che oramai si ha, su qualsiasi stadio delle due spermatogenesi (1).

Ho quindi usufruito di detto materiale per sperimentare l'azione che hanno i raggi Röntgen e quelli di varie sostanze radioattive (Radio, mesotorio) sulle diverse tappe delle due spermatogenesi. Riferisco però qui sommariamente solo i risultati ottenuti, nello scorso estate, irradiando il testicolo con raggi Röntgen, prodotti da ampolle S. H. S. Müller su Symmetrie-Apparat R.G.&.S., 2 M.A; scintilla equival. 36 cm., sotto filtro di zinco 0,5 mm. in cui la dose dei raggi erogata corrispondeva all'incirca a $\frac{2}{3}$ della dose di eritema (2).

Dopo 15 giorni dall'irradiazione, gli spermi sia eupirenici sia oligopirenici erano vitali e dotati di una normale motilità. Le sezioni fatte sul testicolo, opportunamente fissato e colorato, rivelano invece immediatamente che i nuclei degli spermatociti ipertrofici appartenenti alla spermatogenesi oligopirenica, sono in caratteristica degenerazione picnotica. Per contro gli elementi della spermatogenesi normale (sia in mitosi sia in istadio di spermatocito in accrescimento) sono apparentemente normali.

Alcune Paludine irradiate sempre colla stessa dose di raggi, sono state poi lasciate in riposo per circa tre mesi e quindi sacrificate. Orbene durante tale periodo il testicolo era tornato in condizione perfettamente normale, senza cioè alcuna traccia di elementi in caratteristica degenerazione picnotica.

Posso quindi già sin d'ora conchiudere che esiste anzitutto una radiosensibilità forse specifica al riguardo di elementi in cui, dato lo stato di ipertrofia che raggiungono, dobbiamo evidentemente ammettere un metabolismo molto più intenso che non negli elementi normali.

In secondo luogo possiamo conchiudere che la dose di raggi erogata è, se non specificatamente, certo maggiormente tossica per un determinato stadio della spermatogenesi oligopirenica (spermatocito in accrescimento); e che le cellule germinative primordiali della serie oligopirenica con tutta probabilità non devono essere lese dalla suddetta dose di raggi. Il testicolo cioè dopo un certo periodo di riposo susseguente all'irradiazione, tornerebbe normale, anzitutto perchè le cellule germinative primordiali non essendo state lese, evolvono regolarmente; in secondo luogo perchè gli spermatociti caduti in degenerazione picnotica nei giorni immediatamente susseguenti all'irradiazione, vengono gradatamente riassorbiti.

(1) Per la bibliografia si consulti: C. Artom, *Il comportamento della sostanza cromatica ecc. di Paludina vivipara* in Ricerche di Morfologia, vol. I, Roma, 1920.

(2) Debbo vivi ringraziamenti al Direttore della Clinica Ostetrica e Ginecologica di Roma, prof. E. Pestalozza, per l'ospitalità concessami nel suo istituto. Debbo poi viva riconoscenza ai proff. Valerio Artom di St. Agnese e M. Bolaffio, per l'assistenza e i consigli datimi nel corso delle esperienze.

Biologia. — *La struttura del fegato di Petromyzon planeri in relazione al ciclo biologico di questa forma* [1]. Nota del dott. Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

La trasformazione dell'*Ammocoetes* in *Petromyzon planeri*, scoperta da Augusto Muller, è stata da qualche autore paragonata alla metamorfosi degli Anfibi Anuri. Lo studio dell'apparato digerente mostra tuttavia che le trasformazioni che si riscontrano nel *Petromyzon* sono molto dissimili da quelle degli Anfibi Anuri. Alcuni anni or sono (1915), il Tagliani [2] ha dimostrato che le modificazioni che si hanno nell'intestino del *Petromyzon planeri* si riducono a fenomeni di atrofia non accompagnati da istolisi.

Secondo alcuni autori la trasformazione dell'Ammocete in Petromyzon avverrebbe in pochi giorni (Bujor), secondo altri (Loman) avverrebbe in pochi mesi. La questione si è resa ancora più complicata quando si è visto che un trattamento tiroideo, che provoca la celere metamorfosi negli Anfibi, si mostra inefficace negli Ammoceti, e quando si considera la discrepanza di risultati circa il ciclo biologico delle varie specie di Petromizonti.

Le presenti osservazioni (che saranno seguite da un lavoro più ampio corredato da figure) pur rivolgendosi a contribuire alla migliore conoscenza della struttura del fegato del *Petromyzon planeri*, mirano essenzialmente a utilizzare i risultati dell'indagine morfologica per lo studio del ciclo biologico dei Petromizonti.

Molti autori hanno osservato che nella trasformazione che la larva (Ammocoetes) subisce per raggiungere la forma adulta, il fegato soggiace a profondi cambiamenti, sì che va perduta la canalizzazione biliare, si oblitera e si atrofizza il coledoco, non si ritrova la vescicola biliare.

Holm [3] nel 1897 descrisse una profonda trasformazione nella vascolarizzazione sanguigna del fegato, che si presenta più sviluppata nella forma adulta che in quella larvale: « Bei *Petromyzon* ist das Gefässystem

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Roma.

[2] Tagliani G., *Sulla riduzione dell'intestino durante l'evoluzione di Ammocoetes branchialis in Petromyzon planer Bloch*. Boll. Soc. Eustachiano di Camerino, anno XIII, 1915.

[3] Holm T. F., *Ueber den feinern Bau der Leber bei den niedern Wirbelthieren*. Zool. Jahr. Abt. f. Anat. u. Ont. Bd. 10, 1897.

noch mehr als beim letztbeschriebenen *Ammocoetes*-Stadium entwickelt, die Blutcapillaren sind sehr gross, die Drüsenschläuche aber zusammengedrängt ». Secondo Holm le travate epatiche sono in connessione con i capillari sanguigni poichè le cellule epatiche sono separate dal sangue soltanto dalla sottile membrana del capillare: « von der Blutmasse nur durch die jetzt sehr dünne Capillargefässmembran geschieden ». In conclusione Holm ha supposto che si verifichi un *cambiamento di funzione*; il fegato nella forma adulta diventerebbe una glandula a secrezione interna.

Il Tagliani ha osservato a tal proposito che un radicale mutamento funzionale nel senso di una vera e propria sostituzione di funzione non esiste; funzione esocrina (biliare) e funzione endocrina coesistono nel fegato di *Ammocoetes*; nel fegato del *Petromyzon* cessata la funzione biliare si esalterebbe la funzione endocrina.

Le mie ricerche sull'argomento mi hanno condotto a ritenere la struttura che presenta il fegato della forma adulta (nella specie studiata) come espressione del lungo digiuno: invero non esiste una più intensa circolazione sanguigna e pertanto non solo non si può parlare di una sostituzione di funzione nel senso di Holm, ma bisogna invece ritenere che la funzione endocrina si è molto affievolita in rapporto al diminuito metabolismo generale, conseguenza del digiuno.

Nel fegato della larva si osserva, infatti, che i capillari sanguigni sono a stretto contatto con i tubuli epatici, le cellule epatiche essendo soltanto separati dai capillari da una sottile rete connettivale [1] che ho potuto mettere in evidenza col metodo del Mallory: i capillari sono pieni di globuli sanguigni. Dall'esame del fegato di *Petromyzon* (forma adulta) io ne deduco che la perdita della canalizzazione biliare è conseguenza della mancata attività secretrice. A sua volta l'atrofia del parenchima epatico contribuisce a far perdere il lume dei canalicoli biliari. In questi processi le travate epatiche [2] si distaccano in gran parte dalla rete connettivale e quindi si allontanano dai capillari sanguigni, i quali rimangono a contatto con le travate epatiche soltanto in punti limitati. Tra i capillari sanguigni e le travate epatiche si vengono così a formare degli spazi, di cui non esiste nessun cenno nel fegato attivamente funzionante della larva.

Questi fatti stabiliscono una condizione sfavorevole alla secrezione interna del fegato, in quanto ostacolano gli scambi diretti tra il sangue e le cellule epatiche.

[1] Le fibrille che formano la sottile rete connettivale si mostrano in stretti rapporti con le cellule dell'endotelio vasale: è probabile che esse siano di origine endoteliale (*Mall*, ecc.).

[2] Non è superfluo avvertire che con l'usare l'espressione « travata epatica » non intendo significare una rassomiglianza strutturale con il fegato di forme superiori.

Riguardo ai capillari osservo che essi nel fegato del *Petromyzon* possono presentarsi qui e lì dilatati, ma questo fatto va spiegato come una dilatazione passiva dovuta all'atrofia del parenchima epatico, laddove rimane l'aderenza tra cellule e vasi, ed è un reperto ben noto negli studi sul digiuno (Rondoni e Montagnani, 1915). Inoltre, mentre in alcuni punti i capillari si presentano pieni di sangue, in altri si mostrano quasi vuoti.

Che poi nel caso in esame si tratti di un *lungo* digiuno si deduce dalla condizione presentata dall'intestino: l'enorme sua riduzione, sopra tutto nelle cellule epiteliali (che come ben nota il Tagliani rappresenta un fatto di atrofia) non può essere prodotto che da un digiuno di parecchi mesi. Una breve inattività funzionale non potrebbe condurre a quegli effetti morfologici, contrastando a tale concezione tutti i risultati sperimentali.

Infine va osservato che il lungo digiuno, di cui intendo vedere una sanzione morfologica nella condizione degli organi studiati, si accompagna, nella forma in esame, alla maturazione degli organi sessuali, e pertanto la biologia del Petromyzon si avvicinerebbe a quella del Salmone e molto probabilmente alla condizione presentata dall'Anguilla argentina. Non può quindi recar meraviglia che il trattamento tiroideo non produce nell'Ammocoetes lo stesso effetto che negli Anfibi Anuri, in quanto la metamorfosi nelle due forme rappresenta momenti biologici completamente differenti. Inoltre, sempre tenuto conto della struttura del fegato, mi pare assai azzardato pensare che il *Petromyzon* possa, in appoggio alla dottrina di Putter, nutrirsi attraverso la pelle con le sostanze disciolte nell'acqua; se tale forma di nutrizione, di cui manca ogni prova obbiettiva esiste, essa ha nel caso in esame una importanza del tutto trascurabile.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE comunica con vivo dolore la morte dell'illustre Socio straniero CAMILLO JORDAN, che dell'Accademia faceva parte sino dal 1895. Del defunto Socio il Presidente pronuncia un'affettuosa commemorazione, ricordandone i numerosi ed importanti lavori che ne hanno fatto uno dei più insigni matematici dell'epoca nostra.

Il Presidente s'intrattiene più specialmente sui lavori del Jordan relativi alla teoria delle sostituzioni ed a quelli sui fondamenti del calcolo e della teoria delle funzioni. Fra i primi parla più specialmente del magistrale *Traité de substitutions*, mettendo in luce i suoi rapporti con i concetti fondamentali del Galois e ricordando a questo proposito il Betti che il Jordan cita come quegli che tolse notevoli lacune lasciate dal Galois. Rileva l'importante contributo originale apportato dal Jordan alla teoria dei

gruppi e fra gli altri ricorda il suo mirabile teorema sui fattori di composizione. Riguardo al secondo insieme di lavori il Presidente cita il *Cours sd'Analyse* del Jordan e fa menzione dei concetti, da lui introdotti nella scienza, di funzione a variazione limitata e di curva di Jordan. Osserva che tutta un'importante scuola moderna di matematici francesi è sorta per l'impulso dato dal Jordan come scenziato e maestro, ed a questo proposito mostra la concorde azione svolta dal Jordan in Francia e dal Dini in Italia nello sviluppo della matematica. Esalta le qualità morali del defunto Socio che fu duramente colpito negli affetti più cari durante la guerra, ma conservò la serenità di spirito in mezzo ai più grandi dolori ed ai lutti famigliari, raggiungendo la tarda età di 84 anni con mente sempre fresca ed alacre.

Il Socio Paternò nella sua qualità di Presidente della Società dei XL, si associa alla proposta d'invio di vive condoglianze alla famiglia del professore Jordan.

Il Presidente Volterra dà comunicazione di un altro lutto da cui è stata colpita l'Accademia, colla morte del Socio straniero prof. Osvaldo Schmiedeberg morto il 12 luglio 1921; questi insegnò Farmacologia prima a Dorpat e poi a Strasburgo, e fu un grande Maestro per importanti lavori e per i numerosi allievi che accolse intorno a sè.

PRESENTAZIONE di LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, fra le quali segnala il volume *Endocrinologia:* lezioni tenute ai RR. Istituti clinici di perfezionamento in Milano dai professori Livini, Rondoni, Pepere, Pende e Coronedi; e il vol. VI delle opere di Leonardo Eulero pubblicate sotto gli auspici della Società Elvetica di scienze naturali. Fa poi particolare menzione del vol. XIX delle *Biologische Untersuchungen* del Socio straniero prof. Gustavo Retzius, pubblicato e offerto in dono all'Accademia dalla vedova dell'autore sig.ra Anna Hiertia-Retzius.

Il Presidente fa omaggio a nome dell'autore, il Socio straniero A. Lacroix, del 1° volume dell'opera: *Minéralogie de Madagascar*; e il Segretario Millosevich dà notizia di quanto nel volume è contenuto, rilevandone l'importanza.

Il Presidente presenta anche il 1° volume dell'opera del prof. Leonida Tonelli: *Fondamenti di calcolo delle variazioni* di cui discorre; e offre il « Resoconto » delle sedute della 6ª Conferenza generale dei pesi e misure, riunitasi a Parigi nello scorso anno, facendo osservare come nella predetta conferenza sia emerso che il numero delle Nazioni aderenti alla Convenzione è in continuo aumento.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Castelnuovo dà comunicazione dei seguenti elenchi dei lavori presentati ai concorsi ai premî Reali e Ministeriali, banditi dall'Accademia e scaduti col 31 dicembre 1921.

Elenco dei concorrenti

al premio Reale per la « Morfologia normale e patologica ».

(Scadenza 31 dicembre 1921. — Premio L. 10.000).

1. Bertolotti Mario. 1) « Lezioni di radiologia medica (1915-16). Sulla morfologia dello scheletro assiale dell'uomo. *La Riforma Medica*, n. 1-6, 1916) » (st.). — 2) « Contributo alla conoscenza dei vizi di differenziazione regionale del rachide con speciale riguardo all'assimilazione sacrale della V lombare. *La Radiologia Medica*, N. 5, 1917) » (st.). — 3) « Le anomalie congenite del rachide cervicale. Morfologia e anatomia radiografica ». (st.).

2. Busi Aristide. 1) « Saggio di uno studio di anatomia nomale descrittiva e radiografica della sella turcica e dei suoi annessi » (st.). — 2) « Presentazione di radiogrammi tipici della calcolosi renale ed uretrale » (st.). — 3) « Ombre radiografiche certe (tipiche) ed incerte della calcolosi uretrale » (st. — 4) « Sulla visibilità dell'appendice cecale ai raggi X » (st.). — 5) « La röntgenologia del processo vermiforme del cieco » (st.). — 6) « Ancora sulla röntgenologia dell'appendice cecale » (st.). — 7) Studio radiologico di un caso di fistola cistico-duodenale » (st.). — 8) « Reperti radiologici in due casi di fistola cistico-duodenale » (st.). — 9. « La rappresentazione radiografica della valvola ileo-colica » (st.). — 10) « Morfologia radiografica normale del versante pilorico del duodeno » (Autoriassunto) con tav. (st.).

3. Ferrari Pocoleri Francesco. « Il sangue (umano, normale) nella nuova conoscenza » (st.).

4. Iaja Florenzo. « Fisiopatologia cellulare ed ibridismo » (ms.).

5. Pierantoni Umberto. 1) « L'origine di alcuni organi d'*Iceya purchasi* e la simbiosi ereditaria » (st.). — 2) « Origine e struttura del corpo ovale del Dactylopius citri e del corpo verde dell'*Aphis brassicae* » (st.). — 3) « Ulteriori osservazioni sulla simbiosi ereditaria degli omotteri » (st.). — 4) « Studi sullo sviluppo d'*Icerya purchasi Mask* 1-3 » (st.). — 5) « La simbiosi ereditaria » (st). — « Sul corpo ovale del *Dactylopius* » (st.). — 7) « Struttura ed evoluzione dell'organo simbolico di Pseudococcus citri Risso, e ciclo biologico del Coccidomyces dactylopii Buchner » (st.) — 8) « Sulla luminosità e gli organi luminosi di Lampyris noctiluca L » (st.). — 9) « Nuove osservazioni sulla luminosità degli animali ». (st.). — 10) « Organi luminosi, organi simbiotici e glandola nidamentale accessoria nei Cefalopodi » (st.). — 11) « Gli organi simbiotici e la luminescenza batterica dei Cefalopodi » (st.). — 12) « A proposito delle teorie sulla luminescenza batterica e sulle simbiosi fisiologiche » (st.). — 13) « I microrganismi fisiologici e la luminescenza degli animali » (st.). — 14) « Le simbiosi fisiologiche e le attività dei plasmi cellulari » (st.). — 15) « Sul significato fisiologico della simbiosi ereditaria » (st.). — 16) « Per una più esatta conoscenza degli organi fotogeni dei cefalopodi abissali » (st.). — 17) « Note di morfologia e sviluppo sui fotofori degli Eufausiacei » (st.). — 18) « Gli organi luminosi simbiotici ed il loro ciclo ereditario in *Pyrosoma giganteum* » (st.). — 19) « Organi luminosi batterici nei pesci » (st.). — 20) « La simbiosi fisiologica ereditaria » (ms.).

6. Levi Giuseppe. 1) « Sulla presunta partecipazione dei condriosomi alla differenziazione cellulare » (st.). — 2) « Appunti alla pubblicazione di Donaggio. Nuovi dati sulle pro-

paggini nervose del citoplasma e sulle fibre collagene dei gangli spinali» (st.). — 3) « I condriosomi dei gonociti » (st.). — 4) « I condriosomi nell'oocite degli anfibi » (st.). — 5) Come possono essere eliminati gli inconvenienti delle fissazioni osmiche» (st.). — 6) « I condriosomi nelle cellule secernenti » (st.). — 7) « Note citologiche sulle cellule somatiche dell'ovaio dei mammiferi » (st.). — 8) « Il comportamento dei condriosomi durante i più precoci periodi dello sviluppo dei mammiferi » (st.). — 9) « Ulteriori studi sullo sviluppo delle cellule visive negli anfibi » (st.). — 10) « Das Verhalten der Chondriosomen bei den frühe sten Entwickluns staflien der Säugetiere » (st.). — 11) « Le modalità della fissazione dell'uovo dei Chirotteri alla parete uterina » (st.). — 12) « Studi sulla grandezza delle cellule. III. Le modificazioni della grandezza cellulare e nucleare e dell'indice plasmatico-nucleare durante i più precoci periodi dell'ontogenesi dei mammiferi » (st.). — 13) « Studi sulla grandezza delle cellule. II. Le variazioni dell'indice plasmatico nucleare durante l'intercinesi » (In Collab. con Terni) » (st.). — 14) « Sui rapporti fra differenziazione morfologica e funzionale nei muscoli delle larve di anfibi » (In collab. con Galeotti) (st.). — 15) « L'accrescimento degli organismi » (st.). — 16) « La costituzione del protoplasma studiata su cellule viventi coltivate *in vitro* » (st.). — 17) « La costituzione del protoplasma nelle cellule viventi » (st.). — 18) « Sull'origine delle reti nervose nelle colture di tessuti » (st.). — 19) « I fattori che determinano il volume degli elementi nervosi » (st.). — 20) « Dimostrazione della natura condriosomica degli organuli cellulari colorabili col bleu pirrolo in cellule coltivate *in vitro* » — 21) « Differenziazione *in vitro* di fibre da cellule mesenchimali e loro accrescimento per movimento ameboide » st.). — 22) « Il ritmo e le modalità della mitosi nelle cellule viventi coltivate *in vitro* (st.).— 23) « Migrazione di elementi specifici differenziati in colture di miocardio e di muscoli scheletrici » (st.). — 24) « Connessioni e struttura degli elementi nervosi sviluppati fuori dell'organismo » (st.). — 25) « Nuovi studi sull'accrescimento delle cellule nervose. Ricerche in Orthagoriscus mola » (st.). — 26) « Considerazioni sulla costituzione fisica del citoplasma desunte da nuovi dati morfologici, sulle cellule coltivate *in vitro* ». — 27) « L'individualità delle cellule persiste in potenza dei sincizi » (st.). — 28) « Nuovi studi sull'accrescimento delle cellule nervose. Ricerche in Orthagoriscus Mola » (st.). — 29) « La vita degli elementi isolati dall'organismo » (st.). — 30) « L'azione dell'jodio e dell' adrenalina studiata su cellule viventi fuori dell'organismo » (In collab. con V. Cervello) — 31) « Nuovi studii su cellule coltivate *in vitro*. Attività biologiche, intima struttura, caratteri morfologici specifici » (st.). — 32) « L'accrescimento organico » (st.). — 33) « Forma e funzione » (st.). — 34) « Il fondamento morfologico dell'accrescimento » (st.). — 35) « Fecondazione, ovulazione e mestruazione » «st.). — 36) « Notizie sulla sezione embriologica della fondazione Carnegie di Baltimora » (st.). — 37) « Sulla persistenza dei caratteri specifici nelle cellule coltivate *in vitro* (st.). — 38) « L'accrescimento dei somiti mesodermici e di altre individualità morfologiche » (st.). — 39) « L'origine dell'Amnio nei Chirotteri » (st.). — 40) « Per la miglior conoscenza del fondamento anatomico e dei fattori morfogenetici della grandezza del soma. L'accrescimento dei somiti mesodermici e di altre individualità morfologiche » (st.). — 41) « Il fondamento anatomico ed i fattori morfogenetici della grandezza del soma negli animali » (ms.).

7. Sera Gioacchino. 1) « Nota sull'occhio mongolico » (st.). — 2) « Di alcuni caratteri importanti sinora non rilevati nel cranio di Gibroltar » (st.). — 3) « Nuove osservazioni ed istruzioni sul cranio di Gibraltar » (st.). — 4) « Un nuovo orbitostato » (st.). — 5) « Sul piano orizzontale del cranio » (st.). — 6) « L'attuale controversia su poligenismo e monogenismo in Italia » (st.). — 7) Australoidismo e neandertaloidismo » (st.). — 8) « Sul significato della platocefalia con speciale considerazione della razza di Neonderthal » (st.). — 9) « Sull'uomo fossile sud-americano » (st.). — 10) « A proposito di due recensioni del Sig. P. Bartels » — 11) « Per alcune ricerche sulle base del cranio » (st.). — 12) « La posizione fra le scienze e il valore dell'antropologia » (st.). — 13) « L'altezza del cranio in America » (st.). — 14) « Residui di popolazioni mongoloidi nelle Isole di California » (st.). — 15) « Indirizzo morfologico

e indirizzo morfometrico » (st.). — 16) « I caratteri antropometrici degli Aymarà e il mongolismo primordiale dell'America » (st.). — 17) « Brevi note sopra un femore umano fossile dell'America meridionale » (st.). — 18) « Alcune osservazioni sulle parabole di altezza del Giardina » st.). — 19) « L'altezza soprauricolare, la sua tecnica e la valutazione dei due indici ad essa relativi » (st.). — 20) « Un foglio di proiezione per rapporti morfometrici in corpi tridimensionali e in particolare per la altezza del cranio » (st.). — 21) « La pieghettatura dello smalto nei denti di antropomorfi » (st.). — 22) « La testimonianza dei fossili di antropomorfi per la questione dell'origine dell'uomo » (st.). — 23) « Un preteso *Hominide* miocenico : *Siropitheus insticus* » (st.). — 24) « È la forma dell'orecchio umano antica o recente ? » (st.). — 25) « La genesi delle categorie dentarie nei Primati » (st.). — 26) « I caratteri di forma dei molari delle scimmie e la divisione di queste in due gruppi fondamentali » (st.). — 27) Le relazioni reciproche dei diversi gruppi sistematici dei Primati in base ai caratteri dentarii » (st.). — 28) « I caratteri della faccia e il polifilatismo dei Primati » (st.). — 29) « Sui rapporti della conformazione della base del cranio colle forme craniensi e colle strutture della faccia nelle razze umane. Saggio di una nuova dottrina craniologica con particolare riguardo dei principali cranii fossili » (st.). — 30) « La génèse de l'articulation secondaire (segnamos-dentalis) de la mandibule et la origine des mammifères » (st.). — 31) « L'omologia dei centri di origine del molare dei Primati sulle ossa portaorbitali degli Stegocefali » (st.). — 32) « Morfologia umana e antropologia » (st.). — 33) « Qu'est-ce que l'Antrhopologie ? » (st.). — 34) « La distribuzione geografica in brachipleticefali ed i relitti della panna glaciale in Europa » (st.). — 35) « I movimenti etnici nel Caucaso » (st.). — 36) « Sul significato polifiletico delle differenze strutturali nell'arto inferiore di *Anthropoidea* (mihi) » (st.). — 37) « La successione spaziale e cronologica dei tipi etnici nell'Europa settentrionale ed orientale ». (st.). — 38) « Risposta al prof. V. Giuffrida-Ruggeri » (st.). — 39) « La funzione di rotazione della fibula dell'ornitorinco ed il duplice adattamento acquatico e fossorio dei mammiferi primitivi (ms.).

8. Versari Riccardo. 1) « La morfogenesi dei rami collaterali e terminali delle arterie ciliari posteriori lunghe ed il comportamento, non ancora descritto, dei vasi sanguiferi reflui dalla membrana pupillare nell'occhio embrionale umano » (st.). — 2) « Le fasi di sviluppo e di regresso della tunica *vasculosa lentis* e la morfogenesi dei vasi sanguiferi nei processi ciliari e nell'iride dell'occhio dell'uomo. Con tav. (ms.).

Elenco dei concorrenti ai premi

del Ministero della P. Istruzione per le « Scienze matematiche ».

(Scadenza 31 dicembre 1921. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. Aprile Giorgi. 1) « Di una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni » (st.). — 2) « Su alcune ipersuperficie razionali dell' S_4, d'ordine, 5 o 6, e con infinite quadriche » (st.). — 3) « Di alcune congruenze, d'ordine due, di superficie nell'S_4. C di coniche nell' S_3 » (st.). — 4) « Sopra la involuzione non razionale di Enriques » (st.). — 5) « Di alcune involuzioni piane di classe tre » (st.). — 6) « Sulle congruenze di V_2 — 2 d'ordine uno e classe tre » (st.). — 7) « Una trasformazione cremoniana dello spazio ed alcuni sistemi di quartiche gobbe di 2ª specie » (st.). — 8) « Alcuni complessi di rette. Dell' S_4 e dell' S_3 dotati di un fascio di congruenze lineari » (st).

2. Benedetti Piero. « Il problema dell'estensione » (ms).

3. Berardi Nicoletta. « La superficie di quint'ordine dotata di una retta tripla e di due rette a sghembo tra loro e incidenti alla prima $II5 = 0^3 . 2u^2$ » (ms.).

4. Botto Costantino « Sopra una superficie di area minima per cui un sistema di assintotiche ha per immagine un fascio di coniche sferiche » (ms.).

5. Da Rios Sante Luigi. « Sulla validità delle equazioni cardinali del moto di Lagrange » (ms.).

6. Ducci Enrico. 1) « Sulla risoluzione del sistema $a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 = A$. $b_1x^2 + b_1xy + b_3y^2 = B$. » (st.). — 2) « Nuove formole per la derivata n^{ma} di tg$x$ e di cot$x$ » (st.). — 3) « Sulla regola per esprimere un numero con prodotto di fattori primi » (st.).

7. Gallucci Generoso. 1) « Ricerche geometriche su la configurazione di Kummer » (ms.). — 2) « Nuovo saggio su l'esagrammo di Pascal » (ms.).

8. Giudice Francesco. 1) « Sinossi di geometria solida e di trigonometria piana e sferica » (st.). — 2) « Misura, orientamento, movimento » (ms.).

9. Marletta Giuseppe. 1) « Di una classe di varietà abeliane » (st.). — 2) « Sistemi lineari d'omografie, che sono gruppi » (st.). — 3) « Di alcune varietà abeliane » (st.).

10. Mercogliano Domenico. 1) « *J. W. Young.* I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria ; versione e note di *Domenico Mercogliano* » (st.). — 2) « Sui fondamenti della matematica. Conferenza tenuta nella Sezione napoletana della *Mathesis* » (st.). — 3) « L'Uebertragungsprincip di Clebsch e lo studio di particolari tangenti delle curve del 3° ordine » (ms.). — 4) « Sull'insegnamento dinamico della matematica » (ms.).

11. Morale Michele. « Sopra i complessi di rette dello spazio a quattro dimensioni, ed in particolare su alcuni complessi lineari » (ms.).

12. Natucci Alpinolo. 1) « Compendio di matematica per la 3ª classe liceale » (st.). — 2) « Aritmetica pratica per le scuole medie » (st.). — 3) « Elementi di aritmetica razionata e algebra » (st.).

13. Papa Michele. « L'infinito nella natura e nella scienza. Soluzione matematica del problema proposta da G. S. Gerdil » (ms.).

14. Tanturri Alberto. 1) « Sulla funzione del Dirichlet e sulla funzione signum x del Kronecker » (st.). — 2) Determinazione della derivata n^{ma} di tg. x e di cot. x » (st.). — 3) « Un'espressione nuova dei numeri bernoulliani » (st.). — 4) « Saggio di rappresentazione analitiche di funzioni singolari » (st.) — 5) « Teorema d'addizione delle funzioni sgn e mod; segno del logaritmo e del seno d'un numero ; riduzione al primo quadrante » (ms.).

15. Tocchi Luigi. 1) « Sul numero di soluzioni dell'equazione di Fredholm quando $D(\lambda) = 0$ » (st.). — 2) « Nuovi teoremi sulle soluzioni dell'equazione di Fredholm quando $D(\lambda) = 0$ » (st.). — 3) « Sopra una generalizzazione della diseguaglianza di Schwarz » (st.).

16. Tummarello Antonino. « Nuovi tipi generali di superficie razionali superficie d'ordine m con retta $(m-3)$ pla. Ed $m-3$ punti tripli » (st.).

17. Usai Giuseppe. 1) « Processi di riduzione su equazioni integrali di prima specie » (st.). — 2) « Processi riduttivi su equazioni integrali » (st.). — 3) « Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali col nucleo x-y » (st.). — 4) « Relazioni tra i simboli del Pascal e i simboli dell'Arnaldi nella teoria delle derivate di ordine superiore delle funzioni composte » (st.). — 5) « Sulle variazioni di un integrale doppio con le derivate quarte » (st.). — 6) « Sugli esponenti nelle ripartizioni » (st.). — 7) « Sopra un'equazione funzionale » (ms.).

18. Vergerio Attilio. 1) « Sopra un tipo di equazioni integro-differenziali » (st.). — 2) « Sulle equazioni integrali non lineari (ms.). — 3) « Sulle equazioni integrali non lineari con operazioni funzionali singolari » (ms.). — 4) « Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari » (ms.).

Il Presidente comunica che il dott. Giorgio Abetti si è ritirato dal concorso al premio Reale per l'*Astronomia*, del 1920.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente VOLTERRA annuncia alla Classe che assistono alla seduta i professori SNYDER e LIPKA di Ithaka N. Y. e Cambridge Mass., ai quali porge il cordiale saluto dei Colleghi.

Viene poscia presentato dal PRESIDENTE un piego sigillato inviato dal sig. TOMMASO BIANCO perchè sia conservato negli Archivi accademici; e dallo stesso Presidente viene aperto, in seguito a richiesta del Corrispondente prof. BRUNI che lo aveva depositato, un altro piego, il cui contenuto sarà pubblicato nei Rendiconti accademici [1].

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 febbraio 1922.

BOMAN E. — Los vestigios de industria humana encontrados en Miramar (Republica Argentina) y atribuidos a la època terciaria (Extr. da la « Revista Chilena de Historia y Geografia », tomo XXXIX, pp. 330-352). Santiago, 1921. 8°.

CARBONELLI G. — Frammento medico del secolo VII. Roma, 1921. 4°, pp 1-20.

Comptes Rendus des Séances de la sixième Conférence Générale des Poids et Mesures réunie a Paris en 1921. Paris, 1921. 4°, pp. 1-84.

CORONEDI G. — Endocrinologia. Milano, 1922. 8°, pp. 1-322.

DE LINDE (van) J. C. — De Verdeeling der Heldere Sterren. Rotterdam, 1921. 8°, pp. 1-66.

EULERI L. — Commentationes algebraicae. vol. VI. Lipsiae, 1921. 4°, pp. I-XXIX, 1-509.

FERRARI POCOLERI F. — Il sangue (umano, normale) nella nuova conoscenza. Pescara, 1921. 4°, pp. 1-43.

IVALDI G. — Sul principio di proporzionalità fra pressioni d'urto ed energie di moto e sulle sue conseguenze (Estr. dalla « Rassegna tecnica Pugliese », fasc. VII). Bari, 1921. 4°, pp. 1-10.

JAIA F. — Fisiopatologia cellulare ed ibridismo. Bari, 1922. 8°, pp. 1-19.

LACROIX A. — Minéralogie de Madagascar. T. I. Paris, 1922. 4°, pp. I-XVI, 1-624.

LIVINI F. — Endocrinologia. Milano, 1922. 8°, pp. 1-322.

MALENOTTI E. — Sulla biologia del Dacus oleae Rossi (Estr. dal « Redia », volume XV). Firenze, 1922. 8°, pp. 1-12.

MEESTERS P. — De in Nederland voor het bloote oog zichtbare Sterren. Amsterdam, 1920. 8°, pp. 1-16.

PASSERINI N. — Un dodicennio di osservazioni drosometriche. Firenze, 1921. 8°, pp. 1-15.

PENDE N. — Endocrinologia. Milano, 1922. 8°, pp. 1-322.

PEPERE A. — Endocrinologia. Milano, 1922. 8°, pp. 1-322.

PESSION G. — Alcune esperienze di radiotelefonia (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. XXVIII). Varese, 1921. 4°, pp. 1-7.

RETZIUS G. — Biologische Untersuchungen. Bd. XIX. Stockholm, 1921. 4°, pp. I-XII, 1-100.

RONDONI P. — Endocrinologia. Milano, 1922. 8°, pp. 1-322.

TONELLI L. — Fondamenti di calcolo delle variazioni, vol. I. Bologna, 1921. 8°, pp. I-VII, 1-466.

VALLAURI G. — Decisioni tecniche del Comitato di Parigi per le radio-comunicazioni (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. XXX). Varese, 1921. 4°, pp. 1-7.

[1] V. questo fascicolo, pag. 86.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

COMUNICAZIONI VARIE

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 4.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 4°

Seduta del 19 febbraio 1922.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1922.

R. LANCIANI, Socio anziano, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota VII del Corrisp. QUIRINO MAJORANA.

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI. — Come ho già accennato nelle Note precedenti, le osservazioni sono state fatte nei due casi *tara-contrappeso* e *sfera-contrappeso*, ed in ciascuno di questi, alternando le letture con i piombi in PP oppure in P′P′. Esse si sono svolte fra il 16 maggio ed il 2 luglio 1921, e costituiscono 11 serie per il primo caso e 10 per il secondo, le quali si sono alternate in quel periodo di tempo. Ciascuna serie è costituita da un certo numero di determinazioni (variabile a seconda delle circostanze fra 10 e 30) della posizione di equilibrio della bilancia, dedotta leggendo tre elongazioni successive del raggio luminoso riflesso dal giogo. Contemporaneamente si è avuta cura di mantenere, in ogni serie, l'indice luminoso riflesso dal *controllo* sempre sullo stesso punto della scala verticale, mediante la regolazione della corrente dell'elettromagnete J: con ciò, come si è spiegato, la bilancia veniva riportata sempre nella stessa posizione angolare, eliminandosi l'errore proveniente dalle deformazioni dell'edificio.

Il metodo adottato ha dunque permesso di determinare l'influenza della presenza dei piombi intorno alla sfera, in maniera del tutto analoga a quella già spiegata nelle prime ricerche [1] per il caso del mercurio. Ma in queste

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. XXIX, pag. 90 e 91.

nuove esperienze l'influenza in parola è stata rilevata tanto nel caso *tara-contrappeso* che nell'altro *sfera contrappeso*, per le ragioni viste a suo tempo. Poichè al principio ed alla fine di ogni serie (la cui durata si aggirava intorno alle due ore) veniva determinata la sensibilità della bilancia mediante il congegno $A_1 A_2 A_3$, si è potuto ogni volta trasformare i mm. di spostamento del raggio luminoso sulla scala, in mg.

Qui appresso, riporto, a mo' di esempio, le prime due serie di determinazioni fatte per i due casi *tara-contrappeso* e *sfera-contrappeso*; ciascuno dei numeri, espresso in mm., è stato ottenuto dopo aver letto tre oscillazioni della bilancia *senza piombi*, tre *con piombi* d infine altre tre *senza piombi*:

tara contrappeso; *sensibilità media* 249 mm/mg.;

l'indice luminoso si sposta verso il basso per la presenza dei piombi, di:

mm.: 0,13, 0,50, 0,31, 0,35, 0,23, 0,23, 0,02, 0.16. 0,19. 0,90. 0,28. 0,43, 0,15, 0,77, 0,36 (15 osservazioni);

media: mm. 0,338, pari a mg. 0,338/249. = mg. 0,00136:

sfera-contrappeso: *sensibilità media* 242 mm./mg.;

l'indice luminoso si sposta verso il basso c. s., di:

mm.: 0,46, 0,34. 0,26, 0,29, 0,23, 0,12, 0,03, 0,19, 0,38, 0,35, 0,22, 0,16, 0,23 (13 osservazioni);

media: mm. 0 251, pari a mg. 0,251/242 = mg. 0,00104.

. . . .

Ed in maniera simile ho proceduto per le altre serie. Tutte le medie sono qui sotto riportate, espresse in mg.:

tara-contrappeso (errore magnetico)		sfera contrappeso (assorbimento gravit. lordo)	
0,00136	0,00211	0,00104	0,00022
097	142	142	062
085	161	118	077
108	135	130	041
207	162	064	065
170			

Per quanto si è detto, i precedenti numeri rappresentano in complesso le medie di 176 determinazioni di posizioni di riposo della bilancia, e di un numero all'incirca quadruplo di letture di oscillazioni, oltre quelle necessarie per le osservazioni della variabile sensibilità della bilancia.

L'esame del precedente specchietto ci dice che la posizione di riposo del giogo della bilancia *si abbassa* sempre alquanto, per la presenza dei piombi intorno alla sfera, cioè tanto che si sperimenti con *tara-contrappeso*, che con *sfera-contrappeso*. E si può a prima vista credere che realmente

non vi sia alcuna influenza vera dovuta alla presenza dei piombi intorno alla sfera, giacchè i 21 numeri su riportati appariscono poco differenti, oscillando essi tra 1 e 2 millesimi di milligrammo, all'incirca. Potrebbe nascere quindi il dubbio che se realmente il muovere i piombi, portandoli da PP a P′P′, dà luogo ad uno spostamento della posizione di riposo di tale ordine di grandezza, ciò avvenga indifferentemente alla stessa guisa per i due modi di caricare il giogo e che quindi nessun assorbimento gravitazionale esista; o che, per lo meno, questo fenomeno non sia rivelabile col congegno da me ora sperimentato, perchè troppo delicato, o perchè mascherato da una causa che, pur lasciando accusare alla bilancia i 2 millesimi di mg. predetti, non consente ad essa di indicare valori alquanto più grandi o più piccoli. Un tale fatto potrebbe verificarsi p. e. se il giogo nel muoversi, incontrasse qualche ostacolo dovuto ad attrito nei coltelli o ad altra imperfezione.

Preoccupato da tale considerazione, ho istituito una doppia serie di verifiche o controlli, tendenti ad allontanare quel dubbio. Da un canto ho avuto frequentemente cura di determinare lo smorzamento delle oscillazioni della bilancia: risultava così costantemente il rapporto tra due elongazioni consecutive e dallo stesso lato, di 0,9 circa: ritengo che sarebbe stato difficile od impossibile accrescere notevolmente tale rapporto nella speciale mia disposizione, rappresentando quella cifra il limite imposto dalla lavorazione anche la più accurata dei coltelli. L'osservazione saltuaria dello smorzamento mi ha permesso talvolta di accorgermi e di eliminare prontamente qualche causa perturbatrice insospettata, come il depositarsi di un velo sottilissimo di resina su tutto il giogo, dovuto alla condensazione di vapori emessi sotto l'azione del calore e del vuoto, dal mastice adoperato per chiudere la bilancia. La costanza dello smorzamento, constatata nel passare da ampie a piccole oscillazioni, mi ha fatto poi escludere l'esistenza di anormali condizioni del sistema oscillante.

Ma d'altro canto, ho istituito una verifica più diretta della giustezza di tale conclusione. Senza muovere i piombi, ho accresciuto lo sforzo esercitantesi sul braccio destro del giogo (quello cioè che sostiene la sfera), di qualche millesimo di mg.: e cioè da 1 a 5, in più esperienze successive. Questo scopo è stato da me raggiunto ponendo a varie distanze al disotto della custodia della *sfera*, un disco circolare di piombo di circa 15 kg., e calcolando a priori, per la conoscenza delle sue dimensioni e della sua distanza dal centro della *sfera*, la forza newtoniana così occasionata. Si comprende ora che con tal modo di procedere, non si generi alcuna deformazione perturbatrice sul sostegno della bilancia, e che è quindi inutile in tal caso servirsi del *controllo a mercurio*, o dell'esperienza *in bianco*, *tara-contrappeso*. Ebbene, facendo le medie di parecchie osservazioni, che qui non riporto, così eseguite, ho constatato che realmente le inclinazioni del giogo, caso per caso,

seguono esattamente i valori dello sforzo aggiunto, variabile come si è detto da 1 a 5 millesimi di milligrammo. Ciò vuol dire che il giogo è perfettamente sensibile a tali delicatissimi sovraccarichi.

Ritornando ora all'esame della tabella numerica precedente, rimane a interpretare il fatto per cui le cifre *tara-contrappeso* e *sfera-contrappeso* non sieno troppo differenti, pur ammettendo l'esistenza dell'assorbimento gravitazionale; ed è facile vedere come ciò sia possibile tenendo conto delle cause newtoniane di errore discusse nella Nota precedente. Anzitutto per quanto riguarda l'*errore magnetico*, esso può essere indicato con maggior precisione dalla media delle 11 osservazioni su riportate:

$$E = -\text{mg. } 0{,}00147 \pm 0{,}00009,$$

e si è adottato il segno — perchè esso concorrerebbe a nascondere l'effetto di assorbimento gravitazionale, dapoichè il giogo si abbassa per sua causa dal lato della sfera, contrariamente a quanto avverrebbe per quello, se fosse puro. Effettivamente per l'effetto di assorbimento lordo si hanno, come si è riportato nella tabella, delle cifre che debbono restar positive, perchè il giogo si sposta ancora dalla stessa parte e basterà sommare algebricamente ciascuna di queste con l'errore magnetico e con le altre correzioni newtoniane già studiate, per aver finalmente l'effetto corretto.

Considero, p. e., la prima determinazione dell'assorbimento gravitazionale od effetto lordo su riportata, cioè + mg. 0,00104. Ad essa vanno fatte le seguenti correzioni:

Assorbimento gravit. lordo	+ mg.	0,00104
Errore magnetico medio	— »	0,00147
Attrazione zattera	— »	0,00231
Attrazione masse suss[le].	— »	0,00180
Attrazione su contrappeso	+ »	0,00275
Totale: assorb. gravit. corretto . . .	— mg.	0,00179

Le elencate correzioni si fanno analogamente, per tutte le altre 9 serie del caso *sfera-contrappeso*; in complesso abbiamo dunque le 10 osservazioni corrette seguenti, per l'*assorbimento gravitazionale subìto dalla sfera di gr. 1274 perchè circondata dai 9616 Kg. di piombo*:

mg.:	— 0,00179	— 0,00261
	— 0,00141	— 0,00221
	— 0,00165	— 0,00206
	— 0,00153	— 0,00242
	— 0,00219	— 0,00218

E la media di esse è

$$-\text{mg. } 0{,}00201 \pm 0{,}00010,$$

cioè la sfera di piombo apparisce alleggerita di circa 2/1000 di mg.

Discussione del risultato. — Lo smorzamento gravitazionale constatato è dunque circa la metà di quello presunto in base alle prime esperienze. Il disaccordo può dipendere o da imperfezione della mia teoria, la quale sarebbe così valevole in prima approssimazione soltanto, oppure da errori in una od in entrambe le due serie di misure. Debbo ritenere più probabile l'esistenza di qualche errore nella prima serie (quella col mercurio); ma d'altro canto è da tener presente che le difficoltà incontrate, e che ho cercato di superare, nel servirmi della massa schermante di piombo di 10 tonnellate circa, hanno dato alla seconda serie di misure un grado di incertezza relativa, alquanto superiore.

Peraltro, l'importanza dell'argomento è tale, che è da augurarsi la ripetizione delle mie esperienze per opera di altri fisici; con ciò solo, si potrà acquistare la assoluta certezza, se non del valore numerico, almeno della esistenza generica dell'assorbimento gravitazionale.

Comunque, in base al constatato affievolimento del peso della sfera, si può cercare di calcolare quale sia il valore della costante h, secondo le ipotesi a suo tempo avanzate. All'uopo, analogamente a quanto già dissi nelle prime ricerche col mercurio [1] occorrerebbe trovare lo spessore medio del *mantello di piombo* che, circondando la sfera, ne occasiona la diminuzione di peso. Il calcolo rigoroso sarebbe assai difficile tenuto conto che la massa schermante è cubica anzichè sferica; anzi sotto certi riguardi si può ritenere indeterminato, giacchè non si conosce la distribuzione delle masse che costituiscono il globo terrestre. Se le più pesanti fossero localizzate in prossimità del centro di tale globo, si comprenderebbe come l'assorbimento verrebbe a manifestarsi principalmente lungo le verticali passanti per i varii punti della sfera; e cioè per un tratto uguale al mezzo lato del cubo, meno il raggio della nicchia N (fig. 2). Ciò equivale a cm. 47,5 — 4,4 = cm. 43,1. Ché se poi la densità della terra fosse uniforme (la qualcosa, come è noto è lontana dal vero) anche dei raggi gravitazionali non verticali verrebbero notevolmente affievoliti, ed essi possono raggiungere una lunghezza massima pari alla mezza diagonale del cubo, diminuita, al solito, del raggio della nicchia, cioè di cm. 77 circa. Ma la semplice considerazione di questo problema geometrico, fa vedere che il caso di raggi talmente lunghi è piuttosto raro di fronte agli infiniti possibili, e che in ogni modo essi, essendo inclinati, dànno un contributo piuttosto piccolo alla componente verticale totale che corrisponde al peso della sfera. Per cui, sempre restando dentro i limiti 43 e 77, e nell'impossibilità di stabilire un calcolo rigoroso, ritengo di non esser troppo lontano dal vero ammettendo uno spessore medio del mantello di piombo, di circa 50 cm. Si ha dunque, sapendo che la

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. XXIX, pag. 236.

densità del piombo è 11.33:

$$h = \frac{0.000002}{1274 \,.\, 11{,}33 \,.\, 50} = 2{,}8 \,.\, 10^{-12}.$$

Ricordo, che nelle prime esperienze avevo avuto per h il valore $6{,}7 \,.\, 10^{-12}$; per cui anche tale valore rimarrebbe ridotto, secondo le nuove esperienze, alla metà circa di quello calcolato altra volta.

Possibilità di altre cause d'errore. — A me sembra di poter escludere l'esistenza di una causa di errore capace di giustificare completamente la diminuzione di peso constatata nella sfera. Ad ogni modo osservo, come altra volta, che la causa di errore a cui si pensa più facilmente in una ricerca del genere, è la eventuale dissimmetria di massa nei piombi, o l'inesatta valutazione delle attrazioni newtoniane parassite di cui ho parlato. Ora, quanto a queste ultime, se si pensa che esse sono precisamente dell'ordine di un paio di millesimi di mg. ciascuna (come si è visto), si comprende che non vi possa essere in taluna di esse qualche errore, che dovrebbe raggiungere il 100% circa. Per quanto riguarda la dissimmetria nei piombi, un calcolo sommario fa vedere che per ottenere uno sforzo sulla sfera di circa 2/1000 di mg., sarebbe occorsa una dissimmetria della sfera, rispetto alle facce del cubo, di uno spessore di piombo di circa 10 mm.; od, in altri termini, che la sfera fosse stata spostata, in tutte le esperienze, rispetto al centro del cubo, ed in basso, di circa la metà di quel valore cioè di circa 5 mm. È poi da osservare che, in considerazione della esistenza della nicchia N (fig. 2), alla eventuale attrazione della sfera verso una delle facce del cubo (dovuta alla suddetta dissimmetria) si contrapporrebbe l'attrazione generata dalla dissimmetria rispetto alla nicchia; e tale attrazione, come è facile rilevare, sarebbe precisamente di segno contrario e di valore assoluto pochissimo differente dalla prima. Per far comprendere ciò supponiamo che invece di un cubo con una cavità sferica al centro, si fosse trattato di una sfera massiccia, con la stessa cavità centrale. È facile vedere, che in tale caso, qualsiasi punto materiale nell'interno della cavità sferica sarebbe in perfetto equilibrio newtoniano. Il fatto di adoperare un cubo anzichè una sfera, pur non essendo esattamente equivalente, non può cambiare di molto questa conclusione, e quindi una dissimmetria nella posizione della sfera nell'interno della nicchia non può dare notevole componente verticale attrattiva.

Per togliere infine qualsiasi altro scrupolo circa la esattezza di tale conclusione ricordo il fatto che l'incertezza di aggiustaggio sia della nicchia che della sfera rispetto al cubo, non può in ogni caso superare 0,5 mm. circa.

Mineralogia. — *Ardennite di Ceres, in val d'Ala (Piemonte)* (1). Nota preliminare del Corrisp. Ferruccio Zambonini.

Già da qualche tempo, io ho trovato nei dintorni di Ceres, nei filoncelli quarzosi che attraversano gli gneiss minuti ed i micascisti, della piemontite abbondante e bellissima, non inferiore, in certi campioni, per bellezza, a quella classica di St. Marcel, in valle d'Aosta. La piemontite è accompagnata da altri minerali di manganese: rara è, però, la rodonite, parzialmente alterata, della quale non ho rinvenuto che un grosso nodulo. Varî altri minerali si associano alla piemontite, ma non intendo di farne parola ora, ripromettendomi di trattarne presto in una Memoria dedicata all'interessante giacimento.

Desidero, col presente scritto, puramente preliminare, di far conoscere brevemente l'esistenza nel giacimento di Ceres in questione, di un minerale, l'ardennite, non trovato finora in Italia, e del quale, anzi, almeno per quanto io so, non è noto che un solo giacimento, quello di Salm Chateau, presso Ottrez, nelle Ardenne belghe.

L'ardennite si rinviene, nella nuova località, intimamente associata alla piemontite, sotto forma di aggregati fibrosi o bacillari, che possono raggiungere anche 5-6 cm. di lunghezza. Non di rado questi aggregati sono contorti o ripiegati. Alle volte essi sono inquinati soltanto dal quarzo e da minutissimi granuletti o tavolette cristalline di un minerale trigonale, di colore grigio-ferro, con splendore metallico, che è, molto probabilmente, ematite. Frequenti anche sono, però, i casi, nei quali i fascetti di ardennite si mostrano commisti a quelli di piemontite, formando nella quarzite delle strette zonature, alternate, costituite prevalentemente dall'uno o dall'altro dei due minerali, ovvero degli esili straterelli, nei quali piemontite ed ardennite sono confusamente intrecciate e commiste.

Nelle Ardenne, l'ardennite è accompagnata, nelle vene di quarzo attraversanti gli scisti paleozoici di quella formazione, da pirolusite e da albite: l'associazione con la piemontite, osservata nel giacimento di Ceres, rappresenta, perciò, una novità.

L'ardennite di Ceres è di colore bruno di colofonia più o meno cupo, corrispondente a quello di alcune delle varietà delle Ardenne. Non ho, finora almeno, osservato la varietà di colore giallo più o meno volgente all'aran-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

ciato, che è frequente nelle Ardenne. Lo splendore è vitreo un po' grasso: in alcuni campioni più finamente fibrosi diventa un poco setaceo.

Dato il modo di presentarsi dell'ardennite di Ceres, non ho potuto rinvenire cristalli nitidi, ben conformati. È abbastanza facile trovare dei frammenti, con delle faccie di {010}, di {100} e di {110}. Una sola volta ho osservato un cristallino terminato parzialmente ad un'estremità dell'asse c: si tratta di un piccolo cristallino tabulare secondo {010}, che presentava la combinazione {010} {100} {110} {101}. Qua e là nel quarzo ho veduto qualche cristallino distinto, ma sempre con faccie soltanto della zona [001]. Rompendo le masserelle fibrose, si isolano, talvolta, delle laminette appiattite parallelamente a {100}, precisamente come avviene, secondo Lacroix [1], nel minerale tipico delle Ardenne. Non di rado, però, l'appiattimento è solo apparente, e dovuto a combinazione oscillatoria di molti cristalli.

Le poche misure eseguite, puramente approssimative del resto, si accordano bene con i valori calcolati da vom Rath:

(100):(110)	= 25° 17′	mis.	25° 0′	calc.
(110):($\bar{1}$10)	129 57	»	130 0	»
(100):(101)	56 ca	»	56 5	»
(010):(101)	89 50	»	90 0	»

La sfaldatura è facile secondo {010}: si osserva anche nitida la separazione parallelamente a {001}, già notata nei cristalli delle Ardenne. A causa di questa separazione, i frammenti che si ottengono frantumando le masserelle di ardennite di Ceres sono spesso limitati da {010} e da {001}, ed allungati secondo l'asse a.

Le proprietà ottiche corrispondono a quelle già fatte conoscere per il minerale delle Ardenne da Des Cloizeaux e da Lacroix.

Il piano degli assi ottici è parallelo a {100}: la bisettrice acuta, positiva, è perpendicolare a {010}. La dispersione è forte, $\rho > v$.

Non ho potuto, finora, preparare una sezione parallela a (010) abbastanza trasparente e, nello stesso tempo, sufficientemente spessa, per misurare esattamente 2 E: i valori approssimativi che ho ottenuto fino ad oggi sono assai prossimi a quelli trovati da Des Cloizeaux. Il pleocroismo è forte:

n_g = giallo pallidissimo, alquanto verdastro n_m e n_p = giallo d'oro chiaro nelle lamine molto sottili;

n_g = giallo verdastro n_m e n_p = bruno rossiccio in quelle più spesse [2].

[1] *Minéralogie de la France et de ses Colonies*, I, 125.

[2] Come ha notato Lacroix nell'ardennite del Belgio, la differenza fra i colori nelle direzioni di n_m e di n_p è molto piccola. Nell'ardennite di Ceres è pure tenue, però, nettamente percepibile e, precisamente, l'assorbimento nella direzione di n_p è un po' più forte che in quella di n_m.

L'analisi chimica dell'ardennite di Ceres fu eseguita su materiale purificato ripetutamente e con gran cura, mediante lo joduro di metilene. La separazione totale del quarzo riesce, però, difficile, anche operando su polvere sempre più fina. In ogni trattamento, io ho sempre preso soltanto la porzione che precipitava immediatamente, con grande velocità, al fondo del separatore, trascurando quella che si depositava più lentamente. Ad onta di queste cure, l'analisi ha dato un lievissimo eccesso di biossido di silicio, che dipende, molto probabilmente, da quarzo che non si è riusciti a separare perfettamente. È noto che, quando si ha a che fare con inclusioni minutissime, la separazione con i liquidi pesanti non riesce. Così, per esempio, Penfield e Pratt (1) non poterono separare completamente il quarzo dalla staurolite.

L'analisi dell'ardennite di Ceres fu eseguita fondendo la polvere del minerale con carbonato e nitrato di sodio.

La massa fusa venne trattata con acqua, e l'estratto acquoso, intensamente verde, decolorato con acqua ossigenata pura. Il residuo insolubile in acqua fu nuovamente fuso con carbonato e nitrato di sodio, in modo da essere certi che l'arsenico ed il vanadio fossero stati completamente asportati.

Dai due estratti acquosi riuniti fu separato il silicio, mediante evaporazione a secco con HCl. Come si verifica di solito nei silicati che contengono meno di 40 % di SiO_2, la quantità di silicio passata nella soluzione fu scarsa. Eliminato il silicio, si precipitò l'arsenico con idrogeno solforato, e lo si dosò, poi, allo stato di piroarseniato di magnesio. Dopo scacciato l'acido solfidrico, venne precipitato l'alluminio con ammoniaca. La precipitazione fu ripetuta tre volte, perchè, come hanno già notato Bettendorff (2) e Prandtl (3), l'idrato di alluminio precipitato è sempre vanadinifero. Nell'ossido di alluminio da me ottenuto, mediante l'acqua ossigenata fu possibile svelare ancora la presenza di traccie di vanadio, che furono determinate colorimetricamente. L'ossido di alluminio conteneva anche alquanto fosforo, che fu precipitato allo stato di fosfomolibdato ammonico, usando la soluzione concentrata di molibdato ammonico proposta da Al. Gressly (4). Nel liquido dal quale si era separato l'alluminio, e che fu tirato a secco con acido nitrico, in modo da avere il vanadio certamente sotto forma pentavalente, questo elemento fu dosato colorimetricamente prima, e, poi, col cupferron, seguendo le indicazioni di W. A. Turner (5).

(1) *Ueber die chemische Zusammensetzung des Stauroliths,* ecc. Zeitsch. für Kryst. 1894, XXIII, 64.

(2) *Ueber den Ardennit und über eine Methode zur Scheidung der Vanadinsäure von Thonerde und Eisenoxyd.* Pogg. Ann. 1877, CLX, 126.

(3) *Ueber den Ardennit.* Zeitsch. für Kryst. 1905, XL, 392.

(4) Treadwell, *kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie,* II, 202.

(5) Amer. Journ. Sc. 1914 [4], XLI, 339.

La parte insolubile in acqua del prodotto della fusione del minerale con carbonato e nitrato sodico fu analizzata con i soliti metodi.

Mi è sorto il dubbio che, nel separare il silicio dall'estratto acquoso acidificato con HCl (metodo usato, fra gli altri, dal Prandtl), si potesse avere una perdita di arsenico. Ho, perciò, ripetuto la determinazione, acidificando *a freddo* con HCl la soluzione acquosa, il che avvenne senza che si separasse silice, e precipitando senz'altro l'arsenico con l'idrogeno solforato.

Si ottenne, così operando, una quantità di piroarseniato di magnesio un poco superiore a quella ottenuta prima.

L'analisi completa ha dato i seguenti risultati:

		Rapp. mol.		
SiO_2	29,53	0,490		2,06
As_2O_5	10,30	0,045		
P_2O_5	0,12	0,001	0,047	0,20
V_2O_5	0,25	0,001		
Al_2O_3	22,40	0,219	0,238	1
Fe_2O_3	3,11	0,019		
CuO	0,75	0,009		
CaO	5,61	0.101		
SrO, BaO [1]	tr.			
MnO	18,76	0,264	0,477	2.00
NiO	0,04	0,001		
MgO	4,03	0.100		
Na_2O	0,07	0,001		
K_2O	0,12	0.001		
H_2O —	0,12	—		
H_2O +	5,42	0,301		1,26
	100,63			

La composizione chimica dell'ardennite di Ceres corrisponde assai bene alla formula $10\,SiO_2 \cdot (As, V, P)_2O_5 \cdot 5\,(Al, Fe)_2O_3 \cdot 10\,(Mn, Mg, Ca, Cu) \cdot 6\,H_2O$ dell'ardennite tipica, la quale richiede che questi costituenti si trovino nel rapporto di 2:0,20:1:2:1,2.

Come è noto, l'ardennite di Salm Chateaux costituisce una serie pressochè completa di cristalli misti, composti da due termini estremi, uno poverissimo in vanadio, l'altro quasi privo di arsenico, che si possono distin-

[1] Questi elementi furono riconosciuti allo spettroscopio.

guere con i nomi di *arsenioardennite* e di *vanadioardennite*. L'ardennite di Ceres analizzata è un'arsenioardennite, ed è, anzi, la varietà più povera in vanadio che sia stata finora analizzata. L'arsenioardennite più pura di Salm Chateau è, infatti, quella studiata da Prandtl, la quale contiene, però, 0,81 % V_2O_5.

Nelle ardenniti belghe, Bettendorff ha indicato la presenza di traccie di P_2O_5, mentre Prandtl non ricorda affatto il fosforo, la cui presenza è assolutamente sicura nell'ardennite di Ceres. Il nichelio e i metalli alcalini non sono stati, finora, determinati nelle ardenniti belghe. Molto notevole è l'elevato tenore in calcio dell'arsenioardennite di Ceres. Nelle varietà belghe questo elemento, infatti, è stato trovato in quantità molto minori: soltanto in una delle analisi di Pisani sale a 2,98 % [1]. Interessante è anche il contenuto in rame della nostra ardennite. Nelle varietà delle Ardenne, il rame talvolta non è indicato affatto o è dato come presente in traccie. Bettendorff, in due analisi, ha trovato 0,22 % e 0,17 % CuO: nella sua prima analisi inesatta, Pisani dà 1,30 % CuO. È probabile che allora il Pisani abbia pesato col rame anche dell'arsenico, tanto più che questo elemento gli era sfuggito. Nell'ardennite di Ceres analizzata, il rame fu dosato nel residuo insolubile in acqua del prodotto della fusione del minerale con carbonato e nitrato sodico, residuo che era assolutamente privo di arsenico. Inoltre, il precipitato ottenuto con l'idrogeno solforato dopo la separazione della silice fu trattato con solfuro sodico, e si constatò, poi, l'assenza del piombo o di altri elementi nell'ossido rameico pesato.

Bettendorff aveva osservato, nelle ardenniti da lui studiate, che il colore diventa sempre più chiaro, man mano che aumenta la quantità dell'arsenico. L'arsenioardennite di Ceres, al contrario, possiede un colore abbastanza cupo, e deve ritenersi, perciò, che la distinzione dell'arsenio dalla vanadioardennite non può farsi in base al colore. Del resto, le osservazioni di Bettendorff non hanno validità generale nemmeno per le ardenniti belghe. Infatti, l'arsenioardennite analizzata da Prandtl era di colore bruno di colofonia, come certi termini fortemente vanadiniferi.

[1] Nella prima analisi di Pisani è dato CaO = 4,30 %, ma si tratta di un'analisi inesatta, nella quale si ha 1,80 % V_2O_5 e niente As_2O_5.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré*. Nota di N. ABRAMESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota testè apparsa in questi Rendiconti (1) ho indicato alcuni risultati da me conseguiti in uno studio sistematico delle serie di polinomi nel campo complesso. Chiedo il permesso di completare il riassunto delle mie ricerche riferendomi senz'altro alla Nota precedente per il significato dei simboli e per la numerazione dei §§.

VI. Valendomi del valore assintotico di I_n, trovo un altro modo di determinare la regione di convergenza delle *serie di Darboux*, servendomi della relazione di ricorrenza fra tre polinomi consecutivi, osservando che queste serie sono un caso particolare delle *serie di Poincaré* (2), dove esiste una relazione tra k polinomi consecutivi,

$$R_k(x)\,P_{n+k}(x) + R_{k-1}\,P_{n+k-1}(x) + \cdots + R_0(x)\,P_n(x) = 0 \;,\quad \sum a_n\,P_n(x)\,.$$

Con uno qualunque di questi tre mezzi, ottengo le curve di convergenza per mezzo di una trasformazione conforme (3).

VII. Servendomi dei valori prossimi di $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, dimostro che lo sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ dell'elemento di Cauchy, $\dfrac{1}{x-y}$, è valevole nell'interno dell'ellissi coi fuochi in 0 ed 1 (oppure a e b) che passa per y. Arrivo in questo modo a dimostrare che una funzione $f(x)$, regolata nell'interno di una corona determinata da due ellissi omofocali, coi fuochi in a e b, si sviluppa in serie di polinomi $P_n(x)$ e funzioni $Q_n(x)$,

$$f(x) = \sum A_n\,P_n(x) + \sum B_n\,Q_n(x)\,,$$

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_E f(y)\,Q_n(y)\,dy \quad,\quad B_n = -\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_E f(y)\,P_n(y)\,dy\,.$$

(1) Fasc. 3°, 1° sem. 1922, pag. 89.

(2) Vedi la Memoria dell'American Journal (vol. VII) già citata nella Nota precedente.

(3) Bisogna osservare che il metodo del sig. Faber, di studiare la regione di convergenza delle serie di polinomi per mezzo di una trasformazione conforme, è stata proposta, 45 anni or sono, da Darboux, coll'occasione dello studio del caso particolare nel quale il polinomio $P_n(x)$ è quello che risulta dalla serie ipergeometrica.

VIII. 1°. Studio infine il *caso generale delle serie di Darboux*, $\sum a_n P_{pn}(x)$, il polinomio [1] $P_{pn}(x)$ essendo da $p.n$ equazioni lineari

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x)\, x^s\, P_{pn}(x)\, dx = 0\,, \quad q = 0, 1, \dots p\,; \quad s = 0, 1, \dots n-1\,,$$

p ed $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ essendo numeri dati, e $\varphi(x)$ una funzione positiva e integrabile negli intervalli $(a_0, a_1), \dots, (a_{p-1}, a_p)$.

2°. I risultati che trovo sono strettamente connessi con l'espressione che ho ottenuto per il polinomio $P_{pn}(x)$,

$$P_{pn}(x) = \frac{1}{n!\,\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a_0)^n (x-a_1)^n \dots (x-a_p)^n\, \psi_n(x)\Big].$$

3°. Considerando, come nel caso $p = 1$, le serie di polinomi $P_{pn}(x)$ ai quali corrisponde la funzione $\psi_n(x)$ indipendente da n, risulta che $\varphi(x)$ è soluzione comune ad un'infinità di equazioni integrali. In questo caso, come nel caso quando $\varphi(x) = \psi_n(x)$, dimostro che il polinomio $P_{pn}(x)$ è il coefficiente del termine generale di una serie di Lagrange.

4°. Che questo polinomio verifica un'equazione differenziale lineare, di ordine $(p+1)$, completamente integrabile.

5°. Trovo il valore prossimo del polinomio $P_{pn}(x)$; infine trovo il domenio di convergenza delle serie generalizzate di Darboux, $\sum a_n P_{pn}(x)$.

6°. Nel caso $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ritrovo i polinomi del sig. Appell [2]

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\Big[x^n (1-x^2)^n\Big],$$

ai quali trovo una funzione generatrice, un valore prossimo e il dominio di convergenza delle serie $\sum a_n P_{2n}(x)$.

(1) Vedi certe proprietà di questi polinomi nella Nota del sig Angelescu. *Sur une classe de polynômes à une variable* (Comptes Rendus, t. 162, Janv. 1916).

(2) Appell, *Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles* [Archiv der Mathematik und Physik, 1 (1901), pag. 71].

Matematica. — *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Darboux sont planes.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI.

Les coordonnées tangentielles homogènes z, d'une surface quelconque, rapportée aux lignes asymptotiques, satisfont, si l'on choisit convenablement le facteur de proportionnalité, aux équations ([1])

$$(1) \qquad z_{uu} = 2bz_v + cz \;,\; z_{vv} = 2a'z_u + dz \,.$$

L'expression

$$\mathrm{P} = [-12\,a'^2\,b\tau^2 + (a'_v b - a' b_v)\,\tau + a'_u b - a' b_u]\,z - 6\,a'b(z_u - \tau z_v)\,,$$

où $a'\tau^3 + b = 0$, représente ([2]) le plan osculateur d'une ligne de Darboux (à osculation quadrique) de la surface. On déduit, en faisant usage des conditions d'intégrabilité du système (1), l'identité

$$6(\mathrm{P}_u + \tau\,\mathrm{P}_v) - \mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau\frac{\partial}{\partial v}\right)\log a'^5\,b^7 =$$

$$= a'bz\left\{\left[6\,\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log\frac{a'}{b} - \left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{a'}{b}\right)^2 - 36\left(a'_u + \frac{a'}{b}\,b_u - d\right)\right]\tau^2 + \right.$$

$$\left. + 12\,\tau\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{a'}{b} + 6\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{a'}{b} + \left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{a'}{b}\right)^2 + 36\left(b_v + \frac{a'}{b}\,a'_v - c\right)\right\}.$$

Pour les surfaces en question, le second membre s'évanouit identiquement en τ. On peut donc faire ([3]), dans ce cas,

$$a' = b = \varphi \;,\; c = 2\varphi_v \;,\; d = 2\varphi_u \,,$$

ainsi que les équations (1) sont

$$(2) \qquad z_{uu} = 2(\varphi z_v + \varphi_v z) \;,\; z_{vv} = 2(\varphi z_u + \varphi_u z)\,,$$

où φ satisfait les conditions d'intégrabilité

$$(3) \qquad \varphi_{uu} = 2\,\varphi\varphi_v \;,\; \varphi_{vv} = 2\,\varphi\varphi_u \,.$$

Je vais montrer qu'on peut intégrer (2), mais, pour brièveté, j'écarte les cas aisés où φ est fonction d'une seule des quantités

$$(4) \qquad x_i = \varepsilon^{2i}\,u + \varepsilon^i\,v \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}} \;,\; i = 0\,,1\,,2).$$

[1] Les indices $u\,,v$ signifient partout les dérivées partielles.

[2] En ce sens que les coordonnées de ce plan s'obtiennent en remplaçant z par les coordonnées du plan tangent de la surface.

[3] Si l'on a $\dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\dfrac{a'}{b}\right) = 0$ (surfaces isothermo-asymptotiques de M. Fubini), on peut faire $a' = b$ par un changement des paramètres $u\,,v$.

Tout d'abord remarquons que

(5) $$f(x_i) = \varepsilon^i \varphi_u + \varepsilon^{2i} \varphi_v + \varphi^2$$

est, en vertu de (3), une fonction de x_i seul et satisfait à l'équation

(6) $$f'''(x_i) = 4f(x_i)\, f'(x_i).$$

Ceci étant, on peut, dans le cas actuel, représenter le plan osculateur d'une ligne de Darboux par l'expression

(7) $$Q_i = \varepsilon^{2i} z_u + \varepsilon^i z_v - 2\varphi z,$$

qui vérifie, d'après (2), l'équation différentielle

(8) $$\frac{d^3 Q_i}{dx_i^3} = 4 \frac{d}{dx_i} [f(x_i)\, Q_i].$$

Grâce à (6), on remonte de l'équation (8) à la suivante

(9) $$\frac{Q_i}{f'(x_i)} + a \int \frac{f(x_i)\, dx_i}{[f'(x_i)]^2} + b \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} = c_i,$$

a, b, c_0, c_1, c_2 étant des constantes, dont les deux premières ne dépendent pas de l'indice i, car on trouve

(10) $$a = (\varphi_{uv} - 4\varphi^3)\, z - \varphi_v z_u - \varphi_u z_v + \varphi z_{uv},$$

(11) $$b = \varphi(2\varphi_u \varphi_v - 3\varphi\varphi_{uv} + 4\varphi^4)\, z + (\varphi^2 \varphi_v - \varphi_u^2)\, z_u + \\ + (\varphi^2 \varphi_u - \varphi_v^2)\, z_v + (\tfrac{1}{2} \varphi_{uv} - \varphi^3)\, z_{uv}.$$

Pour trouver la relation qui passe nécessairement entre les constantes a, b, c_i, on commence par eliminer z des équations (7), (10), (11), ce qui donne

(12) $$\Theta_0 Q_0 + \Theta_1 Q_1 + \Theta_2 Q_2 = 3\varphi(\varphi_{uv} - 2\varphi^3)\, a - 6\varphi^2 b,$$

où j'ai posé

$$\Theta_i = 2\varphi\, \varphi_u \varphi_v - \tfrac{1}{2} \varphi_{uv}^2 + \varepsilon^i \varphi(\varphi_u \varphi_{uv} - 2\varphi\, \varphi_v^2) + \varepsilon^{2i} \varphi(\varphi_v \varphi_{uv} - 2\varphi\, \varphi_u^2).$$

Or l'identité

$$f'(x_i) = \varphi_{uv} + 2\varepsilon^i \varphi\varphi_u + 2\varepsilon^{2i} \varphi\varphi_v$$

donne par multiplication

(13) $$\Theta_i f'(x_i) = 6\varphi^2 \varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} - \tfrac{1}{2} \varphi_{uv}^3 - 4\varphi^3(\varphi_u^3 + \varphi_v^3) \equiv \Theta,$$

où Θ ne contient plus l'indice i. Si l'on introduit encore les valeurs des Q_i tirés de l'équation (9), l'identité (12) donne

$$\left[\sum_{i=0}^{2} \int \frac{f(x_i)\, dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{3\varphi(2\varphi^3 - \varphi_{uv})}{\Theta}\right] a + \\ + \left[\sum_{i=0}^{2} \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{6\varphi^2}{\Theta}\right] b = c_0 + c_1 + c_2.$$

Les deux constantes a et b étant manifestement indépendentes, les deux quantités entre crochets sont des constantes et l'on a simplement, en dispo-

sant convenablement des limites inférieures des intégrales,

$$(14)\qquad \sum_{i=0}^{2}\int\frac{f(x_i)\,dx_i}{[f'(x_i)]^2}=\frac{3\varphi(2\varphi^3-\varphi_{uv})}{\Theta}\;,\quad \sum_{i=0}^{2}\int\frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2}=\frac{6\varphi^2}{\Theta}\,,$$

$$(15)\qquad c_0+c_1+c_2=0\,.$$

L'identité

$$Q_0+Q_1+Q_2=-6\varphi z$$

donne maintenant les solutions du système (2). Mais c'est l'interprétation géométrique du procédé employé qui donne des résultats intéressants. Tout d'abord, l'équation (8) étant du troisième ordre seulement, les plans des lignes de Darboux de chaque famille enveloppent un cône [1]. On voit aussi que ces trois cônes sont homographiques, si nous faisons correspondre les plans tangents appartenant à une même valeur du paramètre qui est, respectivement, x_0, x_1, x_2. D'autre part, si l'on pose la relation trilinéaire

$$x_0+x_1+x_2=0\,,$$

les trois cônes engendrent, par les intersections des plans tangents, la surface cherchée. Passons au fait que a et b ne dépendent pas de i. Ceci donne, en premier lieu, que les sommets des trois cônes sont situés en ligne droite, tout les plans contenant celle-ci étant de plus unis dans les homographies qui ont lieu entre les cônes. Ces homographies sont donc des simples perspectivités, et les plans de perspectivité forment d'ailleurs nécessairement un faisceau. Enfin, d'après (15), entre les sommets des cônes et ces plans passe la bien connue relation d'une forme cubique binaire et son covariant cubique [2].

Essentiellement, trois cas sont possibles

$$-\varphi=\zeta x_0+\zeta x_1+\zeta x_2\,,$$

(cas général), ou

$$-\varphi=\operatorname{cotg} x_0+\operatorname{cotg} x_1+\operatorname{cotg} x_2\quad,\quad -\varphi=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\,.$$

Dans le cas général, on voit que l'on a

$$f(x_i)=3\wp x_i\;,\;\varphi^2=\wp x_0+\wp x_1+\wp x_2\,,$$

$$\Theta=-\frac{27}{2}\wp'x_0\,\wp'x_1\,\wp'x_2\;,\;\varphi(2\varphi^3-\varphi_{uv})=\wp x_0\wp x_1+\wp x_0\wp x_2+\wp x_1\wp x_2+\tfrac{3}{4}g_2\,.$$

On peut donc, dans les équations (14), choisir zéro comme limite inférieure des intégrales.

[1] Si φ est fonction de x_i seul, les plans des courbes de Darboux $x_i=$ constante forment un faisceau. Ces courbes sont des simples coniques et les courbes conjuguées sont planes.

[2] Ces plans coupent la surface en courbe de Segre particulières

$$x_0-x_1=0\;,\;x_1-x_2=0\;,\;x_2-x_0=0\,.$$

Fisica. — *Sulla dispersione della luce nelle soluzioni fluorescenti.* Nota del dott. Antonio Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone.

Mi sono posto il seguente problema: con sostanze fluorescenti che presentano un cospicuo assorbimento ed un'intensa fluorescenza, esistono due tipi distinti di vibratori e quindi due corrispondenti anomalie dell'indice di rifrazione, una relativa alla zona di emissione l'altra a quella di assorbimento?

La ricerca sperimentale con lo spettrometro dette un risultato negativo, in quanto che nello illuminare la soluzione, che riempiva il prisma cavo, non si notò alcun sensibile spostamento della riga di lunghezza d'onda 5893 Å centrata nel cannocchiale nella posizione della deviazione minima. Nè più fortunati furono i tentativi fatti con il refrattometro interferenziale di Jamin, quando, prodotte le frange monocromatiche relative a $\lambda = 5893$, veniva illuminata una delle due vaschette piene della soluzione in esame: adunque, per la luce impiegata, la presenza di oscillatori emittenti in una delle due vaschette, non produceva un'alterazione sensibile nel cammino ottico (1).

Si pensò, infine, di attuare un altro metodo sintetico, che desse rapidamente modo di analizzare il fenomeno in un esteso campo di frequenze e non più per una frequenza unica.

Si adoperò allo scopo il refrattometro di Jamin, analizzando spettroscopicamente le frange iridescenti ottenute con una sorgente molto intensa. Nelle due parti della vaschetta si pose acqua e soluzione acquosa fluorescente scegliendo quelle con grossa banda di emissione, onde si prestarono molto bene alcune sostanze del gruppo del trifenilmetano e precisamente le seguenti: *eosina*, *eritrosina*, *rodamina B*, *rodamina G 6*, *uranina*.

In queste soluzioni poste in uno dei due scompartimenti della vaschetta la fluorescenza veniva eccitata dallo stesso fascio luminoso che produceva le frange. Disposta in tal modo l'esperienza, si potè osservare che effettivamente esisteva l'effetto ricercato; le frange cioè apparivano distorte per la presenza dell'assorbimento con l'andamento caratteristico della dispersione anomala; ma *anche nella zona corrispondente alla emissione si notava una visibile anomalia*: le frange presentavano infatti un doppio flesso, però quello relativo alla emissione era molto meno marcato.

(1) Queste esperienze furono condotte con soluzioni di solfato di uranio.

Per procedere alle misure si usò il seguente metodo: si fissava mediante i due fili del reticolo del cannocchiale annesso allo spettroscopio la posizione intermedia di due frange nell'estremo rosso visibile e si notava la lunghezza d'onda relativa; si spostava quindi mediante vite micrometrica il cannocchiale riportando il reticolo nella stessa posizione, ma relativamente alla frangia successiva, notando ancora la corrispondente lunghezza d'onda. Così si procedeva per tutto lo spettro: riportando questi valori di λ in ascisse con valori delle ordinate corrispondenti crescenti come 1, 2, 3... si poteva ricostruire l'andamento della frangia da quello della curva così tracciata. I risultati sono riassunti nella fig. 1: le prime due curve si rife-

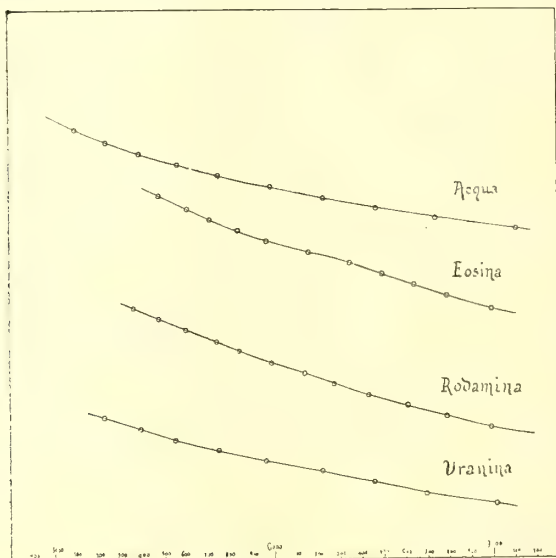



Fig. 1.

riscono all'eosina; e, come vedesi, si ha un andamento curvilineo prima della scomparsa delle frange, verso 5300, per l'azione assorbente. Con una soluzione meno concentrata (curva β) si è potuto seguire il fenomeno anche attraverso la zona assorbita, per potere così porre chiaramente in vista il doppio flesso.

Analizzando il fenomeno con soluzioni fluorescenti diverse, si è potuto sempre riscontrare la presenza di questo andamento anomalo nella zona corrispondente alla emissione, ma con modalità che variano da sostanza a sostanza, e ciò certamente in relazione alla diversa legge di distribuzione dell'energia delle radiazioni emesse per fluorescenza; in altri termini, in relazione al diverso spettro di fluorescenza.

Il comportamento dell'uranina è interessante poichè in essa la zona di emissione si trova più vicina alla zona di assorbimento che non per l'eosina, quindi l'effetto suddetto si può meglio apprezzare.

Nella rodamina B e nella rodamina G 6 il secondo flesso è esteso invece su più larga zona e verso le grandi lunghezze d'onda.

Anche nell'eritrosina l'effetto è nettamente apprezzabile. Le concentrazioni che ho adoperate, per trovarmi nelle condizioni più opportune, si mantengono sempre nello stesso ordine di grandezza (da circa 10^{-5} a 10^{-6}).

Infine per accertare in modo assoluto l'effetto ho pensato di studiare il fenomeno con una nuova disposizione sperimentale: le due vaschette erano riempite, non più una con soluzione e l'altra con acqua, ma entrambe con soluzione fluorescente; però uno dei due scompartimenti era protetto lateralmente da schermi, in modo che la luce che l'attraversava proveniva soltanto da quella della sorgente riflessa dal primo specchio; l'altro scompartimento era invece intensamente illuminato con specchi opportunamente disposti. I due scompartimenti si differenziavano quindi per una grande diversità nell'intensità della fluorescenza; e se una differenza di cammino ottico veniva a prodursi per questo fatto, bisognava notare una distorsione delle frange, che in caso contrario si sarebbero mostrate regolari, in relazione all'andamento caratteristico di due percorsi otticamente equivalenti. I risultati sono riassunti nella fig. 2: le curve ottenute col medesimo metodo di prima *mostrano nelle rispettive zone di emissione una sensibile anomalia.* È da notare che le lunghezze d'onda relative alle zone di maggiore anomalia non portano a valori di λ_m coincidenti con quelli ottenuti da altri sperimentatori con ricerche spettrofoto-

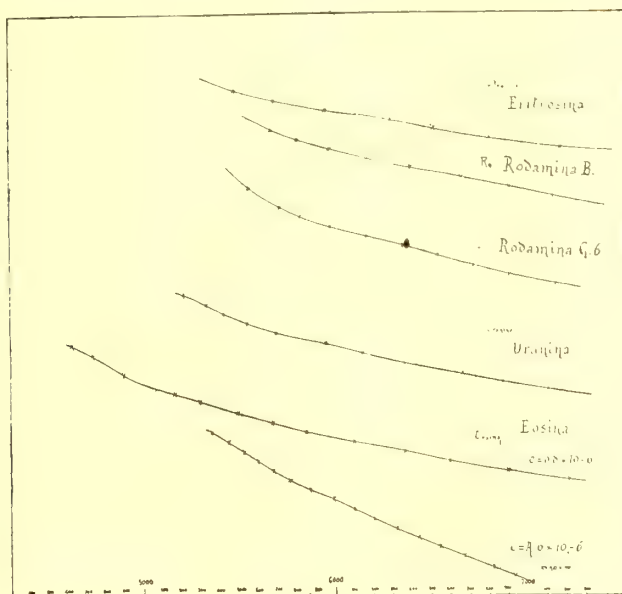



Fig. 2.

metriche [1]. Questo disaccordo può avere la sua origine dal fatto che per tutte le sostanze studiate lo spettro di emissione non si estende simmetricamente rispetto al massimo ed inoltre invade anche la zona di assorbimento. Ciò produce un disturbo nella distribuzione della velocità di propagazione poichè non è presente una sola frequenza caratteristica ma tutto un campo di tali frequenze e quando un fascio policromatico attraversa la sostanza, tutte queste entrano in gioco ma con intensità, dipendente sia dalla relativa intensità di emissione, sia dalla facilità di vibrazione per risuonanza; per cui gli effetti finali che si osservano con lo studio della dispersione sono risultanti dal complesso dei disturbi che entrano in gioco.

Per ciò che si riferisce all'influenza termica dipendente dall'azione della sorgente in uno dei due scompartimenti, devo dire che se ne tenne conto compensando i piccoli spostamenti delle frange, e che in ogni modo la dissimetria non era di natura tale da produrre una distorsione.

Concludendo:

a) nelle sostanze fluorescenti la presenza di vibratori emittenti modifica la curva di dispersione in modo analogo all'azione esercitata dai vibratori assorbenti;

b) le varie sostanze studiate si differenziano tra di loro riguardo a questo effetto per intensità e distribuzione;

c) il flesso di emissione è meno accentuato di quello di assorbimento.

Rendo vive grazie al prof. Cantone per i consigli datimi ed i mezzi posti a mia disposizione.

Fisica terrestre. — *Risultati di misure attinometriche eseguite a Catania.* Nota II del prof. Giovanni Trovato, presentata dal Corrispondente Bemporad.

Per studiare la variazione del cofficiente di assorbimento colla inclinazione dei raggi, ho calcolato dapprima i valori di q corrispondenti alle distanze zenitali 30°, 40°, 60° e 70°, sia per le osservazioni fatte al mattino, sia per quelle fatte al pomeriggio. Per facilitare i confronti ho raggruppato in medie i diversi valori, limitatamente agli intervalli 22-31 agosto mattina e 20-31 agosto pomeriggio. Indicando con z le distanze zenitali, ho così ottenuto:

MATTINO					POMERIGGIO				
z	30°	40°	60°	70°	z	30°	40°	60°	70°
Plaia . .	$q=11{,}93$	11,27	8,03	4,97	Plaia .	$q=11{,}93$	11,33	8,69	6,01
Osservat.	$q'=12{,}61$	11,74	9,02	6,45	Osservat.	$q'=13{,}41$	13,11	11,67	9,77

[1] Nicols and Merritt, Annate della Phys. Rev. dal 1906 al 1914.

Ho calcolato, infine, i valori del coefficiente di assorbimento c mediante la formula:

$$c = \frac{\log q' - \log q}{m}$$

ove q' e q sono i precedenti valori medi della intensità della radiazione solare rispettivamente all'Osservatorio ed alla Plaia per le diverse distanze zenitali ed m sono le rispettive masse di aria attraversate dai raggi.

Come valori medi del coefficiente di assorbimento ho così ottenuto:

MATTINO				POMERIGGIO			
30°	40°	50°	70°	30°	40°	50°	70°
$c = 2{,}7$	1,8	3,3	5,1	$c = 5{,}7$	6,4	8,3	9,5

Si riconosce dunque:

1) *Che tanto nelle osservazioni fatte al mattino quanto in quelle fatte al pomeriggio, lo strato di aria di soli 62 metri, compreso fra la Plaia ed il R. Osservatorio di Catania, esercita un forte assorbimento sulla radiazione calorifica solare.*

2) *Che i valori del coefficiente di assorbimento corrispondenti alle osservazioni fatte al pomeriggio sono circa il doppio di quelli corrispondenti alle osservazioni del mattino.*

3) *Che il coefficiente di assorbimento aumenta coll'aumentare la distanza zenitale dei raggi.*

Determinando i valori medi dell'umidità per la mattina e il pomeriggio, si ottiene:

MATTINO	Tensione del vapore	Umidità relativa	POMERIGGIO	Tensione del vapore	Umidità relativa
Plaia	15,^{mm}0	56	Plaia	16,^{mm}3	62
Osservatorio	12,8	42	Osservatorio	14,5	48

La diminuzione di trasparenza dell'aria dal mattino al pomeriggio si può dunque spiegare come dovuta all'aumento di umidità prodotta dall'evaporazione dell'acqua del mare ed al forte potere assorbente del vapor d'acqua per le radiazioni calorifiche.

La conclusione poi che *il coefficiente di assorbimento aumenta coll'aumentare la distanza zenitale dei raggi, costituisce un risultato diametralmente opposto a quello trovato dal Prof. A. Bemporad per le regioni elevate* e che si attribuisce al fenomeno dell'assorbimento selettivo della radiazione solare nell'atmosfera terrestre, come ho in principio detto. Ne concludiamo adunque *che nello strato più basso dell'atmosfera i fenomeni dell'assorbimento selettivo appaiono completamente invertiti per la presenza antagoni-*

stica di altri fattori, nei quali ha certo gran parte la distribuzione del vapore d'acqua e del pulviscolo.

Mi è grato di esternare i più vivi ringraziamenti al Prof. A. Bemporad, direttore del R. Osservatorio di Capodimonte (Napoli), ed al Professor Giovanni Platania per gli affettuosi consigli dei quali mi sono stati larghi nel presente lavoro.

Chimica. — *Sulla solubilità allo stato solido del bismuto e del cadmio nel piombo.* Nota di Clara Di Capua, presentata dal Corrisp. N. Parravano.

Come è noto, il metodo di ricerca che va col nome di analisi termica non consente, nella maniera in cui viene ordinariamente adoperato, una misura rigorosa dei tempi di arresto. Esso permette perciò solo conclusioni approssimate nei riguardi dei punti caratteristici di un diagramma di stato: composizione degli eutettici, dei composti, dei cristalli misti saturi, ecc.

Un metodo preciso è quello impiegato da Mazzotto per un certo numero di coppie di leghe facilmente fusibili già in una epoca in cui mancavano ancora le basi teoriche per la conoscenza della intima struttura delle leghe [1].

Mazzotto ha calcolato dalle velocità di raffreddamento e riscaldamento delle leghe, le quantità di calore che vengono svolte e rispettivamente assorbite da 1 Kg. di lega durante il compiersi delle variazioni di stato. Rappresentando graficamente queste quantità di calore in funzione della temperatura, egli ottenne delle curve che hanno lo stesso aspetto delle ordinarie curve temperatura-tempo (curve di riscaldamento e raffreddamento). Anche nelle curve del Mazzotto, come in queste, l'inizio della cristallizzazione si avverte con un gomito, la solidificazione eutettica con un tratto orizzontale: questo tratto orizzontale è proporzionale alla quantità di eutettico esistente nella lega e si può utilizzare per costruire i diagrammi.

Il metodo del Mazzotto è lungo a eseguirsi e in alcuni casi, che indicherò in seguito, per le condizioni sperimentali in cui si opera, dà resultati meno vicini al vero che gli altri metodi.

Fra questi più semplice e di manualità più facile è il metodo adoperato da Plato [2] per la misura dei calori di fusione di alcuni sali e per la costruzione dei diagrammi di fusione esatti di alcune coppie saline. Esso consiste nel regolare la velocità di raffreddamento del forno in modo che le temperature che questo va successivamente assumendo vengano a trovarsi sopra una linea retta: ciò si ottiene diminuendo lentamente e regolarmente

(1) Memorie dell'Istituto Lombardo [3] 7, 1 (1891).

(2) Zeit. Phys. Ch., *55*, 721 (1906); *58*, 350 (1907).

l'apporto di calore al forno, a mezzo di una resistenza mobile sussidiaria, in un circuito di cui è parte la spirale che riscalda il forno stesso.

Le curve, che con tale metodo si ottengono, permettono:

1° di calcolare i tempi di arresto riferiti all'unità di massa di sostanza che solidifica;

2° di calcolare i tempi di arresto riferiti all'unità di massa di sostanza per una velocità di raffreddamento uguale in tutti i casi a 1;

3° di calcolare i calori di fusione delle sostanze dal confronto dei resultati ottenuti con corpi a calore di fusione noto.

È possibile, secondo Plato, arrivare a calcolare pure i calori specifici; ai nostri scopi però questi non hanno interesse.

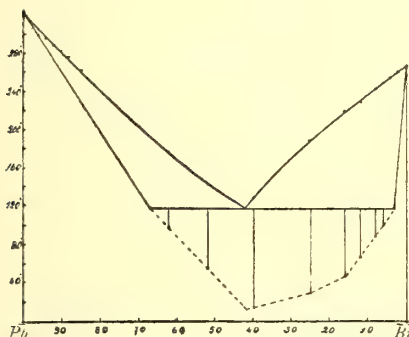



Fig. 1.

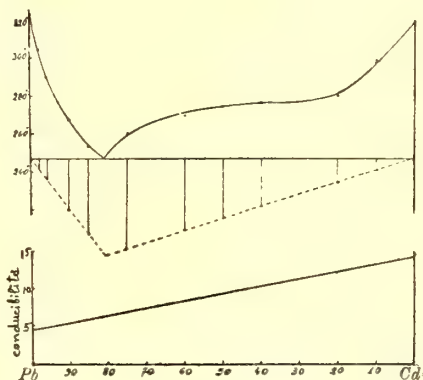



Fig. 2.

Il metodo di Plato non ha avuto fino ad ora alcuna altra applicazione oltre quelle fattene dall'autore stesso. Mi è sembrato pertanto opportuno applicarlo allo studio di leghe metalliche per descriverne diagrammi esatti.

I risultati ottenuti per le coppie Pb-Bi e Pb-Cd sono riportati nei due diagrammi (fig. 1 e 2).

I tempi di arresto riportati sui diagrammi si riferiscono alla massa 1 e alla velocità 1. Essi sono stati ricavati nella stessa maniera indicata da Plato per i corpi puri. È facile infatti dimostrare che anche per gli eutettici sono applicabili le costruzioni e le formule di Plato.

Le leghe di Pb-Bi sono state studiate da un gran numero d'autori (1). Il diagramma adottato per esse e riportato anche nelle tabelle del Landolt è quello di Stoffel (2). Secondo esso, l'eutettico contiene circa il 42 % di Pb e i limiti di solubilità allo stato solido di Bi in Pb e di Pb in Bi sono a circa il 10 % in entrambi i casi.

Questi valori sono certamente inesatti.

(1) Mazzotto (loc. cit.); Heicock e Neville, J. Chem. Soc., *61*, 904 (1892); Charpy, *Contribution à l'étude des alliages*, Paris, 1901, p. 220; Shepherd, Chemisches Centralblatt, 1903, I, 223 e 435; Barlow, Zeit. anorg. Chemie, *70*, 183 (1911).

(2) Zeit. anorg. Ch., *53*, 150 (1907).

Estrapolando i valori di Mazzotto dalla parte del Bi si arriva alla conclusione che al massimo l'1 % di Pb si può sciogliere nel Bi alla temperatura eutettica; ma neanche questo resultato può essere accettato.

E infatti basta pensare al modo di operare di Mazzotto (egli portava le leghe a fusione e poi immergeva crogiuolo con lega in un ambiente raffreddato a 0°) per dedurne che egli si trovava in presenza di velocità di raffreddamento eccessivamente forti le quali possono non permettere ai cristalli misti di omogeneizzarsi come richiederebbe la teoria, per modo che arrivano a cristallizzare in corrispondenza dell'eutettico anche leghe che dovrebbero essere costituite solo da cristalli misti omogenei.

E ciò è evidente perchè dai resultati di Barlow si arriva ad un tenore del 14 % di Pb nel Bi.

Per la solubilità solida del Bi nel Pb, dai calori di fusione di Mazzotto si ricava 64-65 % Pb, e dai valori di Barlow 68-69.

Dal diagramma riportato si ricava invece per il Pb nel Bi una solubilità solida del 4 % e per il Bi nel Pb una solubilità solida del 34 %. Il primo valore si differenzia da quello di Mazzotto; il secondo concorda bene.

È notevole che mentre dal lato del Pb i tempi variano linearmente, dal lato invece del Bi essi variano secondo una curva. È difficile dire a che cosa sia dovuta questa variazione non lineare: forse può pensarsi che possa avervi influenza la lentezza di diffusione del Pb nel Bi e quindi la velocità di raffreddamento. Con un raffreddamento molto più lento, in questo caso, anche dal lato del Bi i tempi di arresto dovrebbero presentare una variazione lineare.

Ad ogni modo la concordanza con i valori di Mazzotto è sufficiente: identità come si è visto non poteva aspettarsi data la differenza notevolissima nelle velocità di raffreddamento.

Le velocità con cui ho lavorato nel caso delle leghe Pb-Bi oscillavano di poco intorno a 1°,4 al minuto.

I risultati ottenuti per le leghe di Pb-Cd sono riassunti nel diagramma della fig. 2.

Come si vede, in questo caso non esiste quasi affatto solubilità solida del Pb nel Cd e viceversa. Questa conclusione non concorda con quanto finora si riteneva in proposito, giacchè il diagramma che si accettava per queste leghe e che è riportato nelle tabelle di Landolt, ammette una solubilità del 4 % circa di Cd nel Pb.

Le mie conclusioni sono state convalidate anche dalla misura delle conducibilità specifiche. Queste variano linearmente dalla conducibilità del piombo a quella del cadmio, ed il diagramma relativo (fig. 2) esclude perciò senz'altro l'esistenza di solubilità solida.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 3°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 9°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 8°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 5.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 5°

Seduta del 5 marzo 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

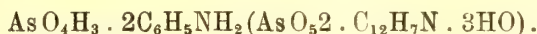
Seduta del 5 Marzo 1922.

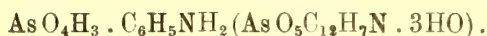
V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sugli arseniati di anilina.* Nota del Socio E. PATERNÒ.

L'arseniato di anilina fu preparato la prima volta da Béchamp e descritto come una sostanza cristallizzata che fonde a 140° e che corrisponde alla formola del biarseniato

$$AsO_4H_3 . 2C_6H_5NH_2 (AsO_52 . C_{12}H_7N . 3HO) .$$

Riscaldando questo sale a 180° il Béchamp ha osservato che distilla anilina e resta un residuo che ha sensibilmente la composizione di un arseniato acido

$$AsO_4H_3 . C_6H_5NH_2 (AsO_5C_{12}H_7N . 3HO) .$$

Avendo avuto occasione di preparare questi sali ho creduto non inutile studiarli meglio.

E poichè dagli studî di Béchamp risulta la esistenza di un arseniato bianilico, che riscaldato a 180° perde anilina, e si trasforma in un sale non definito della composizione sensibilmente corrispondente a quello mono anilico, ho voluto prima di ogni altro vedere se era possibile ottenere i tre arseniati prevedibili, combinando cioè l'acido arsenico con una, due o tre molecole di anilina.

L'esperienza ha mostrato che qualunque sia il rapporto nel quale si fanno reagire a freddo ed in soluzione acquosa l'acido arsenico con l'anilina si ottiene sempre ed esclusivamente il sale bianilico fusibile, secondo

Béchamp, a 140°, restando libero l'eccesso di acido arsenico o l'eccesso di anilina.

Questo sale pochissimo solubile nell'acqua fredda, si scioglie molto bene nell'acqua bollente e nell'alcool e si ottiene in magnifiche e larghe lamine molto sottili perfettamente incolore e trasparenti, che si riferiscono per le proprietà ottiche al sistema trimetrico, ma che non è stato possibile di ottenere in cristalli misurabili.

Il sale cristallizzato dall'acqua non contiene acqua di cristallizzazione, ma resta sempre un poco umido ed attaccaticcio; non può disseccarsi nemmeno per riscaldamento; in un essicatore in presenza del cloruro di calcio alla temperatura ordinaria perde circa 0,5 %. Il miglior processo per disseccare questo sale è quello di lasciarlo alla temperatura ordinaria in un essiccatore in presenza di anilina di *recente distillata.* Gr. 2,5250 perdettero in queste condizioni in 12 ore circa 1 % di peso.

La determinazione dell'arsenico, fatta sopra campioni di differente preparazione e cristallizzati dall'alcool o dall'acqua ha dato in media

Arsenico 22,74

mentre si calcola

Arsenico . . . . 22,86.

Questo sale perde anilina assai più facilmente di quanto ha creduto il Béchamp (riscaldamento a 180°).

La sua soluzione acquosa in una corrente di vapor d'acqua perde lentamente, ma quasi completamente l'anilina. Bollito con benzolo o con etere, cede anilina a questi solventi. Gr. 50 del sale riscaldati in b. m. a ricadere con gr. 50 di benzolo, hanno ceduto a questo solvente in un ora circa gr. 8 di anilina. Risultato analogo si ottiene con l'etere.

In presenza di acido solforico in un essiccatore perde anilina alla temperatura ordinaria.

Riscaldato nel vuoto verso i 60° in un apparecchio a distillazione, perde subito molta anilina, poscia più lentamente, e si trasforma in una massa polverosa leggermente colorata in grigio-roseo, la quale alla sua volta riscaldata verso i 100° continua a perdere dell'anilina lentamente colorandosi in bruno.

Cessando lo scaldamento a 60° la quantità di anilina distillata corrisponde ad una molecola per una del sale.

Il prodotto di questo moderato riscaldamento è effettivamente l'arseniato monoanilico intravisto da Béchamp; esso è solubile nell'acqua anche fredda assai più di quello bianilico, e dall'acqua o dall'alcool cristallizza in prismi di lucentezza vitrea, anch'essi per i caratteri ottici riferibili al sistema triclino, e che fondono alla temperatura di 154°.

Questo sale abbandonato sotto una campana in presenza di anilina l'assorbe lentamente e si trasforma nel sale bianilico. La sua soluzione acquosa scioglie l'anilina e per svaporamento si ottiene il sale bianilico.

Di questo sale cristallizzato dall'acqua o dall'alcool fu determinato l'arsenico.

La media di parecchie analisi concordanti ha dato

Arsenico 31.84

mentre si calcola

Arsenico . . . . 31,91.

Uno studio particolare ho fatto sul punto di fusione di questi sali. Il monarseniato di anilina puro cristallizzato dall'alcool ha il punto di fusione determinato in tubetto chiusa a 154°, e fonde senza annerire. Dopo solidificato rifonde a qualche grado più basso.

Pel sale bianilico invece, fusibile secondo il Béchamp a 140°, abbiamo trovato dei punti di fusione assai variabili secondo i campioni e secondo il modo di operare: riscaldamento cioè più o meno lento, fusione in tubetto aperto o chiuso. Qualche volta si è ottenuto un punto di fusione vicino ai 150°.

Fondendo un miscuglio ben intimo dei due sali non abbiamo osservato un abbassamento nel punto di fusione, ma un comportamento come se si trattasse del medesimo corpo in maggior o minor grado di purezza.

Mettendo in relazione queste osservazioni col fatto che il sale bianilico perde tanto facilmente l'anilina, risulta evidente che l'anilina venendo in libertà, già prima che sia conseguita la temperatura di fusione, deve influire all'abbassamento del punto di fusione del composto, e che la temperatura osservata è quella di un miscuglio del sale bi, col sale monoanilico, bagnato di anilina libera, punto di fusione che deve essere perciò assai variabile. Cosicchè bisogna dedurre che di accertato non vi è che il punto di fusione dell'arseniato monoanilico (154°); quello del sale bianilico non è possibile fissarlo per la sua facile alterazione.

Dei due arseniati di anilina ho anche fatto la crioscopia in acqua. Ecco i risultati ottenuti.

Monoarseniato.

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
1,12	0,19	109,0
3,82	0,57	124,0
6,60	0,96	127,2
8,79	1,25	130,1
12,52	1,67	138,7
18,05	2,30	145,2
22,30	2,30	—

Biarseniato.

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
0,29	0,05	107,3
1,11	0,21	97,8
1,37	0,26	97,5
1,83	0,31	109,2
3,01	0,50	111,4
3,33	0,56	110,00
5,74	0,70	151,7

La prima cosa che si deduce da questi dati è che il monoarseniato di anilina è notevolmente più solubile nell'acqua del bi, questo ad una temperatura di — 0°,70 si scioglie nella proporzione del 5,74 % all'incirca, mentre del mono ad una temperatura più bassa (— 2°,30) se ne scioglie più del 18 %.

Inoltre il p. m. del mono, che oscilla fra 124,0 e 138,7 in media è 130; quello del bi fra 97,8 e 110 in media cioè 107. Ed essendo il p. m. del primo eguale a 225 e quello del secondo 308, se ne deduce che il primo si avvicina alla metà (112,5) il secondo ad un terzo (102,7). Questi dati confermano, che il sale monoanilico si idrolizza in due molecole, e quello bianilico in tre.

Occasionalmente a questi studî ho pure fatto la crioscopia delle soluzioni di anilina-acqua.

Anilina in acqua (costante 18).

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
0,32	0,07	83,7
0,68	0,13	96,7
0,88	0,23	70,8
1,29	0,32	
1,89	0,39	74,6
2,23	0,46	89,7
2,75	0,52	89,9
3,19	0,58	97,8
3,76	0,66	101,7
4,21	0,66	—

P. m. dell'anilina 83.

Acqua in anilina. Ampola e Rimadori (Gazz. chim., t. XXVII, p. 35) che studiarono l'anilina come solvente in crioscopia, adoperarono anilina fondente a — 5,96 e ne fissarono la costante = 58,7; quella da me adoperata fondeva — 6°,35.

Concentrazione	Abbass. term.	P. m.
0,4825	1,41	20,09
0,8273	1,96	27,78
0.9845	2.52	22,93
1,230	3,16	22,84
1,487	3,49	25,02
1,761	3,94	26,24
2,020	4,42	26,82
2,285	4.73	28,35
2,535	5,08	29,30
2,792	5,43	30,18
3,042	5,44	—

Da questi dati, indipendentemente dallo studio del comportamento crioscopico dell'anilina nell'acqua e dell'acqua nell'anilina, possono dedursi delle considerazioni sulla solubilità reciproca di queste due sostanze. La massima solubilità dell'anilina nell'acqua a —0°,6 circa oscilla intorno al 3,7 %, e quella dell'acqua nell'anilina a —5°,4 intorno al 2,8 %.

Come è noto Alexejeff (Berichte, X, p. 708) aveva trovato che l'anilina e l'acqua si scioglievano reciprocamente, ma che i due liquidi non sono miscibili in tutte le proporzioni neanche a 150°. Secondo le sue determinazioni l'anilina è solubile nell'acqua (3,11 %) meno che non sia l'acqua nell'anilina (4,58 %) alla temperatura ordinaria (16-18), mentre dai dati sopra riportati risulta che a temperature sotto 0° l'anilina si scioglie nell'acqua, più che l'acqua nell'anilina; ma nel complesso il fenomeno resta sempre dello stesso ordine. Del resto nè le esperienze delle quali ho reso conto, nè quelle di Alexejeff hanno la pretesa di essere esperienze di precisione.

Occasionalmente a questi studî ho voluto anche esaminare come procede l'assorbimento reciproco dell'acqua e dell'anilina, usando un apparecchio da me adoperato parecchi anni addietro per taluni studî che furono interrotti dalla guerra. L'anilina e l'acqua furono abbandonate per lungo tempo in due vasi comunicanti per la parte superiore, sino a tanto che l'anilina non aumentava più di peso. Gr. 8,3251 di anilina, ad una temperatura variabile ma che non superò mai i 30° in circa tre mesi, assorbirono gr. 0,3036 di acqua, ossia il 3,6 %, numero che tende a confermare che il 4,58 % trovato dall'Alexejeff è effettivamente elevato.

Meccanica celeste. — *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili.* Nota del Corrisp. G. Armellini.

1. Il problema dei due corpi di masse variabili si sa fino ad ora integrare solo in un numero limitatissimo di casi. E precisamente, indicando con $M(t)$ la somma delle masse dei due corpi A e B, abbiamo:

α) Per l'attrazione Newtoniana i due casi in cui si abbia $M(t) = \frac{1}{a+bt}$ oppure $M(t) = \frac{1}{\sqrt{a+bt}}$ con a e b costanti. Sono dovuti entrambi al Mestschersky (1).

β) Per l'attrazione inversamente proporzionale alla quinta potenza delle distanze, il caso in cui si abbia $M(t) = a + bt$. Esso è dovuto (2) alla dott.ssa C. Maderni, già mia allieva nell'Università di Padova.

γ) Infine, supponendo $M(t) = (a + bt)^n$ e l'attrazione direttamente proporzionale alla potenza k delle distanze — caso che indicherò col simbolo $[k, n]$ — il problema è integrabile per $k + 2n + 3 = 0$. Questo caso è stato trattato dal Lovett in una nota inserita nel presente fascicolo e della quale ho avuto preventiva notizia dalla cortesia del Socio prof. Levi-Civita.

2. Ho colto quindi l'occasione per esporre all'Accademia un teorema da me trovato l'anno scorso, dal quale derivano come conseguenze i tre casi particolari α) β) γ) — cioè tutti quelli fino ad ora conosciuti — e dal quale risulta inoltre che il problema è integrale anche per

$$k + n + 3 = 0\,. \tag{1}$$

A tale scopo, ricordando che il moto relativo di A intorno a B è piano ed ha luogo con la legge delle aree, sceglieremo le unità fondamentali in modo che il coefficiente attrattivo f, la costante delle aree c ed il coefficiente C si riducano uguali all'unità ed adotteremo l'origine dei tempi in modo da avere $a = 0$. Con tali convenzioni, le equazioni del moto relativo di A intorno a B si scriveranno in coordinate polari

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - r^k t^n \tag{2}$$

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1 \tag{3}$$

(1) Cfr. *Astr. Nachr*, n. 3153.

(2) Cfr. questi Rendiconti, 1921, semestre 2°, fasc. 5°.

ed è evidente che integrata la (2), la (3) si riduce immediatamente alle quadrature. Osserveremo poi che la (2) ammette un moltiplicatore Jacobiano uguale all'unità; basterebbe quindi conoscere un integrale primo $F\left(r, t, \frac{dr}{dt}\right) = \text{cost.}$ od un secondo moltiplicatore per avere la soluzione generale del problema.

3. Ciò posto dimostreremo il seguente

Teorema. — *Il caso* $[k, n]$ *è coniugato al caso* $[k, -(k+n+3)]$ *nel senso cioè che integrato uno qualsiasi di essi risulta immediatamente integrato anche l'altro.*

Dimostrazione. — Posto $t = \frac{1}{\tau}$ abbiamo

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\tau^2}\tau^4 + 2\tau^3\frac{dr}{d\tau} \tag{4}$$

e quindi la (2) diviene

$$\tau\frac{d^2r}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{r^3\tau^3} - r^k\tau^{-(n+3)}. \tag{5}$$

Ma il primo membro della (5) è identicamente uguale a $\frac{d^2(r\tau)}{d\tau^2}$; ponendo dunque $r\tau = R$ avremo:

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{1}{R^3} - R^k\tau^{-(k+n+3)}. \tag{6}$$

Se invece si operasse sulla (2) con la sostituzione $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $R_1 = \alpha r\tau_1$ essendo α una costante arbitraria, essa diverrebbe

$$\frac{d^2R_1}{d\tau_1^2} = \frac{1}{R_1^3} - \frac{R_1^k\tau_1^{-(k+n+3)}}{\alpha^{k+2n+3}}. \tag{6^{bis}}$$

Ora è evidente che se immaginiamo integrata la (2) e trovato $r = f(t)$, risulterà dai calcoli fatti

$$R = \tau f\left(\frac{1}{\tau}\right) \tag{7}$$

e quindi anche la (6) si potrà considerare come è integrata. Viceversa risoluta la (6) e trovato $R = \varphi(\tau)$, il passaggio inverso ci darà r in funzione di t. Ma interpretando R come raggio vettore e τ come un tempo, la (6) è l'equazione del problema nel caso $[k, -(k+n+3)]$, dunque ecc.

4. *Corollari. I caso d'integrabilità.* — La (6) si riduce evidentemente alle quadrature, quando in essa non comparisce esplicitamente τ; ne concludiamo dunque che il problema è risolubile per

$$k + n + 3 = 0. \tag{8}$$

Eseguendo i calcoli troviamo

$$(9)\quad r = \mathrm{R}t \qquad (10)\quad \frac{1}{t} = \sqrt{1+k}\int \frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{C}_1\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}^{k+3} - (k+1)}} + \mathrm{C}_2$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie. Eliminando R tra la (9) e la (10) si ha la soluzione cercata $r = f(t)$.

Questo semplice risultato, non ancora messo in luce da altri, racchiude come caso particolare il 1° teorema del Mestschersky (legge Newtoniana ed $\left.\mathrm{M}(t) = \frac{1}{a+bt}\right)$ che ha luogo per $k = -2$ ed $n = -1$.

5. *Casi coniugati coincidenti. II caso d'integrabilità.* — Come mostra il teorema ora dato, i casi $[k, n]$ sono coniugati due a due dal punto di vista della loro integrabilità; ed è facile anzi di vedere che questo legame è *involutorio*. Infatti partendo, per esempio, dal caso finale C_2 cioè $[k, -(k+n+3)]$ ed operando come si è fatto si ritrova come coniugato il caso iniziale C_1 cioè $[k, n]$.

In generale i due coniugati C_1 e C_2 sono distinti tra loro tranne se si abbia $n = -(k+n+3)$, cioè

$$(11)\qquad k + 2n + 3 = 0 .$$

Anche in questo caso il problema è integrabile e noi possiamo vederlo nel modo più semplice osservando che nella ipotesi (11) l'equazione (2) diviene omogenea se si suppone che r sia di grado $\frac{1}{2}$ rispetto a t. È questo, in sostanza, il metodo seguito dal Lovett il quale nella sua Nota, indipendentemente dalla teoria ora svolta, pone $t = e^{2\lambda}$ ed $r = e^{\lambda} z$ e mostra che la (2) si riconduce alle quadrature se la (11) è verificata.

Dal nostro punto di vista si può però anche osservare che nella ipotesi (11) la (2) coincide con la (6^{bis}), cioè resta invariata per una sostituzione della forma $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $\mathrm{R}_1 = \alpha r \tau_1$ qualunque sia la costante α. Ciò appunto rende ragione della facile integrabilità della (2) nel caso (11) e dà un notevole significato analitico al teorema del Lovett.

Potremo anzi valerci di tale osservazione per trovare una elegante proprietà dell'integrale.

Supponiamo a tale scopo che $r = \psi(t)$ sia una soluzione della (2); i passaggi fatti ci mostrano allora che $\mathrm{R}_1 = \alpha \tau_1 \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 \tau_1}\right)$ sarà soluzione della

(6^{bis}). Ma nel caso (11) la (6^{bis}) coincide con la (2); dunque $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ sarà soluzione della (2).

Cioè nell'ipotesi (11) *se* $r = \psi(t)$ *è un integrale, anche* $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ *sarà un integrale qualunque sia la costante arbitraria* α.

Sarebbe poi facile di vedere che nel caso (11) si ha sempre come integrale particolare

$$r = s\sqrt{t} \tag{12}$$

essendo s radice dell'equazione

$$4s^{k+3} - s^2 - 4 = 0. \tag{13}$$

Per $r = s\sqrt{t}$ si ha identicamente $\psi(t) = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ qualunque sia α.

Sarà inutile aggiungere che nell'ipotesi (11) rientrano in particolare il 2° teorema del Mestschersky $\left(\text{per } k = -2 \text{ ed } n = -\frac{1}{2}\right)$ e quello della Maderni (per $k = -5$ ed $n = 1$).

6. Terminando potremo riassumere i risultati della presente Nota affermando che il problema è finora *integrabile soltanto nei casi il cui coniugato è a masse costanti* ($k + n + 3 = 0$) *oppure nei casi che coincidono col proprio coniugato* ($k + 2n + 3 = 0$).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane e delle orbite einsteiniane.* Nota III di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota cerco di rendermi conto delle orbite einsteiniane e dello spazio-tempo che ad esse si riferisce, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali.

1. Ricordiamo [1] che la metrica dello spazio-tempo delle orbite kepleriane è assegnata da

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dr^2 + r^2\, d\varphi^2 - c^2\, dt^2). \tag{1}$$

Alla determinazione di (1) si perviene ammettendo, in primo luogo, che l'orbita descritta da un punto materiale intorno al Sole sia rappresentata dall'equazione, espressione formale della prima legge di Kepler,

[1] Cfr. questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 1°, pag. 18 e fasc. 3°, pag. 92.

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{cost.} = \mathrm{A} \ , \ u = \frac{1}{r} \tag{2}$$

e, in secondo luogo, ammettendo che valga l'espressione formale della seconda legge di Kepler

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.} = \mathrm{C} . \tag{3}$$

Si è anche detto che lo spazio-tempo (1) non conduce ad alcuna deflessione di un raggio luminoso nel campo gravitazionale solare, deflessione che, come è noto, dovrebbe aver luogo anche in base al semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia, pur giustificato da considerazioni tratte da Einstein dalla teoria della relatività della prima maniera o in senso stretto. Una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare dovrebbe potersi dedurre dallo spazio-tempo generato dal Sole quando si identificassero, come riesce spontaneo ad ammettere, le geodetiche di lunghezza nulla ($ds = 0$) con le traiettorie dei raggi luminosi stessi.

Lo spazio-tempo (1) non riesce perciò soddisfacente, ma il difetto che comporta può dipendere dal fatto che esso presume, nel sistema di coordinate r, φ, t, adottato per la descrizione dell'intero sistema solare, la validità rigorosa delle prime due leggi di Kepler le quali, nel sistema indicato di coordinate, potrebbero avere un valore di semplice approssimazione. Sembra più corretto, allo scopo di ulteriori considerazioni, cercare di dedurre l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale, dall'espressione generale del ds^2 che è atto a rappresentare la metrica dello spazio-tempo generato dal Sole.

2. Si è accennato che ragioni di simmetria portano a scrivere che la metrica dello spazio-tempo tridimensionale, che occorre considerare, debba essere assegnata da una espressione della forma

$$ds^2 = - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} r^2 d\varphi^2 + c^2 e^{\nu} dt^2 , \tag{4}$$

in cui λ, μ, ν sono tre funzioni della sola r soddisfacenti alla condizione $\lim\limits_{r \to \infty} \lambda = \lim \mu = \lim \nu = 0$.

Si è anche detto che da (4) si deduce

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = he^{-\mu} \ , \ \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2} e^{-\nu} \ , \ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k} e^{\nu-\mu} , \tag{5}$$

essendo h, k due costanti di integrazione, e l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale intorno al Sole,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + e^{\mu-\lambda} \cdot u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} . \tag{6}$$

Ora lo spazio-tempo (4) non solo deve diventare euclideo a distanza infinita dal Sole, ma deve essere quasi euclideo anche a breve distanza dalla superficie del Sole; pertanto, sembra *a priori* giustificabile che si ponga nella (6)

$$(7)\qquad e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = 1 + \alpha u \,, \quad e^{2\mu-\lambda} = 1 + \beta u \,, \quad e^{\mu-\lambda} = 1 + \gamma u \,,$$

essendo α, β, γ tre costanti da determinare, ovviamente indipendenti da h, k.

In conclusione, invece dello spazio-tempo (1) e dell'equazione dell'orbita (2), considereremo lo spazio-tempo e l'equazione dell'orbita che forniscono le (4), (6), tenendo presenti le (7).

Risulta, tenendo anche conto delle (5),

$$(8)\qquad ds^2 = -\frac{1+\beta u}{(1+\gamma u)^2}\,dr^2 - \frac{1+\beta u}{1+\gamma u}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1+\beta u}{1+\alpha u}\,dt^2 \,.$$

$$(9)\qquad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\,\frac{1+\gamma u}{1+\beta u} \,, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,\frac{1+\alpha u}{1+\beta u} \,, \quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}\,\frac{1+\gamma u}{1+\alpha u} \,.$$

$$(10)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\gamma u^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right).$$

Si noti che per $\gamma = 0$ si ricade nei casi esaminati nella precedente Nota e che, in particolare, per $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = -2m = -$ Km. 2,94 si ha lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Veniamo alla determinazione delle costanti α, β, γ dello spazio-tempo (8). Possono farsi diverse determinazioni di queste costanti, ma soltanto le due di cui appresso si fa cenno si presentano spontanee, senza artificî. Altre determinazioni non mi appariscono giustificabili o soddisfacenti quand'anche le conseguenze di esse non possano dirsi contraddette dalle osservazioni.

3. Allo spazio-tempo (8) corrisponde l'equazione dell'orbita (10). Ora le osservazioni suggeriscono che, a sufficiente distanza dal Sole, il moto debba potersi ritenere kepleriano. È spontaneo allora ammettere che, quando si prescinda, nella (10), dal termine di valore piccolissimo $3/2\,\gamma u^2$, e quindi quando anche si ponga $\gamma = 0$, la (8) debba fornire lo spazio-tempo delle orbite kepleriane (1); poniamo, dunque, nella (8), $\alpha = 0$, $\beta = -2m$ perchè, allora, per $\gamma = 0$, risulta *esattamente* lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Avremo, in conseguenza, da considerare lo spazio-tempo

$$(11)\qquad ds^2 = -\frac{1-2mu}{(1+\gamma u)^2}\,dr^2 - \frac{1-2mu}{1+\gamma u}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2(1-2mu)\,dt^2$$

cui corrisponde l'orbita di equazione

$$(12)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\gamma u^2 = \frac{m}{h^2} \,.$$

Si tratta di determinare l'ultima delle costanti, la γ. Si è già accennato che il semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia porta come conseguenza una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare. In particolare, un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, dovrebbe subire una deflessione di circa 0",87. Ora, perchè la (12) fornisca una tale deflessione ($ds = 0$, e quindi $h = \infty$), basta porre $\gamma = -m$; ma allora, dalla (12), si deduce pure uno spostamento secolare del perielio di Marte di circa 0",7 e uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 21", quando, effettivamente, l'astronomia attribuisce circa 5" di spostamento al perielio di Marte e circa 42" a quello di Mercurio. Se, dalla (12), si vuole dedurre uno spostamento di circa 42" del perielio di Mercurio, basta porre $\gamma = -2m$. Allora la (12) stessa fornisce, per un raggio stellare che passi rasente il bordo solare, una deflessione di 1",75. Per $\gamma = -2m$ le (11), (12) dànno lo spazio-tempo einsteiniano e l'orbita einsteiniana. Le (9) diventano

$$(13)\qquad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\ ,\quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}(1-2mu)^{-1}\ ,\quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}(1-2mu)$$

l'ultima delle quali dice che, nel sistema di coordinate adottato r, φ, t, non è più valida la 2ª legge di Kepler. In altri termini, il passaggio dallo spazio-tempo kepleriano (1) a quello einsteiniano fa rinunziare, nel sistema di coordinate indicato, non solo alla prima ma anche alla seconda legge di Kepler.

4. Ritorniamo alla (8) per un'altra determinazione delle costanti α, β, γ. Stabiliamo, in primo luogo, di non rinunziare, nel sistema di coordinate adottato, alla 2ª legge di Kepler; per l'ultima delle (9) bisogna allora porre $\alpha = \gamma$. Stabiliamo ancora che dall'equazione dell'orbita (10), con $\alpha = \gamma$,

$$(14)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\alpha u^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right) = \mathrm{A}$$

debba dedursi uno spostamento di circa 42" del perielio di Mercurio. Poichè il moto deve riuscire quasi kepleriano, il valore del termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$ dovrà riuscire trascurabile rispetto ad A. Integrando la (14) per approssimazioni successive $\Big($è ovvio che, quando si trascuri il termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$, risulta in prima approssimazione $u = \mathrm{A}[1 + e\cos(\varphi - \omega)] = \frac{1}{a(1-e^2)}[1 + e\cos(\varphi - \omega)]\Big)$ si deduce che perchè la (14) fornisca lo spostamento richiesto del perielio di Mercurio, basta porre $\alpha = -2m$. Le (8), (9) e (10) diventano, per $\alpha = \gamma = -2m$:

$$(15)\quad ds^2 = -\frac{1+\beta u}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1+\beta u}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1+\beta u}{1-2mu}\,dt^2\,,$$

$$(16)\qquad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}\,,$$

$$(17)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3mu^2 = \frac{1}{2h^2}\left(-\beta - \frac{k^2}{c^2}\,2m\right),$$

e dovremo determinare la costante β. Poichè a sufficiente distanza dal Sole, l'orbita descritta da un punto materiale deve risultare quasi kepleriana, il secondo membro della (17) deve risultare, tenuto presente quanto si è detto a proposito delle (11), (12), pressochè eguale a $\frac{m}{h^2}$. Ora, quando si elimini ds tra la penultima delle (16) e la (15) si ricava che, per il moto dei pianeti, è approssimativamente $\frac{k^2}{c^2} = 1$; ne segue che dovrà porsi $\beta = -4m$. Risulta dunque lo spazio-tempo

$$(18)\qquad ds^2 = -\frac{1-4mu}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-4mu}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-4mu}{1-2mu}\,dt^2$$

dal quale si deduce: che per il moto di un punto materiale intorno al Sole vale, nel sistema di coordinate r, φ, t, la seconda legge di Kepler; che si ha uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 42″; che un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, subisce una deflessione, non di 1″,75 ma di 0″,87.

Le osservazioni fatte sulla deflessione del raggio stellare, in occasione dell'ecclisse solare del 29 maggio 1919, conducono ad ammettere che essa debba essere dell'ordine di grandezza indicato da Einstein (1″,75), ma è noto che altre osservazioni saranno eseguite in proposito.

Dallo spazio-tempo (18) si deduce pure una influenza del campo gravitazionale sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella che si deduce dallo spazio-tempo einsteiniano.

5. Le determinazioni fatte delle costanti α, β, γ, nei casi precedentemente esaminati, dipendono dalla preferenza data allo spostamento del perielio di Mercurio in confronto a quello di Marte. Sono note le ragioni per cui non vengono presi in considerazione gli spostamenti dei perieli degli altri pianeti.

È chiaro che se si desse la preferenza allo spostamento del perielio di Marte, si otterrebbero risultati del tutto diversi. Così, perchè lo spazio-tempo (11) fornisca lo spostamento di circa 5″ indicato, basta porre $\gamma = -8m$ ma si deduce allora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di

quello che effettivamente si attribuisce al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, quadrupla di quella einsteiniana. Così, anche per il secondo caso considerato, quando si voglia dedurre lo spostamento di circa 5″ del perielio di Marte, si perviene allo spazio-tempo

$$(19)\quad ds^2 = -\frac{1-10mu}{(1-8mu)^2}dr^2 - \frac{1-10mu}{1-8mu}r^2 d\varphi^2 + c^2\frac{1-10mu}{1-8mu}dt^2$$

dal quale si ricava ancora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di quello effettivamente attribuito al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, rasente il bordo solare, doppia di quella einsteiniana.

Ora è inammissibile che simili risultati possano rispondere alla realtà e pertanto non potrebbe restare *a priori* giustificata una preferenza allo spostamento del perielio attribuito a Marte in confronto a quello attribuito a Mercurio, ma tutto quanto è stato detto in questa Nota, e nella precedente, ribadisce che spetta ancora alle osservazioni di decidere sulla plausibilità dello spazio-tempo einsteiniano (11), $[\gamma = -2m]$, e quindi sulla portata delle equazioni gravitazionali nella forma prescelta da Einstein.

Meccanica — *Sul problema dei due corpi di massa variabile.* Nota di E. O. Lovett, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota interessante [1], presentata a questa Accademia il 2 maggio 1921 (che solo recentemente potei leggere nel corrispondente fascicolo dei Rendiconti) la Sig.na dott. Carla Maderni ha integrato le equazioni differenziali del problema dei due corpi di massa variabile, nell'ipotesi che la massa sia una funzione lineare del tempo e che l'attrazione varii in ragione inversa della quinta potenza della distanza.

Dalla lettura di questa Nota sono stato condotto ad un tipo di problema dei due corpi, più generale, in cui le equazioni differenziali del moto sono ancora riducibili alle quadrature.

Questo tipo include, come caso particolare, il problema dei due corpi di massa variabile, in cui la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza (attrattiva o repulsiva) come la q^{esima} potenza della distanza, p e q essendo due numeri quali si vogliono legati dalla relazione

$$2p + q + 3 = 0 .$$

Ritengo che questo sia un nuovo caso di integrabilità, in cui è in particolare compreso ($p = 1$, $q = -5$) quello segnalato dalla Sig.na Maderni nella Nota citata.

[1] *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile.*

Si consideri il moto (relativo) di due corpi soggetti a mutue azioni attrattive o repulsive, quale rimane definito (colle solite notazioni) dal sistema differenziale

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \ , \ r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} + \varphi\left(\frac{r^2}{t}\right) = 0 :$$

con φ si rappresenta una funzione, del resto arbitraria, in cui, per semplicità di scrittura, si è conglobato il quadrato della costante delle aree. Le unità si sono scelte in guisa da rendere eguale ad 1 la costante gravitazionale: volendo, si potrebbe supporre $= 1$ anche la costante delle aree c.

Il sistema (1) è integrabile per quadrature in quanto, nella seconda equazione, si possono separare le variabili mediante la sostituzione

$$(2) \qquad r = e^{\lambda} z \quad , \quad t = e^{2\lambda} ,$$

e designando al solito la base dei logaritmi naturali.

Infatti, ove si derivi r rapporto a t, prima una e poi una seconda volta, tenendo conto che z va risguardata come funzione di λ, si ottiene

$$(3) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}(z + z') ,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{4} e^{-3\lambda}(z'' - z) ,$$

in cui z' e z'' rappresentano le derivate prima e seconda di z rispetto a λ. Sostituendo, nella seconda delle (1), a $\frac{d^2 r}{dt^2}$ il suo valore (4), abbiamo, badando alla seconda delle (2),

$$(5) \qquad z'' = z - 4\varphi(z^2)\, z^{-3} .$$

Questa equazione di secondo ordine in z è di forma integrabile, e una prima integrazione porge

$$(6) \qquad z'^2 = z^2 - 8 \int \varphi(z^2)\, z^{-3}\, dz + h ,$$

dove h è una costante additiva arbitraria, proveniente dall'integrazione.

Per fare qualche applicazione della (6) a casi particolari, giova trasformare alquanto il secondo membro, eseguendo nell'integrale una integrazione per parti. Si può così attribuire alla (6) la forma

$$(7) \qquad z'^2 = z^2 + 4\varphi(z^2)\, z^{-2} - 8 \int \varphi'(z^2)\, z^{-1}\, dz + h ,$$

dove φ' rappresenta la derivata di φ rispetto all'argomento z^2. Questa forma (7) ha altresì il vantaggio di mettere in evidenza il termine corrispondente a $\frac{c^2}{r^2}$ il quale, nell'equazione originaria (1), si trovava assorbito nella funzione arbitraria φ. Da (6) o da (7) si ricava, con un'ulteriore quadratura, l'espressione di λ sotto la forma

$$\lambda = \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + k, \tag{8}$$

dove k è la costante arbitraria introdotta dall'integrazione.

Determinata così λ come funzione di z, le equazioni (2) dànno immediatamente r quale funzione di t, e la prima delle (1) ci fornisce, con un'altra quadratura, anche θ in funzione di t. Rimanendo pertanto espresse sia r che θ, in funzione di t, risulta completamente determinato il moto definito dall'originario sistema differenziale (1).

Terminerò considerando quel caso speciale del problema in questione, in cui la funzione arbitraria φ ha la forma

$$\varphi = \sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right)\left(\frac{t}{r^2}\right)^i, \tag{9}$$

rappresentando a lor volta le φ_i funzioni arbitrarie dell'argomento indicato e il sommatorio essendo esteso a un numero finito qualsiasi di valori di i.

Le equazioni differenziali (1) divengono in conformità

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \ , \ \frac{d^2r}{dt^2} = - \sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right) t^i \, r^{-(2i+3)}, \tag{10}$$

e la corrispondente soluzione si ricava dalla (7) sotto la forma

$$z'^2 = z^2 + \sum_i a_i \left[\varphi_i(z^2)\, z^{-2(i+1)} - 2 \int \varphi_i'(z^2)\, z^{-2i+1}\, dz \right] + h, \tag{11}$$

in cui le costanti a_i sono definite dalle posizioni

$$(i+1)\, a_i = 4\,. \tag{12}$$

In particolare, se tutte le φ_i sono costanti, diciamo, per esempio,

$$\varphi_i = b_i\,, \tag{13}$$

scompaiono dalla (11) le quadrature non effettuate, e l'integrale assume lo aspetto semplice

$$z'^2 = z^2 + \sum_i c_i\, z^{-2(i+1)} + 4h\,, \tag{14}$$

in cui, per convenienza formale che apparirà tra un momento, si è scritto $4h$ in luogo di h, ponendo altresì

$$c_i = a_i b_i . \tag{15}$$

Dalla (14), mercè l'ulteriore sostituzione

$$z^2 = \frac{1}{u} , \tag{16}$$

si ricava, per il caso di cui ci occupiamo, l'integrale (8) sotto la forma particolare

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{\Sigma_i c_i u^{i+2} + 4hu + 1}} + k . \tag{17}$$

Se poi tutte le costanti b si suppongono nulle, salvo due, diciamo b_0 e b_p alle quali si attribuiscano i valori

$$b_0 = -1 \quad , \quad b_p = 1 , \tag{18}$$

l'integrale (17), in virtù delle definizioni (12) e (15), diviene

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a_p u^{p+2} - 4u^2 + 4hu + 1}} + k . \tag{19}$$

Quest'ultimo integrale (19) risolve il problema dei due corpi di massa variabile, quando la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza come la potenza q^{esima} della distanza, p e q rappresentando due numeri qualsivogliono legati dalla relazione lineare

$$2p + q + 3 = 0 . \tag{20}$$

È questo un caso abbastanza generale di integrabilità, che credo nuovo.

Supponiamo da ultimo $p = 1$ e osserviamo che, a norma della (12), $a_1 = 2$. Si ha in tal caso, dalla (19), l'integrale

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{2u^3 - 4u^2 + 4hu + 1}} + k , \tag{21}$$

il quale, moltiplicando per 2 (chè tale è il rapporto fra il λ usato dalla Sig.na Maderni e il mio), ovvero, ciò che è lo stesso, aggiungendo il fattore $\frac{1}{4}$ sotto il segno di radice, diviene identico al nuovo integrale assegnato dalla Sig.na Maderni, il cui scritto diede origine alla presente ricerca.

Fisica matematica. — *Capacità del condensatore a piatti infinitamente sottile.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In due Note [1] ho ridotto il problema della distribuzione elettrica sopra il condensatore a piatti circolari alla risoluzione di due equazioni integrali. Ma i miei sforzi per dedurre nel caso generale l'elemento veramente importante, la capacità, non ebbero finora successo. Invece se si considera un condensatore ∞^{te} sottile rispetto al raggio dei piatti, è possibile dedurre, come mostro in questa Nota, che la capacità è data dalla formula $A+\frac{B}{l}$ dove A e B sono costanti e l la distanza dei due piatti: e precisamente è $A=\frac{a}{\pi}$ (a raggio dei piatti) e B dovrà dedursi sperimentalmente.

1. *Richiamo di risultati precedenti.* — Dette φ_1, φ_2 le due funzioni potenziali che sui piatti prendono rispettivamente valori $(+1, -1)$ $(+1, +1)$ esse si possono mettere sotto la forma

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s}\right) I_0(rs)\,\psi_1(s)\,ds\,, \\ \varphi_2 = \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s}\right) I_0(rs)\,\psi_2(s)\,ds\,, \end{cases}$$

e nel caso del condensatore ∞^{te} sottile si ha [2ª Nota (17) (18)].

$$(2)\qquad \psi_1(s)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1-e^{-ls})}\,,\quad \psi_2(s)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1+e^{-ls})}\,.$$

Ciò posto è facile dedurre l'espressione delle quantità di elettricità che si hanno sui due piatti. Siano queste e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} il primo indice riferendosi alle φ_1, φ_2 il secondo ai due piatti superiore ed inferiore.

Basta tener conto dei risultati del Beltrami [2] e si avrà coi dati (1) (2)

$$e_{11}=-e_{12}=-\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty I_0'(as)\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1-e^{-ls})}\,ds\,,$$

$$e_{21}=e_{22}=-\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty I_0'(as)\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1+e^{-ls})}\,ds\,.$$

(1) *Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari.* R. Acc. Lincei, luglio-ottobre 1920.

(2) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Par. 2, Acc. Bologna, 1881, oppure Opere, T. III.

Facendo le sostituzioni $as = x$, $\frac{l}{a} = h$ e ricordando che $I_0'(x) = -I_1(x)$ ($I_1(x)$ funzione di Bessel di 1ª specie e d'ordine uno) si ha in definitiva

$$(3)\quad \begin{cases} e_{11} = -e_{12} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-hx})}\,dx\,, \\[2ex] e_{21} = e_{22} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1+e^{-hx})}\,dx\,. \end{cases}$$

1. *Riduzione ad una equazione funzionale.* — Gli integrali che compaiono nelle (3) non si sanno calcolare. Osserviamo però che

$$e_{11} + e_{21} = \frac{4a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-2hx})}\,dx\,,$$

e mettendo quindi in evidenza che le e sono funzioni sulla sola h,

$$(4)\qquad e_{11}(h) + e_{21}(h) = 2\,e_{11}(2h)\,.$$

Se per $e_{21}(h)$ che è funzione regolare per $h=0$ sostituiamo, essendo $h = \frac{l}{a}$ infinitesimo, il primo termine del suo sviluppo, avremo

$$(5)\qquad e_{21}(h) = e_{21}(0) = \frac{a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{a}{\pi}\,,$$

perchè l'$\int$ vale 1 [1]. L'equazione funzionale (4) diventa

$$(4')\qquad e_{11}(h) + \frac{a}{\pi} = 2e_{11}(2h)\,.$$

Si può dimostrare che questa ha per soluzione generale la soluzione evidente

$$(5')\qquad e_{11}(h) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{h}\,,$$

dove B' è una costante.

3. *Capacità del condensatore.* — Colle formole (5) (5′) il problema della capacità è completamente risolto, cioè sono determinati i coefficienti nelle formole che legano potenziali e cariche. Se intendiamo come capacità, in una accezione più ristretta, la carica che si ha sopra uno dei piatti a potenziale 1 quando l'altro sia a potenziale *zero*, il calcolo può essere condotto in modo breve così. Ricordiamo che se φ_1, φ_2 sono i potenziali di due conduttori con cariche C_1, C_2 e $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ i potenziali degli stessi con cariche $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ si ha

$$\varphi_1\,C_1^{(1)} + \varphi_2\,C_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}\,C_1 + \varphi_2^{(1)}\,C_2 \text{ [2]}\,.$$

[1] V. p. Schaftlein, *Bessellschen Functionen*, pag. 79.
[2] Vedi p. es. Kirchhoff, *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*, 7ª Lez. N. 4.

Poniamo allora $\varphi_1^{(1)} = 1$, $\varphi_2^{(1)} = 0$ e poi una prima volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = -1 \text{ quindi } C_1 = -C_2 = e_{11}\,,$$

e un'altra volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = 1 \text{ quindi } C_1 = C_2 = e_{21}\,.$$

Avremo allora dalla formola citata, per le (5) (5′),

$$C_1^{(1)} - C_2^{(1)} = e_{11}\,,$$
$$C_1^{(1)} + C_2^{(1)} = e_{21}\,,$$

quindi

$$(6)\qquad C_1^{(1)} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{21}) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{2h} = \frac{a}{\pi} + \frac{B}{l}$$

dove B è una costante (delle dimensioni di una superficie) che dovrà dedursi sperimentalmente.

Relatività. — *Correzione di una grave discrepanza tra la teoria delle masse elettromagnetiche e la teoria della relatività. Inerzia e peso dell'elettricità.* Nota I di ENRICO FERMI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

§ 1. La teoria delle masse elettromagnetiche fu studiata per la prima volta da Max Abraham (¹), prima della scoperta della teoria della relatività. Abraham considerò la massa di un sistema di cariche elettriche, rigido nel senso della meccanica classica, e trovò che nell'ipotesi che un tale sistema avesse simmetria sferica, la sua massa era variabile con la velocità, e precisamente eguale (²) a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ (essendo u l'energia elettrostatica del sistema e c la velocità della luce), per velocità nulle o molto piccole, mentre per velocità v confrontabili con c intervenivano dei termini di correzione un po' complicati dell'ordine di grandezza di $v^2 : c^2$. Prima ancora della teoria della relatività Fitzgerald introdusse, come è noto, l'ipotesi che i corpi si

(¹) M. Abraham, Theorie der Elektricität; Richardson, Elektron theory of Matter, cap. XI; Lorentz, The theory of elektrons, p. 37.

(²) Si dice ordinariamente che la massa elettromagnetica di uno strato sferico omogeneo di carica e, e di raggio r è $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$; se però si osserva che l'energia elettrostatica è $u = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$, si trova la massa $= \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

contraessero nella direzione del loro moto, nel rapporto $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}:1$, e Lorentz rifece la teoria delle masse elettromagnetiche di Abraham, considerando naturalmente invece che sistemi di cariche elettriche rigidi nel senso della meccanica classica, dei sistemi che subissero tale contrazione. Il risultato fu che la massa di quiete, ossia il limite della massa per velocità nulle, restava $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$, mentre venivano alterati i termini correttivi dipendenti da $v^2:c^2$. Le esperienze di Kaufmann e Bucherer, sulla variabilità con la velocità della massa delle particelle β dei corpi radioattivi si decisero nettamente a favore della teoria di Lorentz, così detta dell'elettrone contrattile, contro quella di Abraham, dell'elettrone rigido.

Scoperta in seguito la teoria della relatività, questa portò alla conseguenza che tutte le masse, fossero esse o no elettromagnetiche, dovevano variare con la velocità come quella dell'elettrone contrattile di Lorentz; per modo che le esperienze di Kaufmann e Bucherer vennero a lasciare indecisa la natura totalmente elettromagnetica o no della massa elettronica, venendo a costituire esclusivamente una conferma della teoria della relatività. D'altra parte la stessa teoria della relatività condusse ad attribuire ad un sistema dotato dell'energia u la massa $\frac{u}{c^2}$; di modo che venne a sorgere una grave discrepanza con le teorie elettrodinamiche di Abraham e Lorentz, che attribuiscono ad una distribuzione sferica di elettricità la massa $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

Questa differenza tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica mi si presentò stridente dopo due recenti Note [1], in una delle quali considerai le masse elettromagnetiche di sistemi a simmetria qualunque, trovando che sono in genere rappresentate da tensori anzichè da scalari, che si riducono naturalmente a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ nel caso della simmetria sferica, nell'altra invece, partendo dalla teoria generale della relatività considerai il peso dei medesimi sistemi, che trovai in ogni caso eguale a $\frac{u}{c^2}G$, essendo G l'accelerazione di gravità.

Nel presente lavoro noi dimostreremo che la differenza tra i due valori della massa ottenuti nei due modi, ha origine in un concetto di corpo rigido in contraddizione con la teoria della relatività che si applica nella teoria elettrodinamica, anche in quella dell'elettrone contrattile di Lorentz, e che con-

[1] E. Fermi, N. Cim., VI, 22, pp. 176, 192; 1921.

duce alla massa $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$; mentre la nozione di corpo rigido più giustificata e conforme alla teoria della relatività conduce invece alla massa $= \frac{u}{c^2}$.

§ 2. Consideriamo dunque un sistema di cariche elettriche sostenuto da un dielettrico rigido che sotto l'azione di un campo elettromagnetico, in parte dovuto al sistema stesso, ed in parte a cause esterne, si muova di moto traslatorio descrivendo un tubo orario nello spazio-tempo (¹). Vediamo con precisione che cosa debba intendersi per moto traslatorio rigido.

Consideriamo un qualunque sistema di riferimento di Lorentz-Einstein e supponiamo che per esso ad un certo istante un punto del sistema di cariche abbia velocità nulla: diremo che il moto è traslatorio se, con tali ipotesi, nello stesso riferimento, per quell'istante, tutti i punti del sistema hanno velocità nulla. Ciò equivale a dire che le linee orarie dei punti del nostro sistema sono traiettorie ortogonali di una famiglia di spazii lineari; ed infatti in un riferimento di Lorentz-Einstein in cui per spazio si prenda uno degli spazii della famiglia tutto il sistema è in quiete al tempo zero, poichè lo spazio taglia ortogonalmente tutte le linee orarie. Con questa definizione di moto traslatorio la rigidità del sistema viene espressa dal fatto che la sua figura in questi spazii perpendicolari al tubo resta invariabile; ossia che tutte le sezioni rette del tubo orario sono fra loro eguali.

Data la complicazione dei vincoli del nostro sistema (rigidità secondo la definizione precedente). lo tratteremo col principio di Hamilton.

Per poterlo applicare al caso nostro ci occorrerà dunque avere una variazione del moto del nostro sistema conforme ai vincoli del problema, ossia alla rigidità giustamente interpretata. Ora noi mostreremo che si giunge al valore $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ oppure a quello $\frac{u}{c^2}$ per la massa elettromagnetica secondo che per tale variazione si prende l'una o l'altra delle due che andiamo ad illustrare e che distinguiamo con le lettere A e B. La variazione A è però, come immediatamente si vedrà, da scartarsi, perchè in contraddizione col principio di relatività.

Sia T il tubo orario descritto dal sistema; nella figura lo spazio di riferimento x, y, z è rappresentato su una sola dimensione, dall'asse x ed al tempo t è sostituito $i\ c\ t$, per avere una metrica definita.

Variazione A: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico, parallelo allo spazio (x, y, z) di ogni sezione del tubo parallela allo

(¹) In tutto il seguito si riguarda lo spazio-tempo come euclideo, poichè si intende che i campi elettromagnetici che in esso si considerano siano abbastanza poco intensi per non alterarne sensibilmente la struttura metrica.

spazio stesso. Nella figura otterremo dunque la variazione del nostro tubo orario spostando parallelamente all'asse x ogni sezione $t=$ costante del tubo di un segmento infinitesimo arbitrario. Se ci limitiamo alla considerazione di spostamenti traslatorii avremo dunque δx, δy, δz funzioni arbitrarie del solo tempo, e $\delta t=0$.

Variazione B: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità ogni spostamento infinitesimo perpendicolare al tubo di ogni sezione normale del tubo stesso, rigido nell'ordinario senso cinematico. Nella figura otterremo tale variazione spostando parallelamente a sè di un segmento arbitrario ogni sezione normale del tubo.

Biologia. — *Sulla biofotogenesi.* Nota preliminare di SILVIA MORTARA, presentata dal Corrisp. RAFFAELE.

A proposito della questione tanto dibattuta, intorno al modo di prodursi della luce negli animali, mi è occorso ultimamente di fare alcune interessanti osservazioni, sulle quali desidero richiamare l'attenzione degli studiosi, perchè credo che se ne potranno trarre delle conclusioni importanti, estendendo il campo delle ricerche.

Per continuare una serie già iniziata di studî sulla morfologia degli organi fotogeni di animali marini, ho avuto in esame da Messina un certo numero di esemplari in ghiaccio, che mi sono arrivati in perfetto stato di conservazione e di freschezza, tanto che ho pensato di approfittarne per fare qualche osservazione, che potesse aiutarmi a cercare una spiegazione della biofotogenesi. Secondo la teoria del Pierantoni, già accettata ed in parte confermata, a quanto pare, da autori stranieri, questo fenomeno dovrebbe ridursi semplicemente ad un caso di simbiosi endocellulare, per il quale la luminosità degli animali sarebbe dovuta soltanto alla attività di miriadi di bacteri fotogeni, annidati dentro le cellule della sostanza luminosa, e divenuti ormai simbionti necessarî dell'ospite, che li alberga e li trasmette di generazione in generazione.

Affrontando il problema sotto questo punto di vista, ho voluto tentare anch'io di coltivare i germi fotogeni, dagli animali avuti da Messina, ed ho potuto eseguire, nell'Istituto di Igiene della nostra Università, diretto dal prof. G. Sanarelli, e precisamente nel laboratorio del dott. V. Puntoni, professore incaricato di Batteriologia, una serie di ricerche, tendenti appunto a rivelare la origine bacterica della luce animale.

Ho avuto a mia disposizione piccoli *Crostacei*, *Pesci* (Argyropelecus, Stomias, ecc.) e *Cefalopodi* (varî esemplari di Heteroteuthis dispar); ma ho dovuto escludere subito le forme dei due primi gruppi, perchè i loro

piccoli organi fotogeni si prestano male ai prelevamenti dal loro interno, assolutamente garantiti contro eventuali contaminazioni. È infatti indispensabile che questa operazione sia eseguita con ogni precauzione, altrimenti non si può mai essere sicuri di avere estratto il contenuto dell'organo, puro dai germi viventi nell'ambiente esterno.

L'*Heteroteuthis dispar* si presta meravigliosamente bene allo scopo; è una piccola forma di Cefalopodo abissale (vivente presso a poco tra 1200 e 1500 metri), che arriva abbastanza di frequente alle nostre spiaggie e si raccoglie abbondantemente a Messina, in varî stadî di sviluppo. La lunghezza del mantello non supera negli adulti i 2 $^1/_2$-3 centimetri; ha forma piuttosto tozza, come tutti i *Sepiolidae*. Ogni individuo porta nella cavità palleale, addossato alla borsa del nero, un unico grande organo fotogeno impari, sferoidale, simile, per l'aspetto esterno, ad una grossa perla, il cui diametro supera spesso il $^1/_2$ centimetro e può raggiungere talvolta perfino quasi 1 centimetro. Un organo gigantesco, dunque, che si isola facilmente, e si presta molto bene a qualsiasi indagine. La sua struttura, che qui non descriverò in particolare, è molto affine a quella degli organi fotogeni di *Sepiola* e *Rondeletia*, che sono appunto le due forme prese in esame dal Pierantoni (¹), sulle quali si può dire fondata la sua teoria della simbiosi bacterica, almeno per quanto riguarda i Cefalopodi. Anche in *Heteroteuthis dispar* si trova un organo a tipo ghiandolare, i cui condotti sboccano verso l'esterno, per mezzo di due grossi pori. Nel lume di questi condotti ghiandolari, che formano col loro insieme la massa principale dell'organo, deve venire senza dubbio elaborata la sostanza fotogena, ed in essi appunto (a somiglianza di quanto ha trovato il Pierantoni) dovrebbero aver sede le miriadi di bacteri, produttori di luce.

Allo scopo di evitare qualsiasi causa di errore e per avere la assoluta certezza che, il materiale adoperato per le culture, fosse preso solo dal contenuto dell'organo fotogeno, questo è stato perfettamente isolato e poi steririlizzato, per un tratto della sua superficie, mediante una spatolina arroventata. Da questa superficie sterilizzata si è fatta penetrare, nell'interno dell'organo, la punta di una sottilissima pipetta Pasteur, sterile, e per mezzo di essa si è aspirato il contenuto dell'organo, procurando di pescare a diverse altezze e da ogni lato. Il materiale così ottenuto è stato seminato su tubi di agar al brodo di seppia, a becco di flauto, e poi messo a coltivare in stufa, a 20°. Dopo 24 ore non si aveva alcuno sviluppo, e, nei giorni successivi, i tubi, tenuti in osservazione, sono rimasti *assolutamente sterili*.

Per non affrettare le conclusioni abbiamo voluto ripetere l'esperienza su nuovo materiale di Messina, usando sempre le rigorose precauzioni di ste-

(¹) Pierantoni U., *Gli organi simbiotici e la luminescenza bacterica nei Cefalopodi*. Pubbl. Staz. Zool., Napoli, vol. II, p. 105 [1918].

rilizzazione, descritte sopra. Il risultato delle culture è stato sempre negativo.

Preparati per strusciamento, fatti dal contenuto dell'organo fotogeno, e coloriti con Gram e con fucsina, non hanno rivelato la presenza di alcuna forma bacterica tipica e nemmeno di forme riportabili ad elementi microbici atipici, per degenerazione o adattamento.

Risultato negativo hanno dato anche le culture tentate strusciando sull'agar la superficie esterna dell'organo fotogeno.

Da un organo intero, pestato nel mortaio, per avere la certezza di provarne tutto il contenuto, non si è nemmeno potuto avere alcun bacterio fotogeno.

A controllo delle precedenti osservazioni, ho voluto eseguire un esame accurato su sezioni di organi conservati, di *Heteroteuthis dispar*, per tentare se fosse possibile rivelare, nei tagli, la presenza dei simbionti. Ma anche in questo caso la prova ha avuto risultato decisamente negativo. Non posso per ora nemmeno accennare alle particolarità strutturali di questi organi [1], sui quali mi riserbo di riferire più ampiamente in seguito, mi basta solo far noto qui che, tentando i metodi indicati dallo stesso Pierantoni (specialmente la colorazione col Giemsa), ed altri (ematossilina ferrica, fucsina, bleu di Loeffler ecc.), non mi è stato possibile in nessun caso di mettere in evidenza nel lume o dentro le cellule delle ghiandole, qualche formazione, che potesse far sospettare l'esistenza di germi simbiotici dentro questi organi.

Dopo queste osservazioni e sopratutto in base alle ripetute esperienze, di cui ho riferito sopra, credo di poter senz'altro concludere che: *l'organo fotogeno di Heteroteuthis dispar* (contrariamente a quanto sembrava ammettere implicitamente il Pierantoni) *non contiene alcun germe fotogeno nel suo interno*; così che non è assolutamente possibile ritenere dimostrata la necessità di una simbiosi bacterica, per la produzione della luce nei Cefalopodi.

Per contro, di fronte alle esperienze negative, che mi hanno portato a tali conclusioni, ho potuto notare, tenendo alcun tempo in osservazione una parte del materiale fresco avuto da Messina, che compariva al secondo e al terzo giorno una certa luminosità, in varî punti, sulla superficie del corpo di quasi tutti gli animali.

È noto che si ha spesso un grande sviluppo di bacteri fotogeni nella muscolatura e sulla pelle di animali morti da poco, prima che si inizino processi di putrefazione manifesta. Prendendo delle ansate di materiale dalla pelle degli animali, che tenevo in osservazione, o dall'acqua in cui erano conservati, e seminandole su piastre di agar di seppia, che mettevo a col-

[1] Per tale struttura confronta anche: Meyer Werner Th., *Ueber das Leuchtogen der Sepiolini*. P. II, in Zool. Anz., Bd. 32 [1907].

tivare nella stufa a 20°, ho potuto isolare, ripetutamente, varî stipiti di una specie microbica fosforescente, che dà una bellissima luminosità nelle culture, e che sarà oggetto di particolari ricerche.

In attesa di potere esporre più ampiamente i risultati delle osservazioni morfologiche e culturali, fatte su questo microbio, posso già dire che, per il suo comportamento e per una quantità di caratteri riscontrati, mi sembra si avvicini molto a quelli ottenuti dagli organi fotogeni di Sepiola, dallo Zirpolo [1].

Un confronto preciso fra la mia e le sue culture è stato iniziato e spero poterne esporre al più presto i risultati, insieme ad alcune considerazioni sulla teoria simbiotica del Pierantoni.

Per ora, da quanto precede, posso concludere: che nessun microbio fotogeno fu trovato nell'interno degli organi luminosi di *Heteroteuthis dispar*, mentre essi erano senza dubbio presenti sulla superficie esterna degli animali esaminati, similmente a quanto si verifica in animali marini non fotogeni, con grandissima frequenza.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Cantone legge la seguente commemorazione del Socio straniero Gabriele Lippmann.

Nella tornata del 6 novembre l'Accademia ebbe l'annunzio della morte del Socio straniero Gabriele Lippmann, avvenuta il 12 luglio sul transatlantico *Paris* per male contratto durante il viaggio; non vi dispiaccia che alle nobili parole di sentito cordoglio pronunziate in quella occasione dal nostro illustre Presidente faccia seguire, ora, una breve esposizione della vita scientifica dell'insigne Collega estinto.

Gabriele Lippmann, nato ad Hollerich presso Lussemburgo nel 1845, risiedette fin dai primi anni a Parigi; ed ivi compì gli studî universitarî sotto la guida di Mascart, Debray e Bertin, l'ultimo dei quali lo ebbe particolarmente caro poichè avea avuto agio di apprezzare l'acutezza d'ingegno del giovane fisico, per quanto non accompagnata da facilità di adattamento ai metodi scolastici. Per siffatta indole, che dipendeva da un temperamento riflessivo ed insofferente di vincoli, il Lippmann, pure avendo dovuto subire qualche insuccesso nei primordî della carriera scientifica, seppe formarsi una solida coltura nei varî rami della fisica e della fisica matematica, coltura che venne completata negli anni di soggiorno in Germania, e cioè dal 1872

[1] Zirpolo G., *I batterii fotogeni degli organi luminosi di Sepiola intermedia*. Boll. Soc. Nat., vol. 30, pag. 206 [1918].

al 1874, in varî centri scientifici e specialmente nel laboratorio di Kirchhoff ad Heidelberg.

Le peregrinazioni compiute in tale periodo ebbero indubbiamente influenza benefica nello spirito del sagace osservatore, giacchè egli passò presto dal campo della pura astrazione scientifica alla vita pratica dello sperimentatore con un entusiasmo che appare in certo contrasto con la tendenza dimostrata prima verso gli studî teorici, coltivati quasi per soddisfazione personale. E svolse fin dall'inizio opera di maestro, quale poteva aspettarsi dalla lunga e profonda preparazione, portando nella ricerca una nota di originalità che si rivela nella limpida esposizione dei risultati in Note brevi, ma che dànno un'idea precisa del concetto che guidava l'autore nell'indagine, della perfetta rispondenza del metodo alla natura essenziale della ricerca, e delle applicazioni che poteano trarsi dai risultati, spesso tendenti a fini pratici di notevole importanza.

Tali pregi si riscontrano già nelle pubblicazioni riferentisi ai fenomeni elettrocapillari. In un primo lavoretto del 1872 si dà la giusta interpretazione del contrarsi delle gocce di mercurio, immerse in una soluzione acida, per il contatto con un filo di ferro; ed un anno dopo si comunica all'Accademia delle Scienze in una Nota di appena due pagine l'esito delle ricerche intese a mettere in evidenza i pregi di un elettrometro fondato sulle variazioni della tensione superficiale del mercurio dipendentemente dal potenziale di questo liquido, apprestandosi in tal modo alla scienza uno strumento che in esattezza e sensibilità supera, come egli stesso afferma, tutti quelli ideati per la misura dei dislivelli elettrici. Ed in vero la fisica, la chimica e le scienze biologiche molto devono a questo delicatissimo strumento; in quanto che per esso è stato possibile eseguire, con approssimazione fino ad 1/1000° di *volta* misure di forze elettromotrici in un campo estesissimo di ricerche, senza andare incontro alle difficoltà inerenti ad altri metodi meno precisi, e d'altra parte il fatto che la forza contrattile del mercurio in qualsiasi liquido dipende unicamente dal potenziale elettrico, giusta la dimostrazione diretta inoppugnabile datane dallo stesso Lippmann nel 1879, può considerarsi come l'origine di una serie di lavori d'indole teorica per i quali si è giunti, col Frenkel, a valutare la tensione superficiale del mercurio muovendo dall'ipotesi astronomica del Rutherford sulla costituzione elettrica dell'atomo.

Il rigore scientifico delle deduzioni del Lippmann deriva, come si accennò poco fa, dalla giusta impostazione dei problemi che egli imprese a trattare; e se ciò può dirsi dei lavori sperimentali, non diverso giudizio risulta dall'esame delle ricerche di natura teorica. Fra queste occupa un posto eminente lo studio sul principio di conservazione dell'elettricità, dove si pongono le basi di un indirizzo scientifico che trae le sue origini dai concetti fondamentali della termodinamica, trasportati nel campo della elettrologia

per lo stretto nesso fra i due ordini di studî riguardanti l'energia elettrica e la termica.

Messo in rilievo, con una pubblicazione preliminare, l'indole sperimentale del procedimento per cui fu condotto Carnot a stabilire il postulato che, sotto altra forma, costituisce ora il secondo principio della termodinamica, Gabriele Lippmann trova che al concetto di entropia si può far corrispondere l'altro di carica elettrica, trattandosi di grandezze similmente legate, alla temperatura in un caso, ed al potenziale elettrico nell'altro, e del pari connesse alle rispettive energie, sicchè, posto assai opportunamente il principio sperimentale di conservazione dell'elettricità sotto la forma $\int dm = 0$ per un ciclo chiuso di trasformazioni, e quindi considerato l'elemento di carica dm come un differenziale esatto, svolge i problemi di elettrostrizione dei gas e dei solidi, di piezoelettricità, e dei fenomeni elettrocapillari con un metodo schematico seducente mediante il quale si pongono in luce relazioni di dipendenza reciproca fra le variabili che intervengono nella produzione degli effetti dianzi cennati. Non può negarsi che si ha da fare con procedimenti dommatici da cui non emerge il meccanismo di produzione dei fenomeni, come nel caso di semplici applicazioni del principio di conservazione dell'energia; ma è pregio indiscutibile del metodo potersi accertare nel modo più facile proprietà che, in alcuni casi almeno, difficilmente si sarebbero intuite dal fisico per via diretta, senza contare l'utile che può ritrarsi dalle considerazioni fondamentali di stretta analogia tra i fenomeni termici ed elettrici in tempi in cui tutte le teorie sulla costituzione della materia si orientano verso un indirizzo essenzialmente elettrico.

Non minore genialità che in queste ricerche si riscontra nei lavori di Lippmann sulla fotografia dei colori. Il concetto da cui egli prese le mosse fu ardito, poichè, se poteva concepirsi la realizzazione di onde stazionarie mediante l'impiego di una superficie riflettente cui arrivi il sistema di onde che darebbero lo spettro, era assai difficile imaginare che si riuscisse ad avere nello spessore di 1/20 di millimetro di gelatina qualche centinaio di sottilissimi strati sensibilizzati dal processo fotografico, e che per giunta non venisse alterata la distribuzione con le operazioni destinate a sviluppare ed a fissare il deposito. Eppure a tanto egli pervenne dopo tentativi non pochi per ottenere le condizioni migliori dell'esperienza, scegliendo gelatine trasparenti e prive di nuclei visibili coi più potenti mezzi di osservazione, pose opportune, e sostanze assorbenti appropriate perchè la gradazione delle intensità nelle varie regioni dello spettro non risentisse l'effetto del potere attinico dei raggi non commisurato alla intensità delle sensazioni visive. Ma sopra tutto bisogna riconoscere che egli ebbe la mano felice, avendo saputo trarre partito dai fenomeni d'interferenza i quali trovano, con facilità maggiore che non si creda, la sede del loro svolgimento grazie al sovrapporsi degli effetti col ritmo regolare delle perturbazioni eteree e ad una certa

rigidità di struttura cristallina che ne consegue per la legge medesima di distribuzione di joni modificati dalle forze elettriche delle onde.

Gabriele Lippmann rese noto all'Accademia delle scienze il risultato della sua ricerca nella seduta del 2 febbraio 1891; epperò non pago dei primi successi attese per lungo tempo a studî sullo stesso argomento, sia per conseguire una fedele documentazione obiettiva dello spettro, sia per giungere alla fotografia di oggetti a colori non semplici, e risolse i due problemi in modo così completo da riscuotere il plauso universale, pur quando per ritrarre i colori si diffondeva un metodo scientificamente meno perfetto, ma di più facile attuazione dal punto di vista fotografico.

Si farebbe torto alla moltiforme genialità del fisico francese se fosse considerata l'opera scientifica di lui circoscritta nel campo delle ricerche sulle quali ho richiamato l'attenzione dei Colleghi, tanto più che in alcune parti di quella che suol riguardarsi come produzione secondaria si hanno lavori in cui emergono concetti teorici e criteri sperimentali degni certamente di particolare rilievo.

Così ad esempio egli si occupa degli schermi magnetici dimostrando con una semplice esperienza che la loro efficacia risiede nella grande permeabilità agli effetti d'induzione, risultando con questa un compenso fra l'azione diretta del campo e quella che deriva dalle masse magnetiche indotte, e trae occasione da tal genere di ricerche per dimostrare che per induzione non possono aversi correnti continue senza ricorrere a contatti striscianti; discute sulla legge generale d'induzione nei circuiti privi di resistenza mostrando quali conseguenze importanti si ricavano per il flusso d'induzione qualora si riesca, come in realtà è avvenuto con le classiche esperienze di Kamerling Onnes, ad operare con resistenze nulle; esamina le proprietà ottiche di una lamina polarizzata per escludere che nello strato superficiale del metallo alterato si creino variazioni di fase apprezzabili; mette in evidenza le proprietà elettriche depolarizzanti delle soluzioni saline in rapporto alla natura degli elettrodi immersi; costruisce un galvanometro perfettamente astatico mediante una doppia sospensione, ed altro ne inventa, che può servire anche da elettrodinamometro, mettendo a profitto l'azione associata della corrente e di un forte campo magnetico sopra una lamina di mercurio e trova che lo strumento risponde bene alla doppia funzione dal lato pratico; espone metodi ingegnosi per togliere ai pendoli le perturbazioni dovute ai meccanismi stessi che servono a mantenere il loro moto oscillatorio; attua mezzi idonei per mettere esattamente a fuoco i collimatori; intraprende studî accurati per la registrazione tanto delle onde sismiche quanto delle accelerazioni assolute del suolo; istituisce indagini di endosmosi fra liquidi, o gas, a temperature diverse; e non disdegna di prendere in esame questioni d'indole generale sulla capillarità, sulla temperatura assoluta, e sulla valutazione del tempo in base alla gravitazione universale.

I grandi meriti di Gabriele Lippmann furono presto riconosciuti; ed infatti nel 1883 egli occupò alla Sorbona la cattedra di fisica matematica, tre anni dopo passò a quella di fisica generale resa vacante per la morte di Jamin, assunse poi la direzione del *laboratorio di ricerche fisiche* dando impulso vigoroso alle indagini scientifiche in quella sede importantissima di studî, nel 1886 fu nominato membro dell'Accademia delle scienze, nel 1898 ricevette il premio Nobel per le ricerche sulla fotografia dei colori; e numerose altre distinzioni ottenne essendo chiamato a far parte delle maggiori Accademie, non esclusa la nostra che lo ebbe Socio fin dall'aprile del 1909.

Nella scienza, come nell'arte, non si compie vero progresso senza l'opera innovatrice di persone che sappiano dare un'impronta personale efficace al lavoro di evoluzione cui tende il nostro spirito; ed il valore di siffatta opera si rende più elevato se essa interviene in un periodo di stasi, come quella che si ebbe verso la metà del secolo scorso. Alla schiera di coloro che contribuirono in quel tempo ad un indirizzo salutare per le ricerche fisiche appartenne certamente il nostro compianto Collega, che alle doti di scienziato profondo associava quelle di Maestro dalle vedute larghe e veramente originali; e questa Accademia, che apprezza ogni alta attività negli svariati ordini della produzione intellettuale, manda oggi un mesto reverente saluto alla memoria di Gabriele Lippmann la cui lunga vita fu consacrata al culto dell'ideale scientifico volto al conseguimento dell'umano progresso.

Alcune parole aggiunge alla commemorazione il Socio Fano, ricordando quanta riconoscenza debbano i biologi alla memoria di Lippmann per l'aiuto grandissimo che alla biologia hanno dato gli apparecchi da quest'ultimo inventati.

Il Presidente Volterra informa i Soci che alla seduta assistono i professori Platania e Archibald. Comunica inoltre che l'Accademia sarà rappresentata alle commemorazioni dei Soci Ciamician e Dini, che avranno luogo, per il primo a Trieste il giorno 8 corr., e per il secondo a Pisa il giorno 12.

Il Socio Pirotta legge, a nome del Corrisp. Longo, la seguente commemorazione del Corrisp. Giovanni Arcangeli.

Il 16 luglio 1921, nell'età di 81 anno, serenamente si spegneva in Pisa Giovanni Arcangeli, uno dei più noti Botanici italiani.

Nato a Firenze il 18 luglio 1840, si laureò in Scienze Naturali nel 1862 all'Università di Pisa, e in questa Università il 3 novembre 1864 iniziò la sua carriera didattica e scientifica con la sua nomina ad Aiuto alla Cattedra di Botanica. Il 1° gennaio 1872 andò ad occupare la Cattedra di Storia Naturale nel R. Istituto Tecnico di Livorno, ove rimase fino al 1874, nel quale anno, con Decreto del 29 novembre, fu nominato Aggregato alla Cat-

tedra di Botanica nel R. Istituto di Studî Superiori di Firenze. Il 1° novembre 1879 andò, in seguito a concorso, Professore Ordinario di Botanica e Direttore dell'Orto Botanico nella R. Università di Torino. Breve fu il suo soggiorno colà, che, a decorrere dal 1° dicembre 1881, venne nominato Professore di Botanica e Direttore dell'Orto Botanico nella R. Università di Pisa. Ritornato così dove aveva compiuto i suoi studî ed iniziata la sua carriera didattica e scientifica, vi rimase ininterrottamente per ben 34 anni, cioè fino al 18 luglio 1915, quando, a causa dei limiti di età, collocato a riposo, Egli dovette con suo grande dolore abbandonare la Cattedra.

Egli però continuò sempre a far parte del Consiglio della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa giacchè, in seguito a voto della Facoltà, con Decreto del 5 dicembre 1915, venne nominato Professore Emerito, ed egli, neppure allora, non mancò mai d'intervenire ad alcuna funzione accademica a cui gli desse diritto la qualità di Professore Emerito; e lo ricordo presente anche pochi giorni prima della sua morte ad una seduta di Facoltà e ad una Laurea.

Zelante, scrupoloso nell'adempimento del proprio dovere, sentì fortemente la sua missione d'insegnante, e all'insegnamento attese sempre con amore e passione.

Fu uomo di vasta coltura chè non limitò il suo studio al campo già così ampio della Scienza delle piante, ma lo estese anche ad altre discipline più o meno affini per abbracciare da vero e completo naturalista tutto il mondo vivente e fisico che ci circonda. E durante il lungo periodo della sua direzione attese anche sempre con amore e competenza, al decoro e al miglioramento dello storico Orto Botanico Pisano. Sotto la sua direzione fu infatti accresciuta l'area dell'Orto stesso e in esso fu costruita l'Aula per le lezioni e un Istituto degno delle nobili tradizioni dell'Ateneo Pisano.

Alla sua lunga opera didattica corrisponde anche altrettanto lunga e feconda l'opera scientifica.

Esordisce nell'agone scientifico con una pubblicazione dal titolo: *Sopra alcune forme regolari delle cellule vegetali*, comparsa nel Nuovo Giornale Botanico Italiano del 1869, e da allora possiamo dire che ininterrottamente il suo nome compare nella Bibliografia botanica italiana.

Dai Funghi e dalle Alghe alle Fanerogame; dalla struttura delle cellule a quella delle foglie e dei fusti; dalla impollinazione e fecondazione alla struttura dei semi e alla loro germinazione; dallo studio delle forme normali a quelle mostruose e patologiche; dalla funzione vessillare a quella clorofilliana e trofilegica; dalle piante bussole a quelle parassite; dallo svolgimento di calore nelle piante agli effetti del freddo e del fulmine; dalle piante spontanee a quelle coltivate; dalle piante attualmente viventi a quelle fossili, non c'è campo, possiamo dire, della Botanica in cui Egli non abbia lavorato con competenza.

A lui si debbono anche due pregevoli trattati: il *Compendio della Flora Italiana*, che ebbe due edizioni completamente esaurite, ben noto a tutti i botanici italiani, e il *Compendio di Botanica*, che raggiunse la 5ª edizione, ad uso dei suoi studenti « i quali, Egli scrive, possono in esso ritrovare il sunto degli argomenti, che vengono man mano trattati » nelle lezioni.

Visse vita modesta, alieno da ogni pompa vana. E tale sua modestia si manifesta anche nelle ultime sue disposizioni testamentarie: « In seguito al mio decesso, lasciò scritto, intendo che siano escluse le partecipazioni ed ogni e qualunque manifestazione pomposa ».

Di animo forte nelle avversità della vita attese sempre sereno, nel silenzio e nel raccoglimento, ai suoi studî diletti ed anche in questi ultimi anni spesso ritornava nell'Orto a lui caro, dove aveva trascorso tanta parte della sua vita e con me affabilmente s'intratteneva a discorrere sia di problemi di Biologia vegetale — chè in lui gli anni non avevano affievolito l'amore per la scienza — sia di quelli assillanti pel nostro paese — poichè al di sopra di tutto Egli sentiva di essere italiano!

Serenamente, com'Egli visse, si è spento nella piena coscienza di non avere inutilmente spesa la sua lunga vita nel culto della scienza e nell'adempimento di ogni dovere.

Lascia vivo rimpianto in quanti lo ebbero maestro, collega, amico, in quanti ne conobbero le doti della mente e del cuore.

Alla sua memoria il nostro estremo riverente saluto.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

U. Sborgi e L. Ferri. *Sui borati — Sistema* $(NH_4)_2O$ — B_2O_3 — H_2O. *Diagramma temperatura — concentrazione* (pres. dal Socio Nasini).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Volterra offre, a nome dell'autore, un volume del professore H. Andoyer intitolato: *L'oeuvre scientifique de Laplace*, dando notizia dei pregi e della utilità della pubblicazione stessa.

Il Presidente segnala all'attenzione dei Soci anche il volume del Brigadiere Generale S. Braccialini, *I telemetri da costa e gli apparecchi accessori sistema Braccialini*, parlando della importanza del tema trattato nel volume stesso, e ricordando i progressi che alla telemetria l'autore ha saputo far compiere.

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste una raccolta di lettere di Jacopo Berzelius, pubblicata dalla R. Accademia delle scienze di Svezia, e un'altra raccolta di lettere di Carlo Linneo, edita per cura della Università di Upsala.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 4°, Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 7°-10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 9°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 8°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

E. **Mancini**, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 6.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 6°

Seduta del 19 marzo 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

······

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1922.

F. D'OVIDIO, Presidente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su una classe di serie di polinomi di una variabile complessa.* Nota di N. ABRAMESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota mi propongo di trovare il campo di convergenza delle serie di polinomi di una variabile complessa, $\Sigma a_n P_n(x)$, i polinomi $P_n(x)$ essendo legati [1] dalle relazioni

$$(1)\quad P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t) - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} P_1(t) + (n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha}\,,\ n = 2, 3 \ldots,$$

$$P_1(t) = -t\ ,\ t = \frac{x-\alpha_0}{\alpha}\,.$$

dove $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sono quantità date, e $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ quantità conosciute di modo che $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \frac{1}{\varrho}$, $\varrho = c - te > 1$.

I. Considereremo da prima il caso nel quale la relazione (1) contiene $(k+1)$ polinomi,

$$(2)\qquad P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t) - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} P_{n-k+1}(t)\,,\quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\alpha_s = 0\ ,\ s > k-1\ ,\ P_1(t) = -t = -\frac{x-\alpha_0}{\alpha}.$$

[1] Veggansi i problemi analoghi studiati nelle mie Note: *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa* (questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 3°, pag. 89) e *Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré* (ibid., fasc 4°, pag. 152).

Cambiando n in $(n+k-1)$, la relazione (2) diviene

$$(3)\qquad P_{n+k}(t) - t\,P_{n+k-1}(t) + \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n+k-2}(t) + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} P_n(t) = 0\,,$$

$$t = \frac{x-\alpha_0}{\alpha}\,,$$

che è una relazione ricorrente di Poincaré [1],

$$(4)\qquad Q_k(x)\,P_{n+k}(x) + Q_{k-1}(x)\,P_{n+k-1}(x) + \cdots + Q_0(x)\,P_n(x) = 0\,,$$

$Q_s(x)$ essendo funzioni che dipendono da x e da n.

La serie di Poincaré, $\Sigma a_n P_n(x)$, nella quale i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni (4), ha il campo di convergenza limitato dalla curva [2]

$$(5)\qquad |\beta(x)| = \varrho\,,$$

$\beta(x)$ essendo la radice di più grande modulo dell'equazione

$$(6)\qquad F(\lambda) = \lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_0 = 0\ ,\ A_s = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_s}{Q_k}\,.$$

Nel caso in cui i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni (2), l'equazione (6) diviene

$$(7)\qquad F(\lambda) = \alpha\lambda^k - (x-\alpha_0)\,\lambda^{k-1} + \alpha_1\lambda^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} = 0\,.$$

Facendo in questa equazione la sostituzione

$$(8)\qquad x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1}\,,\quad |X| < 1\,,$$

otteniamo

$$F(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{X}\right)\Phi(\lambda)\,,$$

$$\Phi(\lambda) = \alpha\lambda^{k-1} - (\alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1})\,\lambda^{k-2} - $$
$$- (\alpha_2 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-2})\,\lambda^{k-3} - \cdots - \alpha_{k-1} X\,.$$

Si può poi dimostrare (cfr. § II) che $\lambda = \frac{1}{X}$ è la radice di massimo modulo dell'equazione (7) e che *il campo di convergenza delle serie* $\Sigma a_n P_n(x)$, *i polinomi* $P_n(x)$ *essendo legati dalle relazioni* (2), *è limitato dalle curve che si ottengono dai cerchi* $|X| = \frac{1}{\varrho} < 1$ *mediante la trasformazione*

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1}\ ,\ |X| = \frac{1}{\varrho} = C - te\,.$$

[1] Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Mathematics, vol. VII); Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, pag. 419.

[2] Ibid..

ESEMPI. — 1°. $P_{n+1} = \frac{x - \alpha_0}{\alpha} P_n$. La curva di convergenza è il cerchio

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0, \quad |X| = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{1}{\varrho} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

di raggio $|\alpha|\varrho$. Si ritrova dunque la regola di Cauchy-Hadamard per la serie Taylor.

2°. $P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t)$, $t = \frac{x - \alpha_0}{\alpha}$. Le curve di convergenza sono ellissi omofocali date dalla trasformazione

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X, |X| = \frac{1}{\varrho} = C - te < 1.$$

Nel caso dei polinomi di Tchebicheff,

$$P_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n = 2^n x^n + \dots,$$

abbiamo $P_n - 2x P_{n-1} + P_{n-2} = 0$. Osserviamo che in (2) $P_n(x)$ sono ordinati secondo le potenze di $\frac{x - \alpha_0}{\alpha} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$,

$$\frac{1}{2} P_n - x P_{n-1} + \frac{1}{2} P_{n-2} = 0,$$

dunque le curve di convergenza sono le ellissi

$$x = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right), |X| = \frac{1}{\varrho} < 1, \left(\alpha_0 = 0, \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}\right),$$

coi fuochi $-1, +1$.

II. Consideriamo il caso generale nel quale i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni

$$P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} P_1(t) + (n+1) \frac{\alpha_n}{\alpha},$$

$$P_0 = 1, P_1 = -t, t = \frac{x - \alpha_0}{\alpha}, \overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho} < 1.$$

Facendo $n = 1, 2, 3, \dots$, risulta, dalle relazioni ottenute, che, x appartenendo al campo di convergenza delle serie $\Sigma a_n P_n(x)$, la serie in Z (Z abbastanza piccolo)

$$P_1(x) + Z P_2(x) + \dots + Z^n P_{n+1}(x) + \dots \tag{9}$$

è il quoziente di due serie

$$\frac{c_1 + c_2 Z + \dots + c_{n+1} Z^n + \dots}{b_1 + b_2 Z + \dots + b_{n+1} Z^n + \dots} = P_1 + Z P_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots, b_1 \neq 0. \tag{10}$$

Per identificazione, paragonando le relazioni trovate con quelle ottenute facendo in (1) $n = 1, 2, 3, \dots$, troviamo

$$c_1 = -(x - \alpha_0), \; c_2 = 2\alpha_1, \; c_3 = 3\alpha_2, \dots, \; c_{n+1} = (n+1)\alpha_n, \dots,$$
$$b_1 = \alpha, \; b_2 = -(x - \alpha_0), \; b_3 = \alpha_1, \dots, \; b_{n+1} = \alpha_{n-1}, \dots,$$

sicchè le serie $\Sigma c_n Z^n, \Sigma b_n Z^n$ hanno lo stesso cerchio di convergenza di raggio $\dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|}} = 1$.

Se x è nel campo di convergenza della serie $\Sigma a_n P_n(x)$, abbiamo

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|P_n(x)|} < 1, \; \overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} < \varrho.$$

La serie (9) è convergente se

$$|Z| \overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|} < 1, \; |Z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|}}.$$

Se dunque si prende

$$|Z| < \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|}},$$

avremo a fortiori

$$|Z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|}},$$

e per conseguenza lo sviluppo (10) è valevole nello stesso tempo che lo sviluppo $\Sigma a_n P_n(x)$.

Ne segue che, quando x è nella regione di convergenza della serie $\Sigma a_n P_n(x)$ e $|Z| < \dfrac{1}{\varrho}$, la relazione (10) si scrive

$$\frac{\alpha_0 - x + 2\alpha_1 Z + \cdots + (n+1)\alpha_n Z^n + \cdots}{\alpha + (\alpha_0 - x) Z + \alpha_1 Z^2 + \cdots + \alpha_{n-1} Z^n + \cdots} = P_1(x) + Z P_2(x) + \cdots,$$

$$\frac{Z\varphi'(Z) + \varphi(Z) - x}{\alpha + Z\varphi(Z) - Zx} = P_1(x) + ZP_2(x) + \cdots, \tag{11}$$

$$\varphi(Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \cdots + \alpha_n Z^n + \cdots, \; \varphi'(Z) = \frac{d\varphi}{dZ},$$

e $\varphi(Z)$ è regolare nel cerchio di raggio 1. Ponendo

$$z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z), \tag{12}$$

abbiamo lo sviluppo

$$\frac{z'}{z - x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \cdots, \; z' = \frac{dz}{dZ}. \tag{13}$$

valido solamente per i punti x del campo di convergenza delle serie $\Sigma a_n \mathrm{P}_n(x)$, $|Z| < \frac{1}{\varrho}$.

Ma lo sviluppo (13) vale solamente per $|x| < |z|$; ne segue che *il campo di convergenza delle serie* $\Sigma a_n \mathrm{P}_n(x)$, *i polinomi* $\mathrm{P}_n(x)$ *essendo legati dalle relazioni* (1), *è limitato dalle curve corrispondenti ai cerchi* $|X| = \frac{1}{\varrho} < 1$ *nella trasformazione*

$$(12) \qquad x = \frac{\alpha}{X} + \varphi(X), \quad \varphi(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n + \cdots,$$

dove α_i *sono i coefficienti che entrano nelle relazioni* (1) *e* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho}$.

Essendo dati i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ legati dalle relazioni (1), si possono dedurre da queste relazioni i coefficienti α_i della trasformazione (12). Si può anche calcolare la funzione $\varphi(Z)$ mediante la relazione (11) quando si sa fare la somma delle serie (9), dove i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ devono essere introdotti ordinati secondo le potenze di $\frac{x-\alpha_0}{\alpha}$, ed il coefficiente di x^n nel polinomio $\mathrm{P}_n(x)$ deve essere $-\frac{1}{\alpha^n}$.

Esempio. Consideriamo i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ la cui funzione generatrice è

$$\frac{Z - x\sqrt{1+Z^2}}{1 + Z^2 - xZ\sqrt{1+Z^2}} = \mathrm{P}_1(x) + Z\,\mathrm{P}_2(x) + \cdots + Z^n \mathrm{P}_{n+1}(x) + \cdots,$$

oppure

$$\frac{\dfrac{Z}{\sqrt{1+Z^2}} - x}{\sqrt{1+Z^2} - xZ} = \frac{-x + Z - \dfrac{Z^3}{2} + \dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\dfrac{Z^5}{2^2} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\dfrac{Z^7}{2^3} + \cdots}{1 - xZ + \dfrac{Z^2}{2} - \dfrac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\dfrac{Z^4}{2^2} + \dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\dfrac{Z^6}{2^3} - \cdots}$$

Identificando, si vede che i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ verificano le relazioni (1), con $\alpha = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, ... La funzione $\varphi(Z)$ è data dalla equazione (11), mentre le curve di convergenza sono date dalla transformazione

$$z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z) = \frac{\sqrt{1+Z^2}}{Z}, \quad |Z| = c - te < 1,$$

$$\sqrt{|z-1|\cdot|z+1|} = \frac{1}{|Z|} = \mathrm{C} - te,$$

e sono ovali di Cassini.

Matematica. — *Sulla equazione funzionale* $f(x+y)=f(x)\,f(y)$. Nota II di SILVIO MINETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

IV. SUBORDINAZIONE DELLA CONTINUITÀ IN UN PUNTO GENERICO ALLA CONTINUITÀ A DESTRA DELL'ORIGINE. — È ora tempo di osservare che se noi riuscissimo a dimostrare la necessaria continuità destra della $\varphi(x)$ nel punto zero, ossia che è $\lim_{x \to (+0)} \varphi(x) = 1$, allora, in causa delle eguaglianze

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| = |\varphi(x)\,\varphi(h) - \varphi(x)| = \varphi(x)\,|\varphi(h) - 1|$$

$$|\varphi(x-h) - \varphi(x)| = |\varphi(x-h) - \varphi(x-h)\,\varphi(h)| = \varphi(x-h)\,|1 - \varphi(h)|,$$

se ne potrebbe concludere la continuità destra e sinistra in tutto l'intervallo.

V. CONTINUITÀ PER $x \longrightarrow (+0)$. — Ciò posto, proviamoci ad ammettere che la $\varphi(x)$, per x tendente a $(+0)$, non abbia il limite uno.

Si dovrebbe in tal caso necessariamente trovare, a destra dello zero, almeno un gruppo infinito di punti che ammette l'origine come punto limite, e nel quale gruppo la $\varphi(x)$ soddisfa alla

$$\varphi(x) = 1 + \psi\ , \text{ dove } |\psi| > \sigma \tag{3}$$

con σ sufficientemente piccolo ma $\neq$ da zero e determinabile *a priori*.

Scelto allora un $\eta < \dfrac{b-a}{2}$, si considerino gl'infiniti intervalli, aventi un estremo comune nell'origine e di ampiezze

$$\frac{\eta}{2^0}, \frac{\eta}{2^1}, \frac{\eta}{2^2}, \frac{\eta}{2^3} \dots, \frac{\eta}{2^n}, \dots \tag{4}$$

e siano $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$ punti del gruppo citato rispettivamente interni agli intervalli suddetti e nei quali quindi è soddisfatta la (3).

In tale successione di punti distinguiamo quelli in cui la $\varphi(x)$ è $<$ dell'unità, da quelli in cui $\varphi(x)$ è $>$ dell'unità; i primi si indichino con

$$x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, \dots \tag{5}$$

[1] Presentata nella seduta del 19 giugno 1921. Ved. Nota I pubblicata in questi Rendiconti, pag. 12.

ed i secondi con

$$x_0'' , x_1'' , x_2'' , x_3'' , \dots , x_n'' , \dots \tag{6}$$

notando che la somma di un numero qualunque di x' o x'' è in ogni caso $<$ di 2η.

Una almeno di queste due successioni consterà di infiniti elementi.

Se tale è la (5), in forza della (1), varranno contemporaneamente le diseguaglianze:

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0') \, \varphi(2\eta - x_0') \leq (1 - \sigma) \, \mathrm{M}$$

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0') \, \varphi(x_1') \, \varphi[2\eta - (x_0' + x_1')] \leq (1 - \sigma)^2 \, \mathrm{M}$$

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0') \, \varphi(x_1') \, \varphi(x_2') \, \varphi[2\eta - (x_0' + x_1' + x_2')] \leq (1 - \sigma)^3 \, \mathrm{M} ,$$

ecc., *ad infinitum.*

Ne consegue che $\varphi(2\eta)$ dovrebbe essere minore di ogni numero comunque piccolo; quindi

$$\varphi(2\eta) = 0 ,$$

che a sua volta porta per conseguenza

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{per } 0 < x \leq (b - a)$$

riportandoci al caso banale.

Consideriamo ora il caso in cui la successione con infiniti elementi è la (6).

Allora, sempre in forza della (1), sarà

$$\varphi(x_0'') \, \varphi(x_1'') \, \varphi(x_2'') \dots \varphi(x_n'') = \varphi(x_0'' + x_1'' + x_2'' + \dots + x_n'') =$$
$$= \varphi(\xi_n) \geq (1 + \sigma)^n .$$

ove

$$0 < \xi_n \leq 2\eta < (b - a) ,$$

e quindi, per un n convenientemente grande, la $\varphi(x)$ nel punto $x = \xi_n$ supererebbe qualunque quantità prefissata, contro l'ipotesi 3).

VI. Conclusione. — Dunque la $\varphi(x)$ per x tendente a $(+0)$, sotto le poste ipotesi, ammette il limite uno; è cioè necessariamente continua a destra dell'origine.

Ma, per quanto si è più sopra fatto osservare (vedi n. IV), ciò basta per conchiudere che essa è continua a destra e a sinistra in ogni altro punto dell'intervallo in cui è stata definita, e che quindi è della forma e^{kx}.

Segue, per la necessaria continuità anche della $f(x)$ [data la posizione (2)]

$$f(x) = e^{kx} .$$

Fisica terrestre. — *Sul movimento ondoso del mare e delle navi.* Nota II di EMILIO ODDONE, presentata dal Corrispondente L. PALAZZO.

In una Nota precedente ho accennato ad un inerziometro per la determinazione degli elementi del moto ondoso del mare e delle navi, e ne ho esposto la teoria (¹). Nella Nota presente riassumo le prove che col medesimo ho fatto a bordo dei transatlantici « Presidente Wilson » e « Duca degli Abruzzi », nelle due traversate dell'Atlantico, da Gibilterra a New-York e viceversa. Le sottostanti tabelle riassumono i giorni e le ore d'osservazione, la direzione del vento, le condizioni del mare, il periodo delle onde dell'oceano, la posizione geografica, nonchè alcune delle massime escursioni verticali e corrispondenti accelerazioni della nave.

TRAVERSATA DELL'ATLANTICO DA GIBILTERRA A NEW-YORK.

Data ed ora locale		Vento		Stato del mare	Periodo totale dell'onda dello Oceano sec.	Escurs. vert. totali mass.		Accelerazioni massime z''_m ${}^{cm}/_{sec^2}$=Gals	Posto occupato dall'inerziometro sul « Pres. Wilson »	Longitudine (²)
		Direzione	Intensità scala Beaufort			sul diagramma $L\theta_m$ cm	effettive della nave z_m metri			
1920 Febbr. 17	10ʰ	S-SE	5	grosso la mat. grosso la sera	fino ad 11	0,3	9	150	Cabina centrale di 1ª cl. N. 121	10° W. Green
18	10-11ʰ	N-NW	7	grosso e morto	7,5	0,9	12	440	Prua	
	21ʰ	„	„	tutto il giorno	10	0,45	11	220	Fumoir	16° 45′ „
19	10ʰ	N	5	meno agitato	6,7	0,4	4,5 (³)	200	Louange	23° 30′ „
20	9ʰ	N-NE	4	agitato-mosso	7,5	0,35	5	186	Caldaie e coffa	30° 40′ „
21	17ʰ	E	3	mosso	—	insignificanti		insignificante		38° „
22	9ʰ ½	SW	2	morto	—	—	5,5	175	Louange	45° „
23	15ʰ ½	SE	4	calmo	—	insignificanti		insignificante		51° 30′ „
24	9ʰ	SE	1	calmo	—	insignificanti		insignificante		59° 20′ „
25	13-14ʰ	W	7-8	calmo la matt.	7,4	0,4	5,5	204	Louange	
				molto agitato il pomeriggio	7,2	0.12	1,6	61	Cab. cent. N. 121	66° 40′ „
				e la sera	5,7	0,55	4,5	278	Poppa	

(¹) Nota dallo stesso titolo presentata nella seduta dell'8 gennaio 1922.

(²) Le latitudini non furono scritte perchè oscillarono tra le ristrette cifre di 37° 59′ e 40° 26′.

(³) Disposi sul davanzale della louange, parallelo all'asse maggiore, distante 40 m. dal metacentro della nave, un clinometro, il quale alle 10 ore accusa delle inclinazioni di beccheggio della nave di 7°. Risulta un'ampiezza d'oscillazione al luogo d'osservazione data da 40 tang 7° = $4^m,9$ in accordo col dato dell'inerziometro.

TRAVERSATA DELL'ATLANTICO DA NEW YORK A GIBILTERRA.

Data ed ora locale	Vento: Direzione	Vento: Intensità scala Beaufort	Stato del mare	Periodo totale dell'onda dello Oceano sec.	Escur. vert. totali mass.: sul diagramma $L\theta_m$ cm.	Escur. vert. totali mass.: effettive della nave z_m metri	Accelerazioni massime z''_m cm/sec^2 = Gals	Posto occupato dall'inerziometro sul « Duca degli Abruzzi »	Longitudine
1920 Aprile									
28 12^h	SE	3	agitato	6,3 6	0,37 0,42	3,7 3,8	185 211	Fumoir Poppa	66° 40′ W. Green
29 10^h	NW	2-3	meno agitato	4,5	0,4 0,2	2,1 1	210 40	Prua Louange	59° 21′ ”
30	NE	3	mosso		insignificanti		insignificanti		51° 30′ ”
1 Maggio 10^h 11^h 12^h	SW	3	grosso e morto	6,6 8,2 7,6	0,8 $0,4_2$ $0,4_5$	8,8 7,1 6,6	400 217 228	Deck Prua Deck di Prua Deck di Poppa	44° 56′ ”
2	S-SW	3	mosso		insignificanti		insignificanti		38° ”
3	S-SE	2	mosso		idem		idem		30° 40′ ”
4	N-NE	5	calmo poi agit.		idem		idem		23° 29′ ”
5 10^h 14^h	E	5	mosso la matt.	6,1	0,5 0,3 0,2 0,5	4,7 2,8 1,9 4,7	300 150 100 300	Prua Saletta fumatori Deck Sala fumatori	16° 43′ ”
			agitato la sera	6,1	0,5 0,4	4,7 3,4	300 240	Giard. d'inverno Cab. II cl. N. 9	
6	E	6	agitato	4,7	$0,4_6$	2,5	225	Cab. II cl. N. 9	12° ”
7 7^h	E	7	temp. p. vento	4,7	insignificanti		insignificanti		8° ”

L'apparato scrisse non appena le onde marine cominciarono a divenire sensibili (diagrammi 2, 3, 4 della figura) e diede veramente delle notevoli registrazioni quando il mare si fece profondamente agitato. Ho trovato che le onde dovute al vento, e quindi brevi, hanno periodi da 4 a 6 secondi, e che quelle lunghe, proprie al mare detto morto, hanno periodi che da 7 vanno fino ad 11 secondi. Non vi è correlazione tra l'intensità del vento e l'ampiezza delle onde marine. Presso New York e nello stretto di Gibilterra, le raffiche furiose rispettivamente del ponente e del levante, resero, addì 25 febbraio e 6 e 7 maggio, tempestoso il mare (curva N. 5), ma trattavasi di onde superficiali di piccola lunghezza d'onda, frementi, non esageratamente alte. In corrispondenza il sollevamento della nave era piccolo. Quando, invece, addì 17 febbraio, si produssero le onde lunghe, lente, del cosidetto mare morto, grosso ed incrociato (la *houle* dei francesi), malgrado un'apparente calma di vento e malgrado la piccola ampiezza di registrazione (curva N. 11), il calcolo indicò un sollevamento della nave fino

a 9 m. È attendibile che con mare mosso fino ad una certa profondità, anche le grosse navi si sollevino coll'onda, e che con mare mosso solo superficialmente, queste grandi navi che pescano profondo, abbiano il loro moto smorzato dagli strati sottostanti non agitati. Ne viene la conseguenza che per la determinazione dell'altezza delle onde, è più adatto l'impianto dell'apparato al metacentro di piccole imbarcazioni o dei galleggianti. Il sollevamento di 9 m. è il massimo d'insieme da me riscontrato [1]. Non farà specie l'averlo ottenuto quando le onde sul diagramma hanno piccole escursioni ed il lungo periodo di 11 secondi, dopo che la formola (6 bis) mostra l'influenza predominante del periodo. In quanto alle accelerazioni, la formola (8) indica come, con onde brevi, si possono calcolare delle notevoli accelerazioni anche con piccole escursioni sul diagramma; e come, con onde lunghe, si possono avere, anche con notevoli escursioni sul diagramma, delle accelerazioni della nave, modeste.

Provato a spostare l'apparecchio lungo l'asse verticale della nave col scenderlo verso le caldaie, oppure coll'innalzarlo sulla coffa, trovai che desso indicava le identiche escursioni verticali di 5 m. colla stessa accelerazione verticale di 186 Gals (v. i diagrammi alla curve 3 e 2). Spostato l'inerziometro lungo l'asse longitudinale della nave, le escursioni verticali crescevano dal centro verso la poppa (curve 7 e 6) e anche più, come purtroppo sanno gli emigranti, dal centro verso la prua (curve 7 e 9). Per esempio, addì 19 febbraio, in un'ora dove la salita verticale al centro della nave era di 3,7 m., era a poppa di $7^m,3$ ed a prua di $8^m,6$. Dalle zone diagrammatiche delle curve 15, 14 e 16 sono state ricavate le escursioni che portano a quelle cifre.

Addì 1° maggio la prua provava delle escursioni di $8^m,8$ ed addì 18 febbraio fino a 12 m.! (Curva 16). Si arrivò allora a valori dell'accelerazione di 400 ed anche 440 $^{cm}/_{sec^2}$, ciò che significa che sull'ossatura della prua si esercitava ora metà, ora una volta e mezzo il peso ordinario!

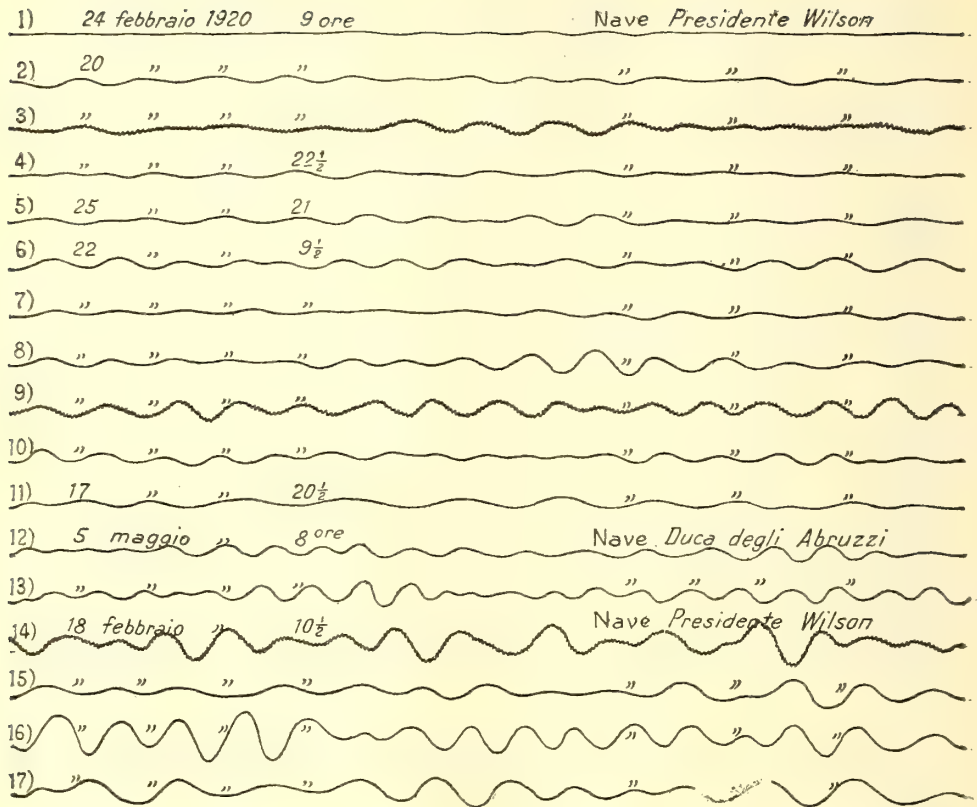
È raro che le ondulazioni verticali dell'onda riprodotte sul diagramma, si seguano con uguale ampiezza: generalmente e specie a poppa, a prua ed ai lati, il diagramma segnala onde crescenti o decrescenti, i cui massimi d'onda sono separati da netti intervalli di riposo (v. i diagrammi 12, 14 e 16). Questo comportamento prova la coesistenza di due movimenti:

(1) Nella crociera antartica del Dr. Charcot, dietro suggerimento del Dr. Richard, direttore del Museo Oceanografico dl Monaco, erano state incluse nel programma della spedizione, le misure del moto verticale della nave. J. Rouch attese a queste misurazioni con uno statoscopio registratore. Egli conviene che lo statoscopio ha dei difetti che lo rendono inadatto a questo genere di determinazioni ogni qualvolta non vi sia calma di vento. Trovò delle altezze d'onda fino a 6 metri, ed il dì 28 gennaio 1910, m. 8, m. 9 e fino m. 10,50. (Comtes Rendus de l'Acad. des sciences, Paris, T. 170, I sem., 15 marzo 1920).

quello dell'onda e quello proprio della nave. Dalla teoria dei battimenti, noto il periodo dell'onda marina e l'intervallo di battimento, si può avere il periodo d'oscillazione proprio della nave, come si può risolvere il quesito reciproco. L'intervallo di battimento varia colle dimensioni della nave e colla distribuzione del suo carico. Ed anzi, poichè i moti della nave sono di beccheggio e di rullio, si avranno due battimenti, entrambi più evidenti quando i periodi dell'onda e periodo proprio della nave, sono poco diversi. E non è escluso che la soluzione possa complicarsi per la coesistenza di un battimento nelle stesse onde marine.

I tremiti, dovuti alle eliche od alle macchine, figurano sui diagramma quando l'apparato era situato a poppa o presso le caldaie (curve 9, 14 e 3). I colpi di vento e di mare producono talora dei disordinati sbandamenti della nave, resi bene dalle corrispettive irregolarità sul diagramma (v. curva 17). Queste deviazioni dalla solita ondulazione sinusoidale, sono tecnicamente assai interessanti, come quelle che si connettono ai problemi della stabilità delle navi, in rapporto alla distribuzione delle loro masse, ed in rapporto alle sollecitazioni ai colpi di vento e di mare, Ma questo esce dal mio compito. A me basta avere proposto l'impiego di un apparecchio che le caratteristiche del moto del mare e delle navi, riproduce fedelmente, ed averne dato la teoria. Con qualsiasi altro apparecchio inclinometrico a bordo, oggigiorno in uso, sfuggono i rapporti dei movimenti verticali alle varie parti delle navi.

L'apparato, illustrato nella presente Nota, ha sempre funzionato bene, incontrando il favore degli ufficiali di bordo e l'interesse del pubblico, il quale notava, ad esempio, l'esatta corrispondenza tra le onde a più forte accelerazione ed i più accentuati spasimi fisiologici di coloro che soffrivano del mal di mare. La semplicità di costruzione, la bontà dei risultati e le applicazioni cui puo' dar luogo, ne consigliano la divulgazione. Oggi non basta definire lo stato del mare coi brevi aggettivi graduatori di calmo, mosso, agitato e molto agitato, ma è giunta l'ora di fissare in misura l'entità del dinamismo del mare. Del pari non basta che una nave abbia la nomea di essere più stabile di un'altra. Occorre indicare il grado della stabilità, tenendo conto che la stabilità è funzione della distribuzione delle masse e per la stessa distribuzione del carico e lo stesso stato dinamico del mare è in ragione inversa delle accelerazioni di moto che la nave sopporta. Le Compagnie avrebbero interesse a stabilire dei confronti grafici esatti, che mettessero in evidenza i vantaggi di certe navi di fronte ad altre concorrenti. Il pubblico tiene a viaggiare col minor disagio per via delle oscillazioni del mare, ed un documento sperimentale che guidasse nella scelta della nave, tornerebbe di vantaggio alle buone Società di navigazione, e gradito ai viaggiatori.

1) 24 febbraio 1920 9 ore Nave *Presidente Wilson*
2) 20 " " " " " "
3) " " " " " " "
4) " " " 22½ " " "
5) 25 " " 21 " " "
6) 22 " " 9½ " " "
7) " " " " " " "
8) " " " " " " "
9) " " " " " " "
10) " " " " " " "
11) 17 " " 20½ " " "
12) 5 maggio " 8 ore Nave *Duca degli Abruzzi*
13) " " " " " " " "
14) 18 febbraio " 10½ Nave *Presidente Wilson*
15) " " " " " " "
16) " " " " " " "
17) " " " " " "

Velocità del tamburo $7^{cm},8$ al minuto primo.

(1) Registrazione con mare calmo. Cabina centrale N. 121.

(2), (3), (4) ,, ,, ,, poco mosso. Coffa, caldaie (i tremiti sono dovuti alle macchine) e Cabina centrale N. 121.

(5) Registrazione con mare a brevi onde superficiali. Cabina cen. N. 121.

(6), (7), (8), (9), (10) ,, ,, ,, morto, non molto molesto. Astern, Middle-side, Louange, Bow (i tremiti sono dovuti alle eliche), Bridge.

(11) Registraz. con mare morto, a lunghe onde, molesto. Cab. cen. N. 121.

(12) ,, ,, ,, agitato, assai molesto. Fumoir.

(13) ,, ,, ,, ,, ,, ,, Prua.

(14), (15), (16), (17) ,, ,, ,, molto agitato, molestissimo. Poppa (i tremiti sono dovuti alle eliche). Salone centrale, Prua, Fumoir (accusa gli sbandamenti della nave).

Chimica. — *Sintesi di nuovi glucosidi* [1]. Nota di REMO DE FAZI, presentata dal Socio PATERNÒ.

Tra i glucosidi naturali quelli contenuti nelle foglie di sena, nel rizoma del rabarbaro, nella cascara sagrada, nell'aloe si possono considerare come derivati dell'antracene. L'azione medicamentosa di queste piante è dovuta al principio attivo rappresentato dal glucoside che contengono.

Per quanto tali composti siano molto diffusi nel regno vegetale non sono ancora stati trovati glucosidi derivati dall' indene, dal fluorene, e dall'acenaftene.

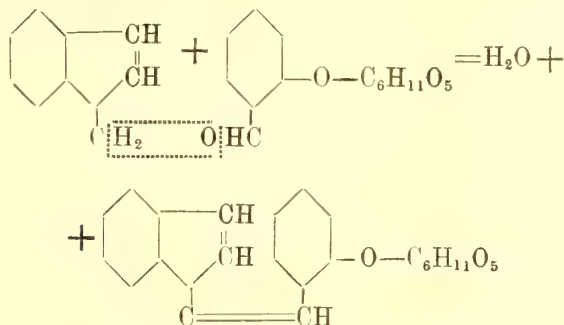
Si conoscono già glucosidi artificiali preparati per condensazione di altri più semplici (come l'elicina, la glucovanillina, ecc.) con aldeidi [2], chetoni [3], cianuro di benzile [4], malonato di etile [5], e con ossi-chetoni [6]. Però non erano mai stati ottenuti glucosidi complessi per condensazione di glucosidi con idrocarburi, quali l' indene, il fluorene, ecc., o con derivati dell'acenaftene.

Sono riuscito a fare la sintesi del glucoside del 2-ossi-benziliden-indene, del 2-ossi-benziliden-fluorene ed anche del 2-ossi-benziliden-acenaftenone.

Il glucoside del 2-ossi-benziliden-indene l'ho ottenuto facendo reagire a temperatura ordinaria per parecchi giorni, l' indene e l' elicina con etilato sodico in alcool etilico assoluto.

La reazione è la seguente:

CH
||
CH
CH₂ + OHC —O—$C_6H_{11}O_5$ $= H_2O +$

+ CH
||
CH
C=====CH —O—$C_6H_{11}O_5$

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica applicata della R. Scuola per gli Ingegneri in Roma.

[2] Tiemann e Kees, B., *18*, 1955 (1885).

[3] Tiemann, B., *18*, 3481 (1885).

[4] Fischer, B., *34*, 629 (1901).

[5] Hjelt e Elving, C. B. (1), 89 (1903).

[6] Bargellini G., Gazz. Chim. Ital., *44* (b), 520 (1914).

In modo simile ho eseguito la sintesi del glucoside del 2-ossi-benziliden-fluorene, mettendo a reagire l'elicina con il fluorene.

Invece il glucoside del 2-ossi-benziliden-acenaftenone l'ho preparato per condensazione dell'elicina con l'acenaftenone in presenza di una soluzione concentrata di idrato sodico.

Questi nuovi glucosidi sono intensamente colorati in giallo, hanno punto di fusione elevato, e dànno con acido solforico intense colorazioni.

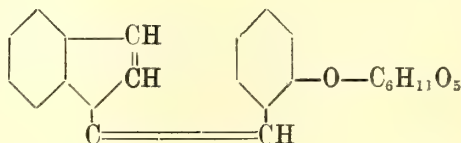
La piccola quantità ottenuta, di questi glucosidi, non mi ha permesso di provare a scinderli con gli acidi diluiti, ma seguiranno senza dubbio il comportamento di quelli artificiali: non saranno scissi dall'emulsina ed apparterranno perciò ai glucosidi della serie α secondo la classificazione fatta da E. Fischer.

Continuerò ed amplierò queste ricerche impiegando altri glucosidi e differenti idrocarburi.

Sento il dovere di ringraziare il gentile prof. Guido Bargellini per avermi fornito l'elicina che mi è stata necessaria per questo studio.

Parte sperimentale.

Glucoside del 2-ossi-benziliden-indene

CH
||
CH —O—$C_6H_{11}O_5$
C=====CH

Si aggiungono gr. 2,5 di sodio, in piccoli pezzi, lentamente e raffreddando, in 100 cc. di alcool etilico assoluto, e poi gr. 4 di elicina e si riscalda fino a che questa non è passata completamente in soluzione.

Quindi si versano gr. 2 di indene disciolti in 25 cc. di alcool assoluto. Si forma subito un abbondante precipitato giallastro e la soluzione diviene di color giallo arancio.

Dopo due giorni la soluzione è di colore verdastro e si nota un prodotto semi-oleoso verde. La reazione si lascia continuare a temperatura ordinaria per 15 giorni.

Si filtra alla pompa: la sostanza solida, dopo averla lavata bene con alcool, all'aria resinifica rapidamente, e dal colore verde passa subito al verde bruno intenso: è indene polimerizzato.

Dalla soluzione alcoolica si distilla a pressione ridotta il solvente fino a che rimangono circa 50 cc. di liquido.

Dopo qualche giorno si depositano dei cristalli aghiformi di colore giallo bruno, che fondono a 198-200°. Ricristallizzati più volte dall'alcool,

in cui sono molto solubili, si presentano in begli aghi di colore giallo pallido, lucenti, che fondono a 205-206°.

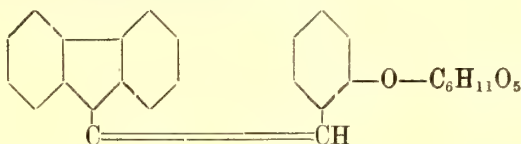
Il glucoside così ottenuto è stato disseccato a 100° e analizzato:

sostanza gr. 0,1792;	CO_2 gr.	0,4538;	H_2O gr.	0,0958
trovato %:	C	69,06 ;	H	5,98
per $C_{22}H_{22}O_6$ calcolato %:	C	69,11 ;	H	5,76

L'acido solforico concentrato colora in verde il glucoside del 2-ossi-benziliden-indene, il quale si discioglie poi completamente dando una soluzione di un bel colore verde smeraldo. Dopo qualche ora diviene di colore rosso ciliegia, che permane per parecchi giorni.

Glucoside del 2-ossi-benziliden-fluorene

—O—$C_6H_{11}O_5$

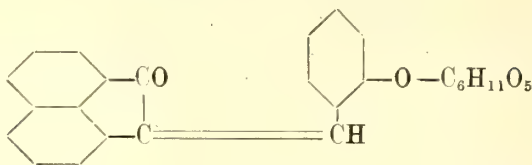
C=====CH

Si prepara allo stesso modo del glucoside del 2-ossi-benziliden-indene. Si impiegano gr. 2,5 di sodio, 100 cc. di alcool assoluto, 4 gr. di elicina e gr. 2,5 di fluorene disciolti in 25 cc. di alcool etilico assoluto. La soluzione diviene di colore giallastro e dopo qualche ora è giallo arancio. Il giorno dopo si nota al fondo del recipiente una polvere giallastra che va poi aumentando giornalmente. La reazione si lascia continuare a temperatura ordinaria, tenendo il recipiente ben chiuso, per 10 giorni. Quindi il prodotto della reazione si filtra e si lava con poco alcool; così impuro fonde a 180°-185°.

È una sostanza molto solubile in alcool etilico, da cui cristallizza in piccoli aghi gialli che fondono a 198-200° anche dopo parecchie cristallizzazioni. Le acque madri alcooliche iniziali, distillate depositano una mescolanza di elicina e fluorene inalterati e un poco del glucoside.

Questo disseccato a 100° è stato analizzato:

sostanza gr. 0,1268;	CO_2 gr.	0,3352;	H_2O gr.	0,0642
trovato %:	C	72,09 ;	H	5,67
per $C_{26}H_{24}O_6$ calcolato %;	C	72,22 ;	H	5,56

Il glucoside del 2-ossi-benziliden-fluorene disciolto in alcool etilico puro e assoluto, per aggiunta di H_2SO_4 conc. dà nella superficie di contatto fra i due liquidi un anello colorato intensamente in rosso-viola. L'acido solforico conc. colora il glucoside in rosso bruno, che vi si discioglie dando una soluzione colorata in rosso-viola.

Glucoside del 2-ossi-benziliden-acenaftenone

In 50 cc. di alcool etilico si disciolgono gr. 1,7 di elicina e gr. 1 di acenaftenone, preparato secondo le indicazioni di Graebe [1]. Alla soluzione debolmente colorata in giallo si aggiungono 5 gr. di idrato sodico disciolti in 5 cc. di acqua. Si nota debole riscaldamento e la soluzione diviene prima di colore rosso ciliegia e poi rosso bruno. Si lascia a reagire ancora per 24 ore a temperatura ordinaria. Si aggiunge quindi un po' di acqua: precipita allora una sostanza di colore giallo-arancio, che si filtra; così impura fonde a 196-200°. Il prodotto della reazione dopo parecchie cristallizzazioni dall'alcool si presenta in piccoli aghi di colore giallo chiaro, lucenti, che fondono con decomposizione a 246-248°.

La sostanza fu disseccata a 100° e analizzata:

sostanza gr. 0,2024;	CO_2 gr.	0,5124;	H_2O gr.	0,0952		
trovato %:	C	69,04	;	H	5,26	
per $C_{25}H_{22}O_7$ calcolato %:	C	69,12	;	H	5,07	

Il glucoside del 2-ossi-benziliden-acenaftenone si colora, con acido solforico concentrato, in arancio e vi si discioglie dando una soluzione intensamente colorata in arancio con fluorescenza verde.

Chimica. — *Cloriti di sodio e di altri metalli.* Nota di G. R. Levi [2], presentata dal Corrispondente G. Bruni [3].

Quando Bruni ed io abbiamo iniziato nel 1914 lo studio dei cloriti [4] non erano noti che tre sali e cioè i cloriti di argento, piombo e potassio. I primi due erano stati ottenuti allo stato puro per la loro poca solubilità mentre il terzo era stato separato, per cristallizzazione frazionata e precipitazione con alcool, dal clorato corrispondente che è meno solubile; era anche stato dimostrato che non esistono l'anidride e l'acido cloroso liberi. Nel corso di queste ricerche Bruni ed io abbiamo condotto misure termochimiche ed elettrochimiche sui cloriti ed abbiamo anche preparato i cloriti

(1) Graebe, A, *327*, 77 (1903).

(2) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(3) Presentata nella seduta del 5 marzo 1922.

(4) Atti R. Istituto Veneto, Vol. 74, pag. 1711.

di bario, mercuroso e mercurico che non erano noti e i composti di addizione del clorito d'argento con l'ammoniaca. Per maggiori dettagli e per la letteratura precedente rimando a questo lavoro.

Dopo un lungo intervallo di tempo ho potuto da oltre un anno riprendere questo argomento assai interessante e particolarmente delicato dal punto di vista sperimentale; questa difficoltà è la sola giustificazione al fatto che dal 1881 (e cioè dallo studio di Garzarolli-Turnlackh) gli studi sull'argomento sono quasi completamente cessati: le indicazioni sui cloriti che troviamo dopo questa data sono, oltre la reazione di Reychler dei perossidi sul biossido di cloro, indirette e dovute a studi elettrochimici generali sui composti, ossigenati del cloro.

In una nota precedentemente presentata a questa accademia [1] ho descritto dei nuovi cloriti che ho potuto recentemente isolare allo stato puro e cioè i cloriti di ammonio e di tetrametilammonio; l'esistenza di questi due composti, specie del primo, si presenta particolarmente interessante per l'ossidabilità e volatilità della base con la quale l'acido cloroso è combinato.

A seguito di queste ricerche ho potuto isolare allo stato puro altri quattro cloriti che non erano noti e cioè i cloriti di sodio calcio stronzio e tallio (talloso); del clorito sodico ho ottenuto anche un idrato $NaClO_2 \cdot 3H_2O$.

La descrizione di questi nuovi cloriti forma oggetto della presente Nota.

Clorito di sodio $NaClO_2 \cdot 3H_2O$. — Il clorito di sodio non è mai stato descritto; l'unico lavoro in cui si parla del clorito sodico è quello di Millon [2] e siccome l'anidride clorosa, come fu poi dimostrato, non esiste il prodotto descritto non poteva essere che una miscela di clorito, clorato e cloruro di composizione centesimale più o meno corrispondente al clorito.

La preparazione del clorito sodico puro, e cioè direttamente esente di cloruro e clorato, non può essere fatta per azione del biossido di cloro sul perossido di sodio in soluzione anche se si aggiunge alla soluzione concentrata dell'acqua ossigenata al 30%: si ottiene invece facilmente un prodotto puro mescolando quantità equivalenti di clorito di bario e di solfato sodico previamente disciolti in soluzioni sature. La soluzione ottenuta si concentra nel vuoto a 10-15° fino ad incipiente cristallizzazione, a questo punto si decanta la soluzione soprastante e la si agita; si ottiene così una rapida cristallizzazione mentre, per effetto di questa, la temperatura della massa si innalza di parecchi gradi.

Il precipitato si raccoglie su imbuto di porcellana e si lascia asciugare all'aria ambiente: si presenta in laminette lucenti fortemente birifrangenti a

[1] Atti R. Accademia dei Lincei, vol. XXXI, pag. 52, an. 1922.
[2] Ann. Chim. Phys. (3) 7, 325.

luce polarizzata. All'analisi ottenni:

sodio %		cloro %	
trovato	calcolato p. $NaClO_2 \cdot 3H_2O$	trovato	calcolato p. $NaClO_2 \cdot 3H_2O$
16,22	15,92	24,70	24,55
16,21		24,85	

Il sodio fu determinato come solfato trattando una quantità pesata di clorito sodico, sciolta in poca acqua, con acido solforoso in eccesso, calcinando il bisolfato ottenuto e pesando come solfato di sodio: il cloro venne precipitato come cloruro d'argento dopo riduzione con acido solforoso.

Il clorito sodico è solubile in alcool ed è stabile all'aria in condizioni normali di umidità; in atmosfera ricca di vapor acqueo cade in deliquescenza ed in essicatore su idrato potassico perde rapidamente l'acqua di cristallizzazione. Il prodotto anidro esplode per percussione. All'analisi il prodotto disidratato diede:

sodio %		cloro %	
trovato	calcolato p. $NaClO_2$	trovato	calcolato p. $NaClO_2$
25,66	25,43	38,85	39,19
25,56		38,92	

Ho in lavoro più estese ricerche sul clorito sodico particolarmente per studiarne la decomposizione col riscaldamento e per ottenere dei cristalli sufficentemente sviluppati per misure goniometriche; sono anche in corso prove sull'azione farmacologica dei cloriti sull'organismo usando il clorito sodico; queste ricerche, iniziate da me a Padova sotto la guida del prof. Sabbatani, vengono ora proseguite e completate dallo stesso prof. Sabbatani ed hanno già formato soggetto di una prima comunicazione al R. Ist. Veneto.

Clorito di litio $LiClO_2$. — Anche questo prodotto non è mai stato descritto nemmeno allo stato impuro o di soluzione. Tentativi per ottenere il clorito di litio per azione del biossido di cloro su di una soluzione concentrata di idrato di litio addizionata di acqua ossigenata non mi diedero buon risultato: ottenni invece un prodotto puro per doppio scambio fra solfato di litio e clorito di bario. Per evaporazione nel vuoto su idrato potassico si ha il clorito di litio anidro, deliquescente; il sale non è precipitabile con alcool ed etere dalla soluzione acquosa anche concentrata.

Le soluzioni di clorito di litio, a differenza di quelle del corrispondente sale di sodio, si alterano lentamente per azione dell'acido carbonico dell'aria depositando del carbonato di litio.

Il clorito di litio secco esplode per percussione.

L'analisi del clorito di litio anidro condotta come per sale di sodio diede:

litio %		cloro %	
trovato	calcolato p. $LiClO_2$	trovato	calcolato p. $LiClO_2$
9,24	9,33	47,23	47,65
9,30		47,40	

Clorito di calcio $Ca(ClO_2)_2$. — Il perossido di calcio non si prepara in modo analogo a quelli di stronzio e bario causa la piccola solubilità dello idrato di calcio; il perossido di calcio idrato fu ottenuto spegnendo della calce, di recente arroventata, con acqua e aggiungendo acqua ossigenata al latte di calce appena preparato.

La reazione col biossido di cloro procede rapidamente e quantitativamente e il perossido passa completamente in soluzione; per evaporazione nel vuoto o precipitazione con alcool ed etere si ha un prodotto che, essicato su idrato potassico, è clorito di calcio puro: l'analisi eseguita come per i sali di sodio e litio diede:

calcio %		cloro %	
trovato	calcolato p. $Ca(ClO_2)_2$	trovato	calcolato p. $Ca(ClO_2)_2$
23,05	22,90	40,36	40,54
23,09		40,60	

Anche il clorito di calcio esplode per percussione e si decompone completamente se viene toccato con una spiralina rovente.

La reazione di doppio scambio fra solfato di calcio e clorito di bario si presta male alla preparazione del clorito di calcio data la piccola solubilità del solfato di calcio. Il clorito di calcio non era mai stato ottenuto da precedenti autori, neanche impuro di altri sali.

Clorito di stronzio. — $Sr(ClO_2)_2$ — Questo clorito non è mai stato preparato: era tuttavia presumibile che il metodo impiegato da me e Bruni per la preparazione del clorito di bario potesse venire usato allo scopo; l'esperienza ha completamente confermato questa previsione: si prepara infatti per azione del biossido di cloro sul perossido di stronzio idrato, utilizzando la reazione parallela a quella con la quale si ottiene il clorito di bario: una soluzione satura di idrato di stronzio viene addizionata di acqua ossigenata al 30 % e il precipitato cristallino di perossido viene decantato dal liquido soprastante e poi saturato di biossido di cloro. La soluzione avuta si può concentrare nel vuoto o più rapidamente precipitare con alcool ed etere. Il prodotto seccato nel vuoto su idrato potassico fino a peso costante diede all'analisi eseguita come per il sale di sodio:

stronzio %		cloro %	
trovato	calcolato p. $Sr(ClO_2)_2$	trovato	calcolato p. $Sr(ClO_2)_2$
38,83	39,39	31,62	31,86
39,25		31,45	

Il clorito di stronzio esplode per percussione; toccato con una spiralina rovente si scompone e il calore prodotto nella reazione è sufficiente a far fondere il cloruro di stronzio formato che si raccoglie in piccole sferule.

Tentativi per preparare il clorito di magnesio dal perossido di magnesio e biossido di cloro o per doppio scambio da clorito di bario e solfato di

magnesio riuscirono infruttuosi; le soluzioni avute non precipitano con alcool ed etere e per concentrazione nel vuoto, e anche a freddo, svolgono abbondantemente vapori clorosi. Lo stesso accadde per una soluzione ottenuta per doppio scambio fra clorito di bario e solfato di zinco; il perossido di zinco non reagisce o reagisce molto incompletamente col biossido di cloro.

Clorito talloso $TlClO_2$. — Tentare la preparazione e lo studio delle proprietà di questo composto appariva particolarmente interessante per l'analogia del tallio da un lato coi metalli alcalini e dall'altra col piombo; per analogia coi cloriti di piombo e di argento avevo creduto di poter ottenere il clorito talloso per precipitazione di soluzioni sufficentemente concentrate di sali di tallio con clorito sodico, ma i tentativi ebbero esito negativo.

Ho potuto invece preparare questa sostanza per doppio scambio fra clorito di bario e solfato talloso; data la piccola solubilità del solfato di tallio a freddo è conveniente fare una soluzione satura e bollente di solfato di tallio e raffreddarla rapidamente agitando. Aggiungendo alla sospensione fredda la quantità equivalente di clorito di bario si ha in pochi minuti, agitando, il doppio scambio quantitativamente.

Se si cerca di evaporare lentamente la soluzione nel vuoto si ha formazione di idrato tallico con imbrunimento; aggiungendo invece 3 a 4 vol. di alcool e 8 a 10 vol. di etere precipita immediatamente il clorito talloso, giallo crema assai pallido: il prodotto viene filtrato alla pompa, lavato rapidamente con etere anidro e asciugato nel vuoto. Il clorito talloso è assai facilmente solubile in acqua a differenza dei sali di piombo e di argento corrispondenti ed in ciò il tallio si comporta come un metallo alcalino; esplode per percussione sull'incudine e si decompone immediatamente per riscaldamento fra 70-80°. Il tallio fu determinato come ioduro talloso:

	trovato	calcolato per $TlClO_2$
tallio °/₀	74,93	75,16
	75,02	

Il prodotto deve venire analizzato dopo essere stato circa $^1/_2$ ora in essicatore a vuoto: dopo un'ora il prodotto comincia già ad imbrunire con formazione di ossido tallico e di vapori clorosi: la decomposizione procede col tempo ma lentamente e dopo 48 ore vi è ancora sufficente quantità di clorito inalterato nel prodotto per ottenere esplosione per percussione sull'incudine.

Geologia. — *Il Miocene nella regione compresa fra i rilievi mesozoici eugubini e la catena del Catria.* Nota di Paolo Principi, presentata dal Socio Arturo Issel.

Nella catena di Gubbio, comprendente i rilievi di M. Loreto, Monteleto M. Semonte, M Calvo, M. Ingino, M. Alto, la serie dei terreni mesozoici si chiude colla *scaglia rosata*, che fa graduale transizione ad un'altra formazione caratteristica conosciuta sotto il nome *scaglia cinerea*.

Essa, come nel M. Catria, è costituita da scisti scagliosi grigi o verdastri, costituenti una specie di fascia, che affiora ininterrottamente lungo il versante settentrionale ed orientale della catena eugubina. A M. Loreto assume una estensione notevolissima, scendendo dalla vetta del monte sino alla Madonna di Montecchi ed oltrepassando il Fosso Celle. Ivi si osserva qualche impronta riferibile al genere *Inoceramus* e si riscontrano varî esemplari di *Gryphaea vesicularis* Lm. Sulle pendici orientali di Monte Alto la scaglia cinerea racchiude qualche straterello ricchissimo di foraminifere, tra cui si distinguono i generi *Globigerina, Biloculina, Operculina.* Presso il Bottaccione entro la valle del Carmignano gli scisti marnosi cenerognoli diventano più chiari assumendo un colore giallastro e contengono numerose impronte di *Zoophycos flabelliformis* Fisch. Ost.

Sulla scaglia cinerea, riferibile all'Eocene inferiore per la ricca fauna nummulitica, che presenta in varie località umbre, marchigiane ed abruzzesi, si sovrappone una formazione - detta *bisciaro* - costituita da alcuni strati di calcare marnoso di colore bigio azzurrognolo percorso da numerose fratture, in modo che tende facilmente a dividersi in piccoli parallelepipedi più o meno regolari. La roccia è attraversata da sottili vene di calcite bianca, è talora intercalata nella parte superiore con straterelli argillosi ricchi di concrezioni limonitiche ed alterna anche con strati di scaglia cinerea.

Questo fenomeno, che si può facilmente constatare presso la Madonna di Montecchi, a M. Loreto, Monteleto e M. Alto è la prova che scaglia cinerea e bisciaro appartengono allo stesso periodo geologico. È però indispensabile, come ho avuto già occasione di rilevare, [1] togliere alla parola « bisciaro » qualunque significato cronologico poichè essa serve ad indicare nelle Marche ora rocce di età eocenica (M. Catria, M. Nerone), ora rocce appartenenti con ogni probabilità al Miocene medio (Ascolano).

Dalla Madonna di Montecchi procedendo verso N. E. al bisciaro succedono delle marne dure selciose di colore scuro, le quali presso Abbadia di Piazza contengono piccole Ostriche riferibili all'*Ostrea langhiana* Trab.

[1] Principi P. *La geologia del M. Catria e del gruppo del M. Nerone*, Boll. Soc. geol. ital., 1921.

È importante, poi, tener presente che mentre gli strati della scaglia cinerea e del bisciaro sono fortemente raddrizzati, gli strati delle marne con *Ostrea* presentano un'inclinazione di circa 40°. A queste ultime fanno seguito delle marne arenacee e calcari marnosi ripetutamente alternati fra loro e con banchi calcarei ricchissimi di foraminifere.

Siamo, perciò, in presenza di una discordanza mascherata in varie altre località da un apparente parallelismo degli strati. L'*Ostrea langhiana* accenna all'esistenza del Miocene e precisamente del Langhiano, il quale viene così a riposare direttamente sull'Eocene.

Presso C. Belvedere nella formazione arenaceo-marnosa compaiono calcari glauconitici a struttura clastica con *Oxyrhina hastalis* Agass. e numerose Globigerine, Orbuline e Nodosarie ridotte per lo più in frammenti. Da C. Pagino discendendo verso C. Salia si osservano altri calcari grigi, duri, selciosi con Briozoi e conchiglie appartenenti al *Pecten miocenicus* Mich. ed alla *Chlamys scabrella* (Lm.) var. *elongatula* Sacco.

Al Molino Valderchia, a poca distanza dal bisciaro. si ritrovano i calcari grigi glauconitici in banchi fortemente inclinati verso NE. con *Amphistegina Niasi* Verb. *Miogypsina irregularis* Mich., *Globigerina* sp. *Truncatulina* sp., *Pulvinulina* sp. Prende, quindi, come più a Nord, grande sviluppo la formazione arenaceo-marnosa, in cui gli strati più compatti di calcare marnoso, resistendo al disfacimento meteorico molto più delle marne scagliose circostanti, rimangono assai ben distinti e individuati.

A S. Margherita del Condotto le marne dure selcifere, che si adagiano in discordanza sul bisciaro, contengono nuovamente l'*Ostrea langhiana* e frammenti di piccoli *Pecten* indeterminabili; si estende, poi, la serie marnoso-arenacea includente in varî punti strati con Pteropodi e presso la Cima del Barco un banco di calcare glauconitico compatto, che è la continuazione di quelli affioranti a C. Belvedere ed al M. Valderchia, con *Globigerina* sp. *Orbulina* sp., *Biloculina* sp., *Textularia* sp., *Rotalia* sp. ed *Heterostegina* cfr. *costata* d'Orb.

Esaminando ora la successione dei terreni terziari nelle immediate vicinanze ad Ovest della Catena del Catria, osserviamo come alla scaglia cinerea ed al bisciaro, che nel M. Cospio racchiude alcune conchiglie della *Pleurotomaria Morenai* Sacco, succedono delle marne arenacee grige scistose, le quali a Scelle, Montedoro, Palazzetto, Serretelle contengono una fauna avente numerose corrispondenze paleontologiche con quelle scoperte presso S. Severino Marche, nei dintorni di Pergola e di Acqualagna e nei calcari marnosi di cemento di Fabriano [1].

[1] Simonelli V. *Di alcuni fossili trovati nei dintorni di Pergola,* Proc. verb. Sc. tosc. Nat. 1886; Id. *Sopra la fauna del cosidetto « Schlier » nel Bolognese, e nell'Anconetano,* Atti Soc. tosc. Sc. Nat., 1891: Morena T. *Le formazioni eoceniche e mioceniche fiancheggianti il gruppo del Catria,* Boll. Soc. geol. ital. 1899; Canavari I. *La fauna dei calcari da cemento nelle vicinanze di Fabriano,* Palaeontographia italica, 1910.

Le specie determinate dal Morena e da me sono le seguenti:

Flabellum vaticani Ponzi; *Toxopatagus italicus* Manz. e Mazz; *Tellina* sp., *Nucula* cfr. *Mayeri* Hörnes; *Lima langhiana* Sacco; *Pholadomya* cfr. *margaritacea* Sow.; *Pholadomya Canavarii* Sim.; *Teredo* cfr. *norvergica* Spengl.; *Thracia pubescens* L.; *Pinna subpectinata* Mich.; *Tugurium* (*Xenophora*) *postextensum* Sacco; *Tugurium* (*Xenophora*) *extensum* Sacco; *Cirsotrema Dodorleini* Pant.; *Cassidaria* (*Galaeodea*) *tauropomum* Sacco; *Cassidaria* (*Galaeodea*) cfr. *echinophora* L.; *Aturia Aturi* Bast.; *Carcharodon megalodon* Agass.

Questa fauna è evidentemente attribuibile al Miocene medio (Langhiano) e rappresenta una facies di mare piuttosto profondo. Essa, insieme all'*Ostrea langhiana* Trab. delle marne dure selciose, che poggiano sopra il bisciaro, alle foraminifere dei generi *Amphistegina* e *Miogypsina* dei banchi calcarei ed alla presenza del *Pecten miocenicus* Mich. e *Chlamys scabrella* (Lm.) nei calcari di Scalia persuadono a riferire la formazione arenaceo-marnosa compresa fra i monti di Gubbio e la Catena del Catria al Miocene medio (Langhiano-Tortoniano).

Per renderci ragione della discordanza esistente tra l'Eocene ed il Miocene, dobbiamo ammettere che durante la fine del Paleogene e nel Miocene inferiore una gran parte dell'Appennino centrale emerse e la regione fu soggetta ad un intenso processo erosivo, che in alcuni punti pose allo scoperto le rocce dell'Eocene inferiore ed anche quelle del Cretaceo. Nel Miocene medio tornò in gran parte sotto il livello marino, in modo che si poterono deporre sugli strati eocenici e perfino sui cretacei, spesso con apparente concordanza, i sedimenti sublitorali, come i calcari arenacei sparsi in numerosi punti dell'Umbria, ed in parte di mare profondo come le marne ad Est dei monti eugubini e ad Ovest dei rilievi del Catria.

Il territorio studiato è costituito da un'ampia sinclinale diretta da NO a SE e divisa in due parti da una ondulazione secondaria nettamente distinta presso Pian Martino, ad Est della Cima Lanciacornacchie e verso la Cima di Mazzoccola; in corrispondenza della cerniera di questa grande piega elevasi la caratteristica Serra di Serra Maggio diretta anch'essa da NO. a SE., come in generale tutti gli altri rilievi dell'Appennino centrale.

Dal Fosso della Gangana procedendo verso Monte Picognola, nei pressi di C. Veglia ed Osteriaccia alla tipica formazione marnosa succedono delle arenarie a fina grana, ricche di mica, dotate di facile divisibilità e di colore bruno giallastro, le quali alternano con strati di marne argillose dello stesso colore. Queste arenarie scistose contengono sulla superficie numerose impronte di *Paleodyction*, *Cylindrites*, *Nemertilites* e le lastre, in cui si dividono, aventi uno spessore variabile dai 2 ai 15 cm., mostrano nella frattura un nucleo bruno di notevole durezza.

Su questi strati al disopra di C. Picognola poggiano in concordanza delle arenarie compatte per lo più in grossi banchi, di colore grigio ceruleo se inalterate, o giallastro sulle superficie esposte agli agenti atmosferici. I fossili sono estremamente scarsi; solo a NE. della Cima delle Capanne venne dal Morena raccolto un esemplare di *Ostrea* riferibile all'*Ostrea cochlear* (Poli) var. *navicularis*.

Queste arenarie si riscontrano pure nel M. Cà Maggiore sulla sponda destra del Sentino e vanno poi a formare la Serra di Serra Maggio, raggiungendo nel Pian di Serra la notevole altezza di 1015 m. e si estendono anche nella Serra dei Castagni presso il M. Nerone. Esse verosimilmente sono da riferirsi alla parte inferiore del Miocene superiore e corrispondono esattamente a quelle, che in tutto il Teramano ed il Piceno furono sempre costantemente trovate sopra gli scisti marnosi del Miocene medio [1]. E come in queste ultime località esistono dei giacimenti di gesso, così pure nelle arenarie della Serra di Serra Maggio e precisamente presso C. Caibaldini si osservano numerosi cristalli di selenite assai caratteristici per la loro geminazione.

Anche nell'Umbria centrale ad Ovest del corso del Tevere affiorano strati di arenarie compatte, la cui posizione stratigrafica è, però, diversa da quella delle arenarie ora descritte. Infatti le prime contengono Nummuliti ed Orbitoidi e riposano costantemente sulle argille scagliose o sulle marne policrome del Bartoniano intercalate a qualche straterello di brecciole serpentinose e vennero perciò da me riferite per la loro posizione stratigrafica [2] all'Oligocene, mentre dal Lotti sono attribuite all'Eocene superiore [3].

Le arenarie della Serra di Serra Maggio, invece, sono sempre prive di Nummuliti ed anzichè trovarsi sopra il Bartoniano, succedono in concordanza alla formazione marnosa del Miocene medio.

Per stabilire la tettonica della Serra di Serra Maggio è importante seguire la incisione, che separa il Poggio le Pacchette dalle propaggini settentrionali di M. Picognola. Ivi si scorgono in modo evidentissimo gli strati piegati in sinclinale, il cui nucleo trovasi presso C. Paravento. I banchi di arenaria compatta hanno uno spessore variabile dai 50 agli 80 cm.; quindi diventano via via più sottili e dànno luogo alle arenarie divisibili in lastre già ricordate. Essendo le arenarie più resistenti all'azione degli agenti atmosferici, che non le marne del Miocene medio, la Serra di Serra Maggio insieme al M. Picognola costituisce una serie di rilievi nettamente emergenti dalla formazione marnosa sottostante.

G. C.

[1] Moderni P. *Osservazioni geologiche fatte alle falde dell'Appennino fra il Potenza e l'Esino*. Boll. Com. geol., 1904.

[2] Principi P. *Alcune osservazioni sul Terziario dell'Umbria*. Boll. Soc. geol. ital., 1914.

[3] Lotti B. *Sulla questione del Terziario dell'Umbria*. Boll. Com. geol., 1915.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 5°, Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 7°-10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 9°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 8°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1922.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 7.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 7°

Seduta del 2 aprile 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 Aprile 1922.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota VIII del Corrisp. Quirino Majorana.

Altro metodo di constatazione dell'assorbimento. — Il dispositivo descritto nelle Note precedenti, oltre ad aver fornito una conferma nel modo già visto del fatto dell'assorbimento gravitazionale, consente, se adoperato in guisa alquanto diversa, una nuova verifica dello stesso fatto, la quale concorda con la precedente, anche dal punto di vista quantitativo, come ora farò vedere.

Nelle precedenti esperienze, il cubo di piombo di circa 10 tonnellate, indicato in P'P' nella fig. 4, veniva a imprigionare in M la sfera di piombo di 1274 gr., pur rimanendo questa sospesa, per mezzo del filo F, al braccio destro della soprastante bilancia. Nelle nuove esperienze, che ora descriverò, quella sfera è stata spostata in M_1 oppure in M_2, opportunamente scorciando od allungando il filo F, e naturalmente anche le protezioni tubulare e sferica, non indicate in figura, destinate a permettere di praticare il vuoto intorno alla sfera stessa. Le due posizioni M_1 ed M_2 vengono controllate esattamente al catetometro, e sono precisamente tali che il centro della prima è 5 cm. più in alto della faccia superiore di P'P' e quello della seconda altrettanto più in basso della inferiore. Per ciascuna di tali posizioni ho proceduto come per la primitiva posizione M; ho cioè osservato l'influenza dei piombi in PP e in P'P' (fig. 2), sull'equilibrio della bilancia, servendomi a tal uopo, come prima, del *controllo a mercurio*, e

procedendo alternativamente a letture con *sfera-contrappeso* (essendo la sfera ora in M_1 ora in M_2), o con *tara-contrappeso*. Per le ragioni che presto esporrò, in questa nuova serie, è stato più che mai necessario determinare frequentemente la sensibilità della bilancia, la qual cosa è resa in ogni momento possibile e rapida mediante il descritto cavalierino magnetico A_1 A_2 A_3 (fig. 3).

È ovvio comprendere che sperimentando così, si sieno constatate delle notevolissime deviazioni nella posizione di riposo del giogo, dovute all'attrazione dei piombi sulla sfera, eguale nei due casi, ma volta ora in basso (per M_1), ed ora in alto (per M_2); ciò è dovuto al fatto che la sfera non

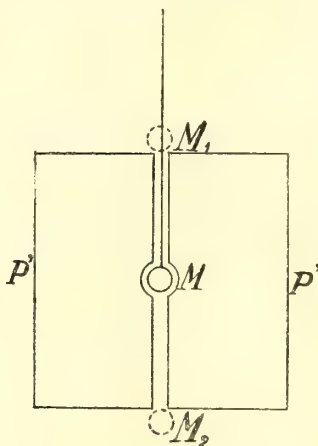



Fig 4

è più centrata rispetto al cubo, e l'attrazione, così generata, può, secondo la legge di Newton, venir calcolata a priori rigorosamente. Ciò è possibile mediante la formula già vista nella Nota VI, e che ci ha servito per calcolare l'attrazione A_1 della zattera quadrata di legno: basta in essa fare: $2a = b =$ cm. 95 (lato del cubo); $l =$ cm. 5; $\vartheta = 11{,}33$ (densità del piombo); e lasciare i valori già visti agli altri simboli. Si trova così che il valore di tale attrazione F è:

$$F = 0{,}21312 \text{ dine} = 0{,}21738 \text{ mg.}$$

Vediamo ora se il risultato sperimentale concorda con questa previsione. Anche qui si debbono eseguire delle correzioni all'effetto lordo osservato portando i piombi da PP a P'P', quando il giogo è carico col sistema *sfera-contrappeso*, e ciò tanto che la sfera sia in M_1 che in M_2. E propriamente si tratta ancora di correggere l'*errore magnetico*, *quello proveniente dall'attrazione della zattera*, *l'altro dovuto a quella delle masse sussidiarie* e finalmente *un quarto dipendente dall'attrazione dei piombi sul contrappeso*. Ora, riflettendo al modo con cui questi errori si manifestano,

si vede che il primo e l'ultimo sono indipendenti dalla posizione della sfera, e per conseguenza hanno ancora il valore già visto, per il caso della sfera in centro. Il secondo ed il terzo debbono necessariamente esser differenti da quelli rispettivamente calcolati altra volta, perchè provengono precisamente da un'azione attrattiva sulla sfera, la cui posizione, nelle due nuove serie di esperienze, è mutata.

Oltre a ciò si deve osservare che scopo delle attuali misure è quello di determinare l'attrazione del cubo, la quale attrazione è di segni opposti nei due casi, cioè per quello della sfera in M_1 oppure in M_2. Per cui se diciamo *positiva* l'attrazione su M_1, diremo *negativa* quella su M_2. Ho dunque proceduto in guisa analoga al caso della sfera in centro al calcolo delle correzioni da apportarsi alle ricercate attrazioni nei due casi: esse, che come si è detto, sono quattro, sono qui sotto trascritte:

	Sfera in alto	Sfera in basso
Errore magnetico	— 0,00147	+ 0,00147
Attrazione zattera	— 0,00092	+ 0,00242
Attrazione masse sussid. .	— 0,00092	+ 0,00447
Attrazione sul contrappeso .	+ 0,00275	— 0,00275
Totale correzioni, mg.	— 0,00056	+ 0,00561

Passo ora a dire delle osservazioni compiute. Esse sono costituite da 16 serie, di cui 8 per il caso della sfera in alto (ossia in M_1) e 8 per quello della sfera in basso; ogni serie risulta da un numero di determinazioni di effetto attrattivo (ciascuna delle quali è ricavata, come altra volta, dalla lettura di 9 elongazioni, con piombi in PP od in P'P') variabile, a seconda dei casi, da 9 a 20. Le dette serie sono state eseguite in gruppi alternati, per ciascuno dei quali la sfera conservava la stessa posizione M_1 od M_2. Si comprende quindi come tali gruppi si sieno susseguiti ad intervalli di tempo di parecchi giorni, dovendosi ogni volta aprire la bilancia e cambiare la lunghezza del filo F (fig. 4) e della sua custodia, per portare la sfera ora in basso ora in alto. Delle determinazioni di ciascuna serie è stata presa la media, e si è corretta questa conformemente alla tabella ora trascritta. Le medie così corrette, corrispondenti alle 16 serie, sono qui sotto riportate secondo l'ordine in cui vennero osservate, ed a fianco di ciascuna è altresì annotata la sensibilità media della bilancia, constatata durante il tempo impiegato per l'osservazione relativa: tale sensibilità è quella che ha servito alla trasformazione dei mm. letti sulla scala in mg., e corrisponde a deviazioni della bilancia per 1 mg. di sovraccarico.

Data		Posizione sfera	Attrazione	Sensibilità
—		—	—	—
			mg.	mm/mg.
25	VI 1921	alto	0,19296	179,7
26	"	"	0,19012	177,7
28	"	"	0,19292	177,4
30	"	basso	0,19636	171,7
1	VII 1921	"	0,19966	169,0
1	"	"	0,19670	169,5
2	"	"	0,19566	169,4
9	"	alto	0,19527	156,3
11	"	"	0,19944	150,9
12	"	"	0,19632	154,5
12	"	"	0,19623	150,9
12	"	"	0,2[illegible]023	133,5
14	"	basso	0,20515	139,2
14	"	"	0,20240	139,1
15	"	"	0,20101	140,6
17	"	"	0,20340	161,7

Dall'esame di questa tabella si rileva anzitutto che il valore dell'attrazione constatato in ogni caso è alquanto più piccolo di quello previsto teoricamente (mg. 0,21738) e che inoltre esso è variabile da serie a serie. Avendo eseguito con ogni cura il campionamento del cavalierino di 1 mg. circa, impiegato per le varie determinazioni di sensibilità, tanto che esso sia da ritenersi approssimato al vero a meno dell'1 $^0/_{00}$, non può dipendere da analogo errore la differenza constatata persino del 5 % con l'attrazione calcolata. Si comprende dunque che vi debba essere qualche altra causa, finora non discussa a cui si deve tale scarto, non bastando pensare che questo sia dovuto ad errore saltuario di osservazione, nel quale caso i valori su riportati sarebbero stati ora più piccoli ora più grandi di quello calcolato.

Volendo ricercare quella causa, rilevo anzitutto che vi è una certa dipendenza fra le varie sensibilità determinate nella guisa anzidetta, e le constatate attrazioni. Codesta dipendenza è messa in chiaro rilievo dalla fig. 5, nella quale si sono riportate le dette attrazioni su uno degli assi coordinati, e le sensibilità sull'altro; inoltre, le attrazioni per la *sfera in alto* sono indicate con cerchietti, e quelle per la *sfera in basso* con crocette. Dalla figura si rileva che in genere le attrazioni più forti corrispondono alle sensibilità più piccole; e la retta AB lascia quasi tutte le osservazioni per la *sfera in alto* al disotto, e tutte le osservazioni per la *sfera in basso* al disopra. Si possono poi tracciare le due altre rette a tratto pieno della figura come corrispondenti rispettivamente alle due posizioni della sfera, le quali, con una certa probabilità compatibile con l'approssimazione del metodo, rap-

presentano il fenomeno della variabilità (apparente) dell'attrazione con la sensibilità; nel tracciarle si tiene presente il criterio che tali rette (o, se del caso, curve) debbono essere fra loro parallele, giacchè non v'è ragione che i due diagrammi si svolgano con leggi differenti (a meno di un termine costante). Le due rette segnate sono una al disopra ed una al disotto di AB. Si debbono dunque interpretare due fatti: la inclinazione delle rette segnate, e la differenza costante di due loro ordinate, corrispondenti alla stessa ascissa.

Il primo di tali fatti si spiega tenendo presente quanto fu esposto nella Nota II. Il coltello centrale del giogo non ha, come si disse, lo spigolo perfettamente tagliente; esso è alquanto arrotondato, e feci vedere come se ne

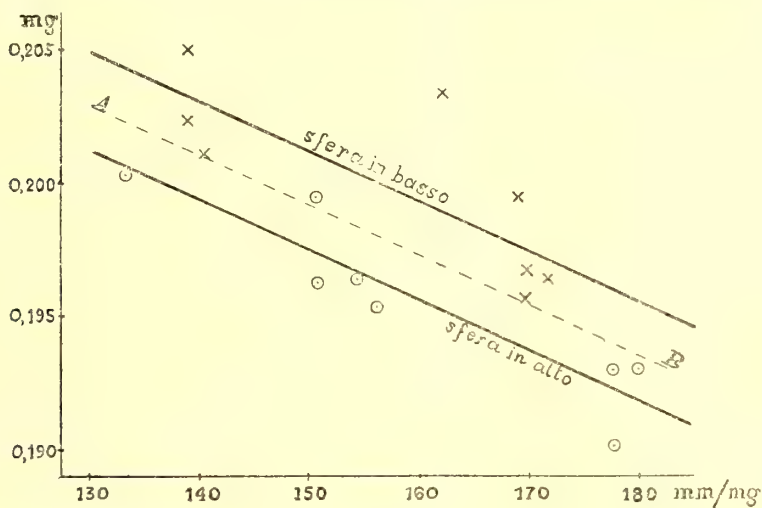



Fig. 5.

possa determinare il raggio di curvatura al suo punto di contatto col piano di agata. La tabella numerica riportata in quella Nota si riferisce precisamente alla bilancia Rueprecht da me adoperata, nelle condizioni delle esperienze di cui qui è cenno; per cui la curvatura del detto coltello è al suo punto centrale di circa 5 micron. Ma dissi anche, come vi sia ragione di ritenere che tale curvatura non sia costante; e propriamente come essa sia più grande per i punti laterali della sezione del coltello. In dipendenza da tale fatto, se si determina la sensibilità della bilancia *a giogo inclinato* essa deve risultare alquanto maggiore di quella corrispondente *a giogo orizzontale*. Ora con la parola sensibilità si dovrebbe intendere il rapporto $d\alpha/dP$ tra un angolo infinitesimo $d\alpha$ ed un sovraccarico pure infinitesimo dP, a differenza di quanto si è costretti a fare sperimentalmente. In pratica, infatti, io aggiungo 1 mg., che produce complessivamente un certo spostamento angolare del giogo che viene a rappresentare in certo modo la media di tutte le sensibilità comprese fra 0 ed il detto spostamento. Ora, l'attrazione che si tratta di

determinare, ha un valore corrispondente a $^1/_5$ di mg. circa, quindi, ad essa non corrisponde che uno spostamento angolare della bilancia all'incirca $^1/_5$ di quello che il mg. intiero occasiona. E siccome a tale spostamento deve corrispondere, per quanto si è detto, una sensibilità vera media alquanto minore di quella apprezzata con l'uso del mg., si comprende come servendosi di quest'ultima determinazione si sia portati a valutare come più piccola l'attrazione cercata, giacchè si divide la deviazione dell'indice luminoso per un numero troppo grande. Si vede inoltre che l'effetto viene esagerato al crescere della sensibilità totale per mg. Se poi la sensibilità fosse piccolissima od, al limite, fosse zero, rimanendo la curvatura dello spigolo del coltello costante (dentro escursioni piccolissime od infinitesime), vi sarebbe coincidenza fra le determinazioni della attrazione teorica e sperimentale. In altri termini riferendoci alla fig. 5, una delle due rette segnate (ed invero quella per la *sfera in basso*) è realmente un tratto di curva che volge la concavità verso il basso, e che finirebbe per diventare tangente ad una retta parallela all'asse della sensibilità di ordinata uguale a mg 0,21738; il punto di tangenza avverrebbe ad un valore di ascissa zero, cioè alla sensibilità nulla.

Dell'interpretazione del secondo fatto dirò nella prossima Nota.

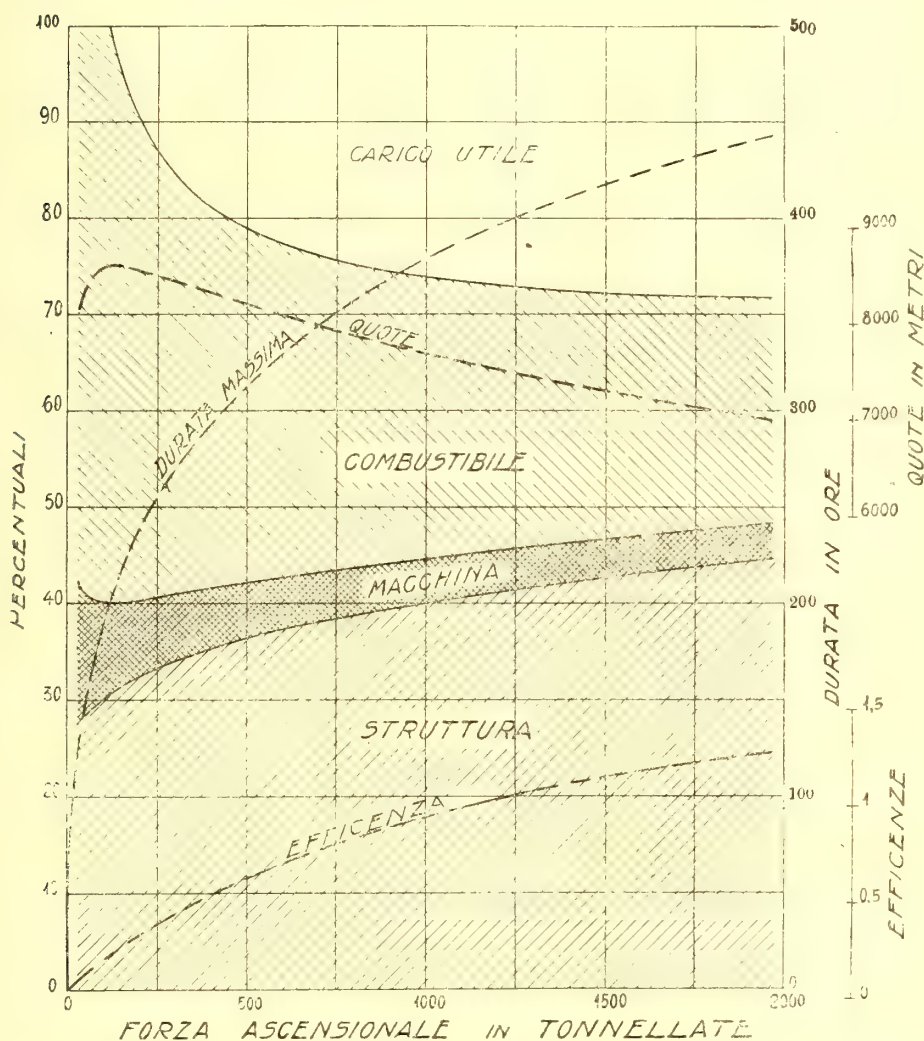
Meccanica. — *Limiti strutturali ed economici nelle dimensioni delle aeronavi.* Nota del Corrisp. col. G. Arturo Crocco.

In navigazione aerea con mezzi galleggianti, come in navigazione marina, vi è vantaggio a crescere le dimensioni, poichè la potenza necessaria ad imprimere una determinata velocità cresce in misura minore che non la totale forza di galleggiamento di cui si dispone. Per navi od aeronavi di forme simili la potenza varia all'incirca col quadrato delle dimensioni, mentre la totale forza di galleggiamento cresce col cubo: cosicchè la potenza unitaria, cioè il rapporto tra la potenza totale e la forza di galleggiamento varia in *ragione inversa delle dimensioni.*

Ne segue che anche il peso del macchinario, riferito alla totale forza di galleggiamento, segue la stessa legge.

Contro questo vantaggio delle dimensioni sta un inconveniente; ed è che il peso della *struttura* cresce in misura maggiore della forza di galleggiamento. Ma non è possibile determinare una legge generale. Per formularne una che abbia il merito della semplicità, divideremo la struttura in due parti: una soggetta a cimenti di tensione o compressione varianti direttamente colle forze ascensionali; e un'altra soggetta a cimenti varianti in ragione delle superfici, o non soggetta a cimenti precisabili.

Il peso della prima parte varierà come il prodotto dei volumi per le lunghezze: cioè come la quarta potenza delle dimensioni; quello della seconda parte varierà come i prodotti delle superfici per le distanze, cioè come il cubo delle dimensioni. E tale per ragioni prudenziali si supporrà la va-

riazione del peso in quegli organi ove i cimenti non siano di natura precisabile.

Cosicchè, eseguendo il rapporto tra questi pesi e la totale forza ascensionale. si avrà un termine crescente in ragione diretta delle dimensioni, ed un termine costante.

In conseguenza, la percentuale (o *frazione*) della forza di galleggiamento assorbita dal *peso morto* dell'aeronave, potrà scriversi sotto la forma

seguente, nella quale si è messo in evidenza il *diametro*, D, della sezione maestra:

$$\text{Percentuale peso morto} = k + \frac{D}{s} + \frac{m}{D}$$

I primi due termini concernono ciò che abbiamo chiamato, in una sola parola, *struttura*: e il terzo ciò che abbiamo chiamato *macchinario*.

Le considerazioni suddette conducono alla esistenza di *minimi*, che passiamo ad accennare. V'è anzitutto un *minimo di peso morto* per quelle dimensioni per le quali si raggiunga la relazione:

$$D_1 = \sqrt{s \cdot m}\,.$$

A questo minimo corrisponde l'aeronave unitariamente più leggera: e quindi quella che può sollevare il massimo *carico libero*; ed elevarsi perciò alla massima quota. Essa è anche l'aeronave più conveniente, se destinata a percorsi brevi, pei quali il peso di combustibile sia una frazione trascurabile del carico libero.

Se però il peso del combustibile diviene notevole, e cioè se l'aeronave è destinata a lunghi percorsi, si ritrova l'esistenza di un secondo minimo considerando anche il peso di combustibile necessario per un determinato percorso, o per una determinata durata di viaggio. Tale peso essendo proporzionale alla potenza del macchinario ed alla durata del viaggio, T, sarà della forma $\frac{cT}{D}$; eppertanto il *carico utile* residuo sarà fornito dalla espressione:

$$\text{carico utile} = 1 - k - \frac{D}{s} - \frac{m + cT}{D}\,,$$

il cui valor massimo si avrà per il diametro

$$D_2 = \sqrt{s(m + cT)}\,.$$

Se nella precedente espressione si pone eguale a *zero* il carico utile, si ricaverà la massima durata del viaggio:

$$T = \frac{1}{c}\left((1 - k)\,D - \frac{D^2}{s} - m\right)$$

che diviene *optima* per

$$D_3 = \frac{1}{2}(1 - k)\,s\,;$$

diametro limite corrispondente alla massima *autonomia* conseguibile.

Questo limite coincide con quello della migliore *efficienza economica*; cioè con quello che si ottiene ricercando il valor massimo del rapporto tra carico utile e combustibile.

Questo rapporto assume la forma

$$\text{efficienza} = \frac{(1-k)\,D - \frac{D^2}{s} - m - cT}{cT};$$

ed è massimo precisamente per

$$D_4 = D_3 = \frac{1}{2}(1-k)\,s.$$

Ad esemplificare le precedenti relazioni abbiamo considerato i valori numerici a noi personalmente risultanti da uno dei più recenti progetti di semirigido. Essi non hanno ancora la sanzione dei consuntivi, epperò li citiamo a solo titolo di esempio circa le cifre probabili che potranno venir raggiunte da una buona tecnica.

Noi abbiamo desunto, posto il diametro D in metri; e supposta una velocità di crociera di 100 km. orarii:

$$k = 0.215;$$
$$s = 325;$$
$$m = 2.77;$$
$$c = 0.0861:$$

da cui si ricavano i seguenti limiti, in cifre tonde:

(per il peso morto)	$D_1 = 30$	
(per il carico utile)	$D_2 = 48$	per $T = 50$ ore
	$D_2 = 61$	» » $= 100$ »
	$D_2 = 71$	» » $= 150$ »
	$D_2 = 86$	» » $= 200$ »
(per l'autonomia)	$D_3 = 128$	
(per l'efficienza)	$D_4 = 128$	

Questi limiti corrispondono a volumi rilevanti: onde vi è margine notevole nella tecnica delle aeronavi per lo sviluppo di perfezionamento. V'è soltanto da osservare, che il guadagno di carico utile, di autonomia e di efficienza diviene sempre meno sensibile col crescere delle dimensioni, cosicchè da un punto di vista pratico non è conveniente andare troppo oltre. Abbiamo perciò ritenuto di aggiungere un diagramma dei pesi morti, dei carichi utili, e delle efficienze; e lo abbiamo disegnato per l'autonomia di 200 ore, riferendolo alle forze di galleggiamento totali, espresse in tonnellate. Si vede che l'utilità di aumentare le dimensioni è sensibile sino ad unità di circa 1000 tonnellate, corrispondenti al diametro di 60 metri.

Geofisica. — *Primi risultati di una recente campagna geomagnetica nella regione Adriatica.* Nota del Corrispondente Luigi Palazzo.

Variazioni secolari magnetiche negli ultimi anni. — Alcune serie di misure magnetiche ripetutamente fatte a Terracina (prov. di Roma), in varie occasioni fra gli anni 1888 e 1913, m'avevano palesato, nell'andamento delle variazioni cosidette secolari, le particolarità seguenti [1]: che la declinazione magnetica (occidentale) la quale, nel precedente secolo e nel primo decennio di questo, diminuiva di anno in anno quasi uniformemente in ragione di 5-6 primi, aveva assunto dipoi un decremento annuale assai più forte, quasi 10′; che l'inclinazione (boreale), dopo avere a lungo mantenuto il decremento annuo di circa 2′, era nei tempi più recenti quasi stazionaria; che l'intensità orizzontale, crescente nello scorso secolo di circa 20 unità γ in ogni anno, intorno al 1907 aveva toccato un massimo, e poi aveva preso lentamente a discendere.

Fatti analoghi erano emersi da un mio studio [2] sulle variazioni magnetiche a Teodosia, città dell'Oriente europeo molto distante bensì da Terracina, ma a latitudine solo poco diversa; quivi pure, io ebbi a notare la variazione più rapida della declinazione negli ultimi anni [3]; la stazionarietà, o quasi, dell'inclinazione avanti la fine del secolo, seguìta da aumento; il passaggio dell'intensità orizzontale per un massimo, verificatosi a Teodosia, assai prima che a Terracina, cioè nel 1891 [4], seguìto da una diminuzione sempre più accelerata verso il presente.

Gli inconsueti eventi del magnetismo terrestre posti in luce nel mio lavoro di Terracina, dopo cessato il periodo bellico e riprese le corrispondenze e gli scambi di pubblicazioni scientifiche fra gli Stati d'Europa, ebbi piacere di vederli confermati anche dai risultati raccolti all'estero in osser-

[1] *Misure magnetiche e confronti magnetometrici a Terracina* (Ann. Uff. Centr. Meteor. Geod., vol. XXXVII, parte 1ª, 1915).

[2] *L'eclisse totale di Sole del 21 agosto 1914 osservata dalla missione italiana in Teodosia (Crimea)* (Mem. Soc. Spettroscopisti, vol. VI, 1917).

[3] Anche per Massaua ho riconosciuto un maggiore decrescimento annuo della declinazione (occidentale) nel corrente secolo, in confronto di prima (*Misure magnetiche in Eritrea*, Ann. Uff. Cent. Meteor. Geod., vol. XXXV, parte 1ª, 1913).

[4] In 16 anni, adunque, il punto dove l'intensità orizzontale ha compiuto il suo massimo, avrebbe trasmigrato successivamente da oriente ad occidente, percorrendo i 22 gradi circa di parallelo che separano Teodosia da Terracina.

vatorii magnetici permanenti; ed a tale riguardo mi basterà citare, per tutti, il lavoro di Ad. Schmidt dell'Osservatorio di Potsdam [1].

Necessità di nuove carte magnetiche per l'Italia. — Le carte magnetiche generali dell'Italia, pubblicate a cura del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica [2], sono state costruite in base ai rilievi fatti da Chistoni e da Palazzo fra gli anni 1881 e 1892: i valori degli elementi magnetici, allora raccolti, furono tutti ridotti all'epoca comune 1892,0. Le dette carte rappresentano pertanto la distribuzione del geomagnetismo in Italia quale era un trentennio addietro. Per desumere da tali carte i valori degli elementi negli anni successivi, si era soliti ad applicare le variazioni per ogni anno, così come apparivano essere dalle precedenti misure, ossia approssimativamente i valori medi: $\Delta D = -5',5$ per la declinazione, $\Delta I = -1',5$ per l'inclinazione, $\Delta H = +21\gamma$ per l'intensità orizzontale (il segno — indica *diminuzione*, il segno + *aumento* del valore numerico col progredire del tempo). A vero dire, siffatto procedimento di calcolo extrapolatorio pecca di soverchio semplicismo, e può portare col tempo ad incertezze più o meno gravi. Infatti le variazioni secolari sono soggette ad oscillazioni (dipendenti forse dai fenomeni di attività solare), ed inoltre non sono sensibilmente le stesse per tutti i punti compresi nell'ámbito della carta magnetica di cui si fa uso (in ispecie se questa abbracci considerevole estensione di territorio); e ciò porta di conseguenza che, quanto più ci allontaniamo dall'epoca di riferimento della carta, tanto più è da temersi che la fisonomia delle effettive linee isomagnetiche sia alterata. Una revisione generale delle carte magnetiche, sulla scorta di nuove misure, a certa scadenza sempre si impone.

Tuttavia le nostre carte avrebbero potuto, ancora per qualche tempo, servire abbastanza bene per gli usi pratici correnti, se non fossero sopravvenuti gli inopinati cambiamenti nelle variazioni secolari, di cui al precedente paragrafo, ed i quali — possiamo dire — non hanno che contribuito ad un più precoce invecchiamento delle carte stesse. Di qui la necessità di rimettere carte e tabelle a giorno senza ulteriori indugi.

D'altronde nuove carte magnetiche per l'Italia vengono richieste da più parti. È stato proposto che una carta magnetica del nostro paese abbia a

[1] *Die Säkularänderung der erdmagnetischen Elemente im westlichen Europa während der letzten Zeit* (Meteor. Zeitschrift, 1919). Nel lavoro sono calcolate alcune formole che, pel periodo di tempo considerato e per l'Europa media ed occidentale, esprimono le variazioni secolari in funzione della latitudine e longitudine dei luoghi; ed il prof. Schmidt stesso si è compiaciuto molto di verificare che i risultati da me ottenuti a Terracina erano in ottimo accordo con le sue formole, la cui validità si estenderebbe pertanto anche alla media Europa meridionale.

[2] Ann. Uff. Centr. Meteor. Geod., vol. XIV, parte 1ª, 1892; Atti I. Congr. Geogr. It., Genova 1892; Atti V. Congr. Geogr. It., Napoli 1904.

figurare anche nell'Atlante fisico-economico d'Italia, di cui si è trattato nell'VIII Congresso Geografico Italiano, tenutosi a Firenze nella primavera dello scorso 1921. La R. Marina desidera avere gli elementi per tracciare la carta odierna delle isogone del bacino Mediterraneo, ad uso dei naviganti (1). L'Istituto Geografico Militare, pei bisogni della guerra, ebbe a stampare una carta delle isogone ridotta all'epoca 1917, ma pur sempre derivata da quella antica nostra del 1892: epperciò l'Istituto intende ora allestire una nuova edizione della carta con tutte le varianti che possono essere intervenute da allora fino ad oggi.

Programma di lavoro per un nuovo rilevamento magnetico dell'Italia. — Stando così le cose, il Ministero dell'Agricoltura, su mia proposta appoggiata dal Consiglio Direttivo di Meteorologia e Geodinamica nella sessione del febbraio 1921, mi affidò il cómpito di eseguire i nuovi rilievi magnetici che si ritenevano necessari per la rifazione delle carte. È chiaro che per mettere queste in corrente, non occorre rioccupare tutte indistintamente le stazioni fatte in precedenza, ma basta scegliere un limitato numero di punti, opportunamente distribuiti, pei quali si posseggano buone serie di misure prese in varie epoche anteriori: quivi solo si rinnovano le osservazioni, allo scopo di accertare bene l'andamento e l'importo delle variazioni avvenute nel corso del tempo. Conosciuta con esattezza la legge di variazione per sufficienti punti, si potrà estenderla per interpolazione a tutte le stazioni della precedente rete magnetica, e ricavare così gli elementi per il disegno delle nuove carte.

Fu stabilito di ripartire il lavoro in due anni, ossia di intrapprendere nel 1921 il rilevamento della regione adriatica, lungo le due sponde orientale ed occidentale, e di compiere poi, nel successivo 1922, l'esplorazione dei litorali e delle isole del Tirreno e del Jonio.

Risultati della campagna adriatica 1921. — Nella presente Nota intendo offrire alla R. Accademia un sommario resoconto dei risultati d'osservazione della campagna magnetica da me svolta nell'Adriatico dal 27 agosto al 21 dicembre 1921, e che comprende 19 *stazioni di ripetizione.* I dati numerici sono consegnati nel quadro che segue.

(1) La cessata i. r. Marina austriaca, parecchi anni prima del conflitto europeo, aveva provveduto alla verifica della declinazione magnetica lungo la sponda orientale dell'Adriatico. Gli altri elementi del magnetismo non furono però considerati. Le nuove misure di declinazione furono eseguite nel 1907 dall'allora capitano di fregata W. Kesslitz, dirigente la sezione geofisica dell'Ufficio Idrografico di Pola. Questi stesso nel 1914 sollecitava perchè da parte di noi italiani si procedesse ad una analoga ricognizione per la riva occidentale adriatica. Si era allora rimasti d'accordo che l'Ufficio meteorologico italiano avrebbe iniziato il lavoro nella successiva primavera; ma la guerra, scoppiata poco appresso, mandò a monte il progetto.

DETERMINAZIONI MAGNETICHE NELLA REGIONE ADRIATICA, 1921.

STAZIONI	Latitudine Nord φ	Longitudine Est da Green. λ	Declinazione occidentale D	Inclinazione boreale I	Intensità orizzontale H	DATA delle osservazioni
Costa orientale:					Γ	1921
Trieste	45.38,9	13.47,6	6.51,0	60.59,7	0,21745	IX/16, 17
Pola (Ospedale) [1] . . .	44.51,9	13.51,3	6.37,7	60.19,7	0,22070	IX/21.22
Pola (Osservatorio) . . .	44 51,8	13.50,8	6.37,0	60.14,5	0,22082	IX/23, 24, 25
Zara	44.06,4	15.14,4	6.27,0	59.48,5	0,22398	IX/27, 28, 29
Spálato	43.30,2	16.26,7	5.54,7	59.09,2	0,22690	X/1, 2. 3
Lissa	43.03,9	16.11,4	5.34,1	58.21,5	0,23205	X/6, 7
Lágosta	42.45,9	16.54.3	5.15,1	58.08,8	0,23281	X/10, 11
Antivari	42.05,3	19.05,7	4.39,4	57.22,7	0,23625	X/17, 18
Corfù [2]	39.36,6	19.54.9	4.17,3	54.36,1	0.24872	X/25, 26
Costa occidentale:						
Venezia (Lido)	45.25,7	12.23,1	7.19,8	61.02,3	0,21701	IX/2, 3
Ravenna (Porto Corsini) .	44.29,3	12.16,6	7.24,7	60.02,3	0.22191	VIII/29, 30
Ancona	43.36,1	13.30,8	6.37,8	59.10,1	0,22657	XII/19, 20
Pescara	42.27,6	14.13,3	6.23,6	58.05,9	0,23183	XII/15, 16, 17
Trémiti (S. Nicola) . . .	42.07,1	15.30,3	5.59,3	57.30,2	0,23461	XII/2, 3, 5, 6
Manfredonia	41.38,1	15.55,6	5.45,9	56.58,2	0,23761	XII/10, 11
Molfetta	41.12,5	16.34,9	5.27,2	56.27,8	0,23987	XI/25, 26. 27, 28
Brindisi	40.38,8	17.56,7	4.54,9	55.49,7	0,24311	XI/6, 7, 8
Taranto	40.27,9	17.15,0	5.11,8	55.39,9	0,24352	XI/21, 22, 23
Otranto	40.08,4	18.29.4	4.45,2	55.14,9	0,24564	XI/11, 12, 13
Capo Leuca	39.47,7	18.22,3	4.48.6	54.57.9	0.24677	XI/16, 17, 18

Avverto che i valori su riportati sono il risultato, bensì definitivo, del calcolo delle osservazioni fatte; ma queste non sono ancora state depurate dalle variazioni diurne (siano queste ordinarie, o siano accidentali cioè do-

[1] L'Osservatorio di Pola, su Monte Zaro, già da parecchi anni, trovasi in condizioni alquanto anormali di funzionamento, a causa di masse di ferro vicine e, molto più ancora, a causa delle correnti elettriche delle linee tramviarie che passano lì presso, al piede dell'altura. I distubi si rendono visibili specialmente nelle registrazioni della forza verticale. Io tuttavia, a scopo di confronti, volli pure fare determinazioni assolute nel padiglione magnetico dell'Osservatorio (in parte durante le ore notturne, cessato il traffico tramviario cittadino). Ma come valori normali degli elementi magnetici a Pola debbono prendersi quelli ottenuti in località appartata dai tramvai, per la quale scelsi un vasto campo annesso all'Ospedale Provinciale, sul Monte S. Michele.

[2] Corfù propriamente è isola del Jonio, ma ho creduto bene di comprendere pur essa nel viaggio di esplorazione lungo l'Adriatico orientale. Analogamente, nel gruppo delle stazioni occidentali ho incluso Taranto, sebbene sul Jonio.

vute a perturbazioni) del magnetismo terrestre, nè sono state ricondotte ad un'epoca rigorosamente comune per tutte le stazioni. Siffatte riduzioni io farò in un secondo tempo, allorchè potrò avere a mia disposizione gli spogli delle registrazioni giornaliere del magnetografo di Pola, per gli ultimi mesi del 1921.

Ciò malgrado, siccome ebbi sempre cura di osservare gli elementi magnetici maggiormente variabili (D e H) scegliendo quelle ore del giorno, nelle quali è noto che D e H passano generalmente pel valore medio diurno, e siccome le misure in ciascuna stazione furono ripetute anche in più giorni, così ho motivo di ritenere che i numeri della tabella corrispondano già fin d'ora, con buona approssimazione, ai valori medî normali diurni, riferibili all'epoca media 1921,8, tanto da potermi permettere di trarre adesso, in prima analisi, qualche utile deduzione.

Correlazione fra i valori magnetici e le coordinate geografiche delle stazioni. — Nella tabella ho ordinato le stazioni, in ciascun gruppo, secondo la latitudine discendente; così a colpo d'occhio chiunque rileva che i valori dell'inclinazione I e quelli dell'intensità H risultano anch'essi ordinati scalarmente fra le stazioni procedenti dal nord al sud. Col diminuire della latitudine, decresce assai regolarmente l'inclinazione ed aumenta invece la forza orizzontale. La tabella non offre eccezioni; quindi è escluso che esistano forti anomalie nei punti esplorati. Un breve calcolo poi ci mostra che per ogni grado di discesa nella latitudine, l'inclinazione diminuisce per poco più di 1^{0} (più precisamente, in media $1^{0},1$), e la forza H aumenta per circa 535γ; questi rapporti si mantengono sensibilmente gli stessi per l'una e l'altra sponda.

In quanto alla declinazione, si rende invece manifesta la sua stretta dipendenza dalla longitudine, e cioè D diminuisce procedendo sul parallelo da occidente verso oriente. Lungo entrambe le rive adriatiche troviamo che la variazione in D è di circa $25'$ per 1^{0} di longitudine.

Confronti con le carte magnetiche del 1892. — Riesce istruttivo fin da ora il confronto degli attuali valori degli elementi magnetici con quelli desumibili dalle nostre carte di trent'anni or sono. Da esse carte, per ciascuno dei punti esplorati, mediante interpolazione grafica fra le linee isomagnetiche disegnate, estraggo i valori proprî dell'epoca 1892,0; applico loro, moltiplicando per 30, le variazioni annuali medie precedentemente note ed assegnate alle vecchie carte (v. al paragrafo 2° di questa Nota), e così riporto ognuno dei valori al tempo 1922,0; infine ne faccio le differenze coi risultati attuali [1]. Queste differenze sono esposte nella seguente tabella,

[1] Nel calcolare queste differenze considero della declinazione (tuttora occidentale ovunque in Italia) il valore numerico senza attribuirgli il segno —, come sarebbe conforme alla convenzione in uso.

in forma di *correzioni* delle carte, vale a dire i numeri sono quelli che bisogna aggiungere o togliere ai valori dedotti, nel solito modo, dalle carte per avere i valori veri, ottenuti nella recente campagna.

CORREZIONI ALLE CARTE MAGNETICHE DEL 1892,0.

STAZIONI	in D	in I	in H	STAZIONI	in D	in I	in H
Costa orientale			*c. g. s.*	*Costa occiden.*			*c. g. s.*
Trieste	— 37′	+ 24′	— 54.10⁻⁴	Venezia. . . .	— 37′	+ 29′	— 60.10⁻⁴
Pola	— 47	+ 19	— 51.	Ravenna . . .	— 37	+ 15	— 54.
Zara	— 39	+ 26	— 54.	Ancona	— 49	+ 20	— 54.
Spálato	— 42	+ 32	— 68.	Pescara . . .	— 44	+ 19	— 62.
Lissa	— 37	+ 20	— 50.	Tremiti . . .	— 41	+ 19.	— 59.
Lágosta	— 49	+ 29	— 64.	Manfredonia . .	— 41	+ 22	— 56.
Antivari (¹) . .	— 44	+ 35	— 66.	Molfetta . . .	— 45	+ 22	— 56.
Corfù	— 47	+ 33	— 69.	Brindisi . . .	— 48	+ 30	— 62.
				Taranto . . .	— 49	+ 22	— 58.
				Otranto . . .	— 44	+ 32	— 61.
				Capo Leuca . .	— 42	+ 34	— 64.
Correzioni medie	— 43	+ 27	— 59.10⁻⁴	Correzioni medie	— 43	+ 24	— 59.10⁻⁴

I numeri della tabella sono fra di loro in accordo molto soddisfacente, specialmente se si considerano le imperfezioni inerenti all'impiego del graficismo.

Le differenze fra i valori desunti dalle carte e quelli osservati ora, nel 2⁰ semestre 1921, sono notevoli, e bene giustificano la nostra impresa della ripetizione delle misure. Infatti le carte finora usate portano, nell'attuale momento, per la declinazione a valori superiori ai reali di 43′, in media; nell'inclinazione dànno valori al disotto del vero per 25′ circa; invece la componente orizzontale della forza magnetica risulta troppo alta per 0,0059.

Possiamo anche dire che nel bacino Adriatico la declinazione, dal 1892 al 1922, è diminuita globalmente di 3⁰ 28′, in media, quindi assai più del previsto: l'inclinazione è discesa di poco, circa 20′; l'intensità mostra un aumento poco sensibile, appena 40 γ. Se tali cangiamenti si fossero compiuti con uniformità, secondo una funzione lineare del tempo (il che sappiamo bene che non è), per le *variazioni secolari medie*, nell'intervallo 1892-1922 e nell'Adriatico,

(¹) Siccome Antivari e Corfù giacciono fuori del quadro delle nostre carte magnetiche, così pei detti due punti mi riferisco alla carta austriaca del 1890, annessa alla Memoria di Laschober e Kesslitz (*Magnetische Beobachtungen an den Küsten der Adria in den Jahren 1889 und 1890*, Pola 1892).

potremmo assumere: $\Delta D = -6',9$, $\Delta I = -0',7$, $\Delta H = +1,3\,\gamma$: quantità quest'ultima quasi evanescente. La realtà è che l'intensità H, dopo il 1892, in Italia ha continuato ancora a crescere, ma con moto rallentato, poi ha raggiunto il massimo, ed ora è nella fase inoltrata di decrescimento, come fu dimostrato per Terracina.

Queste nozioni sulle variazioni magnetiche secolari sono qui date a titolo provvisorio, poichè sull'argomento dovremo tornare in seguito, con un altro scritto, ove le studieremo a fondo, facendo tesoro di tutte le osservazioni fatte in tempi diversi del passato, nelle stazioni di ripetizione, allo scopo di determinare la forma della funzione rappresentatrice delle variazioni stesse.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les fonctions génératrices des polynomes de Laguerre.* Nota di A. Angelesco, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Le polynome $P_n(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} - ny = 0\,, \tag{1}$$

où n est un entier positif, a été rencontré et étudié par Laguerre [1] dans son mémoire sur l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,.$$

Laguerre donne [2] aussi le développement

$$\frac{1}{1-\alpha}\,e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\,P_n(x)\,. \tag{2}$$

1. Formons une équation aux dérivées partielles à laquelle doivent satisfaire toutes les fonctions génératrices de la forme

$$z(\alpha\,,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\,C_n\,P_n(x)\,, \tag{3}$$

où C_n est un coefficient ne dépendant pas de x et α.

[1] Œuvres de Laguerre, t. 1, pag. 428.
[2] Loc. cit., pag. 436.

Considérons, pour cela, la relation

$$x\,P''_n(x) + (x+1)\,P'_n(x) - n\,P_n(x) = 0 \,. \tag{4}$$

En la multipliant par $C_n \alpha^n$ et en faisant en suite la somme des relations obtenues en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, ad inf., on voit facilement que toute fonction de la forme (3) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \,. \tag{5}$$

Ordonons la série (3) suivant les puissances de x

$$z(\alpha\,, x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi_n(\alpha) \,. \tag{6}$$

Entre les fonctions $\varphi_n(\alpha)$ on doit avoir la relation

$$n^2 \varphi_n(\alpha) + (n-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha) - \alpha\,\varphi'_{n-1}(\alpha) = 0 \,,$$

qu'on obtient en remplaçant dans l'équation (5) z par la série (6).

En prenant pour $\varphi_0(\alpha)$ une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$, cette relation nous montre sans difficulté que l'on a

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{(n\,!)^2}\,\varphi^{(n)}(\alpha) \,,$$

en désignant par $\varphi^{(n)}(\alpha)$ la dérivée d'ordre n par rapport à α de $\varphi(\alpha)$. Le développement (6) deviendra donc

$$z(\alpha\,, x) = \varphi(\alpha) + \frac{\alpha x}{1^2}\,\varphi'(\alpha) + \cdots + \frac{\alpha^n x^n}{(n\,!)^2}\,\varphi^{(n)}(\alpha) + \cdots \tag{7}$$

où $\varphi(\alpha)$ représente une série entière en α. On a ainsi une expression de la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$, qui pour $x = 0$ se réduit à une série entière en α, donnée à priori.

En faisant dans (7) $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{1-\alpha}$ on retrouve la fonction génératrice (2).

Si l'on prend

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \frac{f(u)}{u-\alpha}\,du \,,$$

$f(u)$ étant une fonction arbitraire et α en dehors de l'intervalle (a, b), on trouve

$$z(\alpha, x) = \int_a^b e^{\frac{\alpha x}{u-\alpha}} \frac{f(u)}{u-\alpha} du . \tag{8}$$

De même, en supposant $\varphi(\alpha)$ holomorphe à l'intérieur du contour C, on a, par la formule de Cauchy,

$$z(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{\alpha x}{u-\alpha}} \frac{\varphi(u)}{u-\alpha} du , \tag{9}$$

α étant à l'intérieur du contour C.

Remarque. — Si l'on fait dans (7) $\varphi(\alpha) = \alpha^n$, alors $z(\alpha, x)$ se réduit à $\alpha^n \, P_n(x)$. Par suite, de (9), la représentation par intégrale

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\frac{x}{z-1}} \frac{z^n}{z-1} dz ,$$

Γ étant un contour ayant le point 1 à son intérieur.

2. Considérons l'intégrale

$$y = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{P_n(u)}{x-u} du \qquad x > 0 , \tag{10}$$

qui est analogue à l'intégrale de F. Neumann pour les fonctions sphériques de seconde espèce. Il est facile de voir que cette intégrale est aussi une solution de l'équation différentielle (1). En effet, si nous remplaçons dans l'intégrale (10) $P_n(u)$ par sa valeur tirée de la relation (4), donc par

$$\frac{1}{n}\left[\frac{du \, P'_n(u)}{du} + u \, P'_n(u)\right],$$

on obtient, après deux intégrations par parties,

$$ny = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{x - u(u-x-1)}{(x-u)^3} P_n(u) \, du .$$

De (10), par différentiations, on a

$$\frac{dy}{dx} = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{u-x-1}{(x-u)^2} P_n(u) \, du ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{(u-x-1)^2+1}{(x-u)^3} P_n(u) \, du .$$

Avec ces valeurs de ny, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ on voit immédiatement que l'intégrale (10) est une solution de l'équation (1).

Ceci établi, désignons par $Q_n(x)$ l'intégrale (10). On montre de même que précédemment qu'une somme de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n C_n Q_n(x),$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles (5). Il en résulte que $z(\alpha, x)$ étant une fonction génératrice de la forme (3), et par suite une solution de l'équation (5), l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} e^{u-x} \frac{z(\alpha, u)}{x-u} du,$$

est aussi une solution de la même équation aux dérivées partielles.

Meccanica celeste. — *Sui satelliti retrogradi.* Nota I di P. Burgatti, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

L'esistenza dei satelliti a moto retrogrado è un fenomono molto interessante, che cagiona difficoltà assai gravi nelle teorie cosmogeniche. Singolare principalmente è la circostanza che essi sono i più lontani dai rispettivi pianeti. Senso del moto e distanza sembrano perciò due caratteri intimamente collegati, e tali da far quasi ritenere che i satelliti che li posseggono abbiano una origine diversa di quelli a moto diretto: i quali, da Kant e da Laplace in poi, sono stati considerati parenti più o meno stretti dei pianeti. Cotesta opinione, espressa anche da autorevoli astronomi, corrisponde a verità? Non credo possibile una risposta definitiva allo stato attuale delle nostre conoscenze, e ritengo che non potrà essere data dalla pura meccanica. Nondimeno la meccanica è in grado di chiarire alcune differenze essenziali fra le due classi di satelliti e di offrire qualche elemento per orientarsi in mezzo all'oscurità del grave problema. Questa Nota contiene alcune considerazioni che mirano al fine suddetto. Sono state dedotte, riducendo opportunamente il problema al suo maggior grado di semplicità, per modo che restassero in evidenza le sole cause di differenziazione delle due classi di satelliti. L'importante è che questo appunto si può fare in parecchi dei casi che offre la natura.

Poniamoci nel caso del problema ristretto dei tre corpi. L'orbita del satellite è nel piano dell'orbita planetaria, e la massa del satellite T è ab-

bastanza piccola per non alterare sensibilmente il moto del pianeta P, che gira intorno al baricentro O Sole-pianeta uniformemente e circolarmente. Si riferisce il moto di T agli assi rotanti $OP \equiv Ox$ e Oy perpendicolare a Ox. Ma si possono pensare gli assi come fissi, purchè alle forze attrattive agenti su T si aggiungano la forza centrifuga e la forza di Coriolis cambiata di senso. Si vede chiaramente che quest'ultima forza è la sola che vari (in direzione) passando da un satellite diretto a un satellite retrogrado: le altre permetterebbero al satellite di descrivere un'orbita nei due sensi. *Essa è rivolta verso il centro di curvatura nei moti retrogradi, nel senso opposto nei moti diretti; ed è perciò la cagione del diverso comportamento delle due classi di satelliti.*

Rilevato questo, si è spinti naturalmente a vedere se fosse consentito di trascurare due delle altre forze: la forza attrattiva del Sole e la forza centrifuga.

Siano M, m, μ le masse di S, P, T; e indichiamo le varie distanze ponendo $TP = \varrho$, $TO = r$, $TS = \varrho_1$. Vogliamo supporre che O sia abbastanza vicino a S, e ϱ abbastanza piccola rispetto a $SP = a$, perchè possa ritenersi sensibilmente TO sempre coincidente con TS. Questa ipotesi è accettabile in parecchi dei casi che offre la natura. Ne risulta che la forza attrattiva di S su T e la forza centrifuga (diretta come OT) acquistano la espressione

$$f_s = \frac{KM\mu}{r^2} \qquad f_c = \mu\omega^2 r\,,$$

essendo ω la velocità angolare del pianeta intorno al Sole, e avendosi per cose note

$$\omega^2 = \frac{K(M+m)}{a^3}\,. \qquad (a = SP)$$

Queste due forze hanno ugual direzione e verso opposto, perciò i loro effetti si sottraggono costantemente: ossia, è la loro differenza che entra in giuoco.

Essendo nostro intendimento di considerare le orbite quasi circolari, supponiamo addirittura ϱ costante e $\varrho : a = c$ abbastanza piccolo, talchè sia lecito trascurare c^2, c^3 ecc. Scriviamo i valori di f_s e f_c nella forma:

$$f_s = \frac{KM\mu}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \qquad f_c = \frac{K(M+m)}{a^2}\mu\,.\,\frac{r}{a}\,;$$

poi cerchiamo i loro valori massimi e minimi. Essendo in corrispondenza $r = a \pm \varrho$, si trova

$$f_s = \frac{KM\mu}{a^2}(1 \pm 2c) \quad , \quad f_c = \frac{K(M+m)}{a^2}\mu(1 \pm c)\,.$$

Perciò, quando T è in opposizione, si ha

$$f_s - f_c = -\frac{KN\mu}{a^2} \cdot 3c - \frac{KM\mu}{a^2}(1+c);$$

e quando è in congiunzione

$$f_s - f_c = \frac{KM\mu}{a^2} 3c - \frac{KM\mu}{a^2}(1-c).$$

Questi sono i limiti d'intensità fra cui varia la forza $f_s - f_c$ [1]. Occorre farsi un'idea della grandezza di c, in alcuni dei casi che offre la natura. Si trova, per esempio,

$c = 1 : 5000$ circa per il V Sat. di Giove;
$c = 1 : 100$ " " " VI " " "
$c = 3 : 100$ " " l'VIII " " "
$c = 3 : 200$ " " Febo " " Saturno
$c = 1 : 5000$ " " Mima " " "
$c = 1 : 4460$ " " il IV di Urano
$c = 1 : 12000$ " " " Sat. di Nettuno.

Questo basta per mostrare che in parecchi casi la forza $\frac{KM\mu}{a^2} \cdot 3c$ è una piccola frazione, e talvolta anche piccolissima, dell'attrazione esercitata dal Sole sul satellite situato alla distanza del pianeta; e che $Km\mu(1 \pm c) : a^2$ è pur essa assai piccola, essendo paragonabile alla forza con cui il pianeta attirerebbe il satellite, se questo fosse situato da quello ad una distanza uguale a quella del Sole. È lecito dunque in certi casi e per certi fini ritenere $f_s - f_c$ trascurabile rispetto all'attrazione del pianeta.

Al contrario, la forza di Coriolis è bene spesso considerevole. Si ha

$$2\mu\omega v = 2\mu \frac{K(M+m)}{a^2} \frac{\omega_1}{\omega} \frac{\varrho}{a} = \frac{K\mu(M+m)}{a^2} 2c \cdot \frac{T}{T_1},$$

essendo T e T_1 i periodi di rivoluzione del pianeta e del satellite. Ora $T : T_1$ è in massima piuttosto grande; per esempio, 19,5, 2358 10.000, per alcuni dei satelliti indicati di sopra; è dunque vero l'asserto.

Dalle cose dette segue chiaramente che pei fini qui dichiarati possiamo ridurre il problema a quello del moto in un piano d'un punto materiale sollecitato dalla forza newtoniana emanante da un centro fisso e dall'accennata forza di *Coriolis*; problema relativamente facile, analogo a quello del moto d'un elettrone intorno ad un centro atomico e in un campo magnetico costante.

[1] Vicino alle quadrature è addirittura nulla.

Per esso valgono gl' integrali dell'energia e delle aree rispetto a certi assi; dai quali, passando alle coordinate polari, si può ricavare una relazione del tipo

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{f(\varrho)} \,,$$

dove l'equazione $f(\varrho) = 0$, del 4° grado, ha sempre due radici reali. Ciò dimostra che ogni traiettoria si sviluppa entro una corona circolare. Se le radici sono molto vicine, l'orbita sarà a spire quasi circolari. I caratteri differenziali delle orbite dirette e retrograde di questo tipo coincideranno quasi totalmente con quelle spettanti alle orbite esattamente circolari.

Conviene dunque studiare anzitutto quest'ultima. Sarà fatto in un'altra Nota.

Matematica. — *Sui sistemi* E *nel calcolo differenziale assoluto.* Nota di JOSEPH LIPKA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel cap. I, § 3, della loro esposizione fondamentale dei metodi del calcolo differenziale assoluto [1], i sigg. Ricci e Levi-Civita hanno studiato certi sistemi covarianti o controvarianti, chiamati sistemi E, i quali hanno proprietà molto notevoli e sono spesso utili nel calcolo. Lo scopo di questa Nota è di dimostrare un'altra interessante proprietà di questi sistemi, esprimendo le loro relazioni con certi determinanti elementari, ed indicando altresì un'applicazione semplice di questo risultato.

Si definisce un sistema E nella maniera seguente: Sia a il determinante dei coefficienti della forma fondamentale

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \,. \tag{1}$$

Allora, si chiama E il sistema covariante di ordine n, i cui elementi $\varepsilon_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ sono uguali a *zero*, se gl' indici $r_1, r_2, \ldots, r_n$ non sono tutti differenti, e uguali a $\sqrt{a}$ o $-\sqrt{a}$, gl'indici essendo tutti differenti, secondo che la classe della permutazione $(r_1, r_2 \ldots, r_n)$ è pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \ldots, n)$.

Si chiama *sistema controvariante* E il sistema reciproco definito, al solito da

$$\varepsilon^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1, s_2, \ldots, s_n} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_n s_n)} \varepsilon_{s_1, s_2, \ldots, s_n} \,, \tag{2}$$

[1] G. Ricci et T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* [Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), pp. 125-201].

di cui, gli elementi $\varepsilon^{(r_1, r_2, \dots, r_n)}$ sono uguali a *zero* o $\pm 1 : \sqrt{a}$, sotto le stesse condizioni come per gli elementi $\varepsilon_{r_1, r_2, \dots, r_n}$.

Dimostriamo la identità seguente:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{1}^{n} {}_{t_{m+1} t_{m+2} \dots t_n} \varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_m t_{m+1} \dots t_n} \varepsilon^{(s_1, s_2, \dots s_m t_{m+1} \dots t_n)} = (n-m)! \, \Delta ,$$

dove

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \delta_{r_1 s_1} & \delta_{r_1 s_2} & \dots & \delta_{r_1 s_m} \\ \delta_{r_2 s_1} & \delta_{r_2 s_2} & \dots & \delta_{r_2 s_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{r_m s_1} & \delta_{r_m s_2} & \dots & \delta_{r_m s_m} \end{vmatrix}$$

e, al solito,

$$(4) \qquad \delta_{r_i s_k} = 0 , \quad \text{se} \quad r_i \neq s_k , \quad \text{e} \quad \delta_{r_i s_k} = 1 , \quad \text{se} \quad r_i = s_k .$$

Se le r (o le s) non sono tutte differenti, allora, il primo membro della (I) sarà zero, in base alla definizione del sistema E, e il secondo membro della stessa equazione sarà zero, poichè Δ avrà due o più colonne (o righe) uguali. Dunque, non si ha bisogno di considerare che il caso in cui le r e le s sono tutte differenti.

È comodo di usare le abbreviazioni

$$(r) \equiv (r_1 , r_2 , \dots , r_m) \quad , \quad (s) \equiv (s_1 , s_2 , \dots , s_m) ,$$

e si dice che $(r) \equiv (s)$ o $(r) \not\equiv (s)$ secondo che $r_1 , r_2 , \dots , r_m$ e $s_1 , s_2 , \dots s_m$ sono due permutazioni o no della stessa serie di m numeri scelti dalla serie degli n numeri $1 , 2 , \dots , n$.

Nello sviluppo del primo membro della (I), si hanno n^{n-m} termini della forma

$$(5) \qquad \varepsilon_{(r) u_1 u_2 \dots u_{n-m}} \varepsilon^{((s) u_1 , u_2 \dots , u_{n-m})} \quad (u_k = 1 , 2 , \dots , n) ;$$

di questi, i termini nei quali le u non sono tutte differenti, sono zero, sicchè rimangono da considerare i termini nei quali le u sono tutte differenti. Distinguiamo due casi:

1° $(r) \not\equiv (s)$. Ogni termine (5) ha almeno una r od una s uguale a qualcuna delle u, di modo che, per definizione del sistema E, ogni termine del primo membro della (I) è zero. Inoltre, almeno una r, per es. r_i, non è uguale a nessuna s, sicchè, nel secondo membro della (I), da (4), $\delta_{r_i s_k} = 0$ $(k = 1 , 2 , \dots , m)$, e quindi $\Delta = 0$.

2° $(r) \equiv (s)$. I termini (5) nei quali qualche u è uguale a qualche r (o s) sono zero; i termini nei quali tutti le u sono differenti da tutte le r (o le s) sono in numero di $(n-m)!$, tali essendo tutte le permutazioni possibili delle u. Ora, se la classe della permutazione $(r_1 , r_2 , \dots , r_m)$ e

quella di $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ sono tutte e due pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \ldots, n)$, ogni termine è uguale a $+1$, ma se una classe è pari e l'altra è dispari, ogni termine è uguale a -1. Dunque, il primo membro della (I) è uguale a $\pm(n-m)!$. Inoltre, nel secondo membro della (I), le r e le s sono aggruppate in tutte le coppie possibili, e, poichè (r) e (s) sono due permutazioni della stessa serie di n numeri, ve ne sono soltanto m coppie nelle quali i numeri della coppia sono uguali: in questa serie di m coppie, ogni r ed ogni s si presentano soltanto una volta, di modo che in Δ, tutte le δ sono zero salvo una in ogni riga ed in ogni colonna, e queste δ sono uguali a 1. Per conseguenza il solo termine nello sviluppo del determinante Δ che non è zero, consta del prodotto di queste δ, e quindi Δ ha il valore $+1$ o -1, secondo (da un teorema elementare sui determinanti) le classi delle permutazioni $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ e $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ sono le stesse od opposte rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \ldots, m)$. Dunque, il secondo membro della (I) ha il valore $\pm(n-m)!$ come il primo membro, coincidendo anche i segni.

Abbiamo così dimostrato la nostra identità (I).

Se $m = 0$ o $m = 1$, si hanno i casi particolari:

$$\sum_{1}^{n}{}_{t_1, t_2, \ldots, t_n} \varepsilon_{t_1, t_2, \ldots, t_n} \varepsilon^{(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = n!, \tag{6}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{t_2, t_3, \ldots, t_n} \varepsilon_{r_1, t_2, \ldots, t_n} \varepsilon^{(s_1, t_2, \ldots, t_n)} = (n-1)!\, \delta_{r_1 s_1} \tag{7}$$

Diamo un'applicazione interessante dell'identità (I) stabilendo una relazione fra i coefficienti della forma fondamentale φ e il sistema E.

Consideriamo il sistema covariante

$$b_{ij} = \sum_{1}^{n}{}_{r_1, r_2, \ldots r_{n-1}\, s_1, s_2 \ldots, s_{n-1}} \varepsilon_{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\, i}\, \varepsilon_{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\, j}\; a^{(r_1 s_1)}\, a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_{n-1} s_{n-1})}.$$

Moltiplicando i due membri per $a^{(kj)}$ e sommando, rispetto a j, si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{j}\, a^{(kj)} b_{ij} = \sum_{1}^{n}{}_{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}} \varepsilon_{r_1, r_2 \ldots, r_{n-1}\, i} \left(\sum_{1}^{n}{}_{s_1, s_2, \ldots s_{n-1}\, j} a^{(r_1 s_1)} \ldots a^{(r_{n-1} s_{n-1})}\, a^{(kj)}\, \varepsilon_{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\, j}\right) =$$
$$= \sum_{1}^{n}{}_{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}} \varepsilon_{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\, i}\, \varepsilon^{(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} k)},$$

tenuto conto della (2). Ove si applichi la (7) al secondo membro, risulta

$$\sum_{1}^{n}{}_{j}\, a^{(kj)} b_{ij} = (n-1)!\, \delta_{ik}.$$

Moltiplicando per a_{kl} e sommando rispetto a k, si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_j\, b_{ij}\left(\sum_{1}^{n}{}_k\, a^{(kj)}\, a_{kl}\right) = (n-1)!\sum_{1}^{n}{}_k\, \delta_{ik}\, a_{kl},$$

e da (4),

$$b_{il} = (n-1)!\, a_{il}.$$

Perciò,

$$(8)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{r_1 \dots r_{n-1}\, s_1 \dots s_{n-1}}\, \varepsilon_{r_1 \dots r_{n-1}\, i}\; \varepsilon_{s_1 \dots s_{n-1}\, j}\; a^{(r_1 s_1)}\, a^{(r_2 s_2)} \dots a^{(r_{n-1} s_{n-1})} = (n-1)!\, a_{ij}.$$

Analogamente, si ricava la relazione reciproca

$$(9)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{r_1 \dots r_{n-1}\, s_1 \dots s_{n-1}}\, \varepsilon^{(r_1 \dots r_{n-1}\, i)}\; \varepsilon^{s_1 \dots s_{n-1}\, j)}\; a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \dots a_{r_{n-1} s_{n-1}} = (n-1)!\, a^{(ij)}.$$

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale.* Nota V di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. G. BAGNERA.

7. Ora dobbiamo far vedere come si calcolano le costanti h.

Definiamo le funzioni $N_n(x, s)$, $P_n(x, s)$, $q_n(x)$. Esse sono state definite per $n = 1$ ed $n = 2$; porremo in generale

$$N_n(x, s) = N_{n-1}(x, x) + \int_s^x \frac{\partial N_{n-1}(x, t)}{\partial x}\, dt,$$

$$P_n(x, s) = \alpha^{n-1} g'(x) + \alpha P_{n-1}(x, \alpha x) + \int_s^{\alpha x} \frac{\partial P_{n-1}(x, t)}{\partial x}\, dt,$$

$$q_n(x) = P_n(x, 0) + N_n(x, 0).$$

In altre parole: $N_n(x, s)$, $P_n(x, s)$, $q_n(x)$ sono formate per mezzo di $N_{n-1}(x, s)$, $P_{n-1}(x, s)$, $\alpha^{n-1} g(x)$, come $N_1(x, s)$, $P_1(x, s)$, $q_1(x)$ lo sono per mezzo di $N(x, s)$, $P(x, s)$, $g(x)$.

La (4) ci dà

$$(15)\qquad u^{(n)}(x) = \lambda\left[\alpha^n g(x)\, u^{(n)}(\alpha x) + \int_0^x N_n(x, s)\, u^{(n)}(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P_n(x, s)\, u^{(n)}(s)\, ds + \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\, q_{r+1}^{(n-r-1)}(x)\right] + f^{(n)}(x).$$

Se denotiamo con $u_{n,i}(x)$ $(i=1,2,\dots,n+1)$ la soluzione dell'equazione

$$u_{n,i}(x)=\lambda\left[\alpha^n g(x)\, u_{n,i}(\alpha x)+\int_0^x \mathrm{N}_n(x,s)\, u_{n,i}(s)\, ds+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\alpha x}\mathrm{P}_n(x,s)\, u_{n,i}(s)\, ds\right]+l_{n,i}(x),$$

dove poniamo

$$l_{n,i}(x)=\begin{cases} f^{(n)}(x) & i=1 \\ q_{i-1}^{(n-i+1)}(x) & i\geq 2, \end{cases}$$

la (15) ci dà

$$u^{(n)}(x)=u_{n,1}(x)+\lambda\sum_{r=0}^{n-1}u^{(r)}(0)\, u_{n,r+2}(x),$$

e di qui

$$(16)\quad u(x)=\frac{1}{(n-1)!}\left\{\int_0^x (x-\xi)^{n-1}\, u_{n,1}(\xi)\, d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{n-1}u^{(r)}(0)\left[\frac{x^r}{r!}+\lambda\int_0^x (x-\xi)^{n-1}\, u_{n,r+2}(\xi)\, d\xi\right]\right\}.$$

Già abbiamo calcolati $u(0)$ ed $u'(0)$; dopo avere calcolati $u(0), u'(0), \dots u^{(n-2)}(0)$, possiamo calcolare $u^{(n-1)}(0)$ dalla (15) mettendo $n-1$ al posto di n, e facendo poi $x=0$ Si trova così

$$u^{(n-1)}(0)=\frac{f^{(n-1)}(0)+\lambda\sum_{r=0}^{n-2}u^{(r)}(0)\, q_{r+1}^{(n-r-2)}(0)}{1-\lambda\alpha^{n-1}g(0)},$$

e perciò

$$u^{(n-1)}(0)=\frac{\sum_{r=0}^{n-1}\mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda)\, f^{(r)}(0)}{\prod_{r=0}^{n-1}[1-\lambda\alpha^r g(0)]},$$

dove le $\mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda)$ sono polinomî in λ di grado $\leq n-1$ che si calcolano con formole di ricorrenza, facili a stabilirsi. In particolare si ha

$$\mathrm{P}_{n-1,n-1}(\lambda)=\prod_{r=0}^{n-2}[1-\lambda\alpha^r g(0)].$$

I coefficienti dei polinomî $\mathrm{P}_{n-1}(\lambda)$ sono polinomî in $g(0)$ e $q_i^{(r)}(0)$ con $i+r\leq n-1$.

Dalla (16) ricaviamo

$$\varphi_{n-1}(x)=x^{n-1}+(n-1)!\,\lambda_{n-1}\int_0^x (x-\xi)^{n-1}\, u_{n,n+1}(\xi)|_{n-1}\, d\xi$$

intendendo con $u_{n,n+1}(\xi)|_{n-1}$ che in $u_{n,n+1}(\xi)$, la quale dipende anche da λ, bisogna porre $\lambda=\lambda_{n-1}$.

Dalla (16) ricaviamo ancora

$$h_{n-1} = \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\sum_{r=0}^{n-1} P_{n-1,r}(\lambda_{n-1}) f^{(r)}(0)}{\prod_{r=1}^{n-1} (\alpha^r - 1)} .$$

La condizione

$$\sum_{r=0}^{n-1} P_{n-1,r}(\lambda_{n-1}) f^{(r)}(0) = 0 ,$$

imposta alla $f(x)$, è necessaria e sufficiente perchè la (4) ammetta soluzione finita per $\lambda = \lambda_{n-1}$.

Soddisfatta tale condizione, la più generale soluzione della (4) si ottiene aggiungendo ad una particolare soluzione, per esempio alla seguente

$$\frac{1}{(n-1)!} \left\{ \int_0^x (x-\xi)^{n-1} \left[u_{n,1}(\xi) + \lambda \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\, u_{n,r+2}(\xi) \right] d\xi + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u^{(r)}(0)}{r!} x^r \right\} \Bigg|_{n-1} ,$$

$c\varphi_{n-1}(x)$, con c costante arbitraria.

8. Abbiamo così trovato che la soluzione della (4), dotata di derivate di qualunque ordine, si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{v(x\,;\lambda)}{D(\lambda)} ,$$

dove $D(\lambda)$ è la seguente funzione intera di λ

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 - \lambda \alpha^n g(0)]$$

e $v(x\,;\lambda)$ per ogni x in $(0\,, a)$ è una funzione intera di λ di cui diamo qui l'espressione.

$D(\lambda)$, soddisfacendo all'equazione funzionale

$$D(\lambda) = [1 - \lambda\, g(0)]\, D(\alpha\lambda)$$

e prendendo il valore 1 per $\lambda = 0$, si sviluppa nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)\, \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \lambda^n ;$$

$v(x\,;\lambda)$ soddisfa all'equazione

$$v(x\,;\lambda) = \lambda \left[g(x)\, v(\alpha x\,;\lambda) + \int_0^x N(x\,,s)\, v(s\,;\lambda)\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} P(x\,,s)\, v(s\,;\lambda)\, ds \right] + D(\lambda)\, f(x) ;$$

quindi, ponendo

$$v(x;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n v_n(x),$$

le $v_n(x)$ si ottengono con la seguente formola di ricorrenza

$$v_n(x)=\mathrm{S}[v_{n-1}(x)]+\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{g^n(0)}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}f(x).$$

9. Quanto abbiamo esposto vale nell'ipotesi che sia $g(0)\neq 0$. Se $g(0)=0$, la soluzione $u(x)$ della (4) è una funzione intera di λ ed è precisamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n f_n(x)$ introdotta al n. 2.

Osserviamo finalmente che quanto abbiamo esposto si estende alla equazione

$$u(x)=\lambda\left[g(x)\,u(\varphi(x))+\int_0^x \mathrm{N}(x,s)\,u(s)\,ds+\int_0^{\varphi(x)}\mathrm{P}(x,s)\,u(s)\,ds\right]+f(x)$$

facendo opportune ipotesi sulla funzione $\varphi(x)$.

Fisica terrestre. — *La temperatura delle lave incandescenti dell'Etna.* Nota di Giovanni Platania, presentata dal Corrispondente A. Bemporad.

In una Nota precedente su questo argomento [1] diedi conto dei risultati che ottenni adoperando un pirometro a radiazione di Féry per determinare la temperatura superficiale di un braccio di lava fluente, sul finire dell'eruzione etnea del 1911.

In un'altra escursione al cratere centrale dello stesso vulcano, nel 1918, ebbi l'occasione di misurare la temperatura nell'interno di una piccola colata di lava incandescente, per mezzo di un pirometro termo-elettrico che potei immergere nella colata medesima.

Per l'interesse presentato da questo genere di misure per lo studio fisico dei vulcani, dò conto in questa Nota delle circostanze in cui potei compiere questa determinazione e del risultato ottenuto.

La mattina del 1° luglio 1918 — in compagnia dei miei allievi signori Amato Francesco e Galici Pietro, licenziati macchinisti navali dell'Istituto Nautico di Catania e del sig. Alfio Barbagallo, custode dell'Osservatorio Etneo — dopo aver superata la scarpata orientale del cono centrale, attraversammo il grande ammasso di focacce scoriacee, che formò la pseudo-colata del 24 giugno 1917, avviandoci verso l'apparecchio eruttivo sorto nella grande voragine del 1911, a N del cratere centrale. Non potendo raggiungere i crateri attivi, per la loro cresciuta attività esplosiva e per il vento

[1] Rend. R. Acc. Lincei (5) XXI, 1912.

persistente di NW, per cui i proiettili eruttivi venivano lanciati contro di noi, ci avviammo sulle colate recenti, ormai ferme ma caldissime ancora nelle anfrattuosità, attraversandone verso E un buon tratto, circa 300 m.

Raggiungemmo infine un braccio secondario di lava incandescente in moto, a circa 200 m. dal margine destro di un'altra corrente lavica anch'essa ferma, a 400 m. dal ramo principale.

In vicinanza del fronte di questo braccio secondario scegliemmo un posto favorevole sopravvento rispetto alla colata, e preparammo ivi gli apparecchi.

La corrente lavica, spessa da 1 a 2 m. e larga, in quel punto, circa 4 m., si avanzava molto lentamente, con una velocità stimata da 6 a 7 m. ogni ora. La superficie della lava era ricoperta di scorie che avevano grandezza non molto diversa l'una dall'altra, di circa 15 cm. di diametro, e negli interstizii fra queste scorie si vedeva, pur di giorno, la lava incandescente; la quale non era peraltro molto fluida, e appariva, non col noto aspetto di lava pastosa, ma come fosse granulare.

Adoperai un pirometro termo-elettrico (Pt e Pt.Rd) costruito dalla casa Hartmann e Braun, la cui resistenza era di circa 1,6 ohm a temperatura ordinaria, e poteva servire per temperature da 300 a 1600°; il millivoltometro della stessa casa, n. 280325, poteva misurare in corrispondenza forze elettromotrici da 2,30 a 17,09 millivolta (resist. int. 465 ohm).

Il pirometro, protetto da un tubo di ferro trafilato, terminato a cono, venne immerso obliquamente nella lava fluente per circa 30 cm. a mezzo metro dalla sponda sinistra della colata, a circa 2 m. dell'estremità frontale.

La lunga sbarra di ferro, inchiavardata all'estremità aperta del tubo di ferro, venne appoggiata a un masso di lava fredda, sì da impedire che il pirometro fosse trascinato dalla lava in moto. Durante la misura, la pressione sul punto di appoggio produsse l'incurvamento della sbarra suddetta.

Due dei miei compagni (Amato e Barbagallo) badavano che il pirometro rimanesse a posto; Galici teneva di occhio il millivoltometro, posto al riparo dall'irradiazione della lava.

L'indice di questo si andò spostando lentamente, finchè dopo 15 minuti, rimase perfettamente stazionario, indicando una f. e. m. di 8,52 millivolta, mentre il termometro da me aggiunto all'estremità fredda del pirometro, circondato da ovatta, indicava stabilmente 46°.

Da verifiche eseguite nell'Istituto Fisico della R. Università di Catania [1] risulta che questa f. e. m. corrisponde alla temperatura di 927° quando la temperatura t della saldatura fredda è 0°. Applicando la correzione per t compreso fra 0° e 30°, data da $x = 0{,}5\,t$ con la precisione del 5 per mille, e avendo altresì verificato che per $t = 46°$ la correzione è ancora

[1] Il pirometro mi fu gentilmente affidato dal compianto prof. G. P. Grimaldi, allora direttore del detto Istituto, e le verifiche furono eseguite per cortesia dell'attuale direttore, prof. E. Drago, con l'aiuto di lui stesso e di tutto il personale del Laboratorio.

applicabile con precisione sufficiente per questo genere di misure, si ottiene 950° come temperatura interna di quel braccio di lava fluente, nelle condizioni indicate.

Le misure della temperatura della lava incandescente eseguite, con adatti strumenti, sull'Etna sono state: quelle del prof. Adolfo Bartoli (1892) col metodo calorimetrico; del prof. E. Oddone (1910) con un pirometro fotometrico ad assorbimento; dello scrivente (1911) per mezzo di un pirometro a radiazione di Féry. Dei risultati di queste misure diedi relazione nella Nota precedente.

Inoltre l'ing. F. A. Perret, servendosi di un pirometro del tipo di Barus (Pt e Pt, Ir) di W. H. Bristol, della *Bristol Company* di Waterbury (Connecticut) eseguì, anche nel 1910, delle misure sulle lave etnee, i cui risultati ancora inediti, mi furono comunicati da lui stesso. Egli riuscì a misurare la temperatura all'estremità frontale di una colata, a circa 8 km. dalla sorgente. La velocità in quel sito era di 1 m. al minuto, lo spessore della colata di 5 m. Distaccatosi, per il movimento della colata, un grande masso che mostrava una viva incandescenza all'interno, egli potè introdurre in questo il pirometro suddetto, e trovò da 900° a 1000° secondo che l'estremità del pirometro veniva immersa a profondità minore o maggiore. Ritiene perciò sicura una temperatura di almeno 1000° nell'interno di questa colata.

È opportuno notare che il pirometro di Bristol adoperato dal Perret [che egli mi prestò gentilmente per alcune mie ricerche nel cratere dell'isola di Vulcano [1]] è molto più pronto di quello di cui mi sono servito in questa misura. E così egli potè anche eseguire delle misure del progressivo raffreddamento di un masso di lava etnea, nel 1910, ottenendo un decremento regolare, senza soste, al contrario di ciò che egli aveva osservato al Kilauea [2].

Col pirometro da me adoperato, protetto da un tubo di porcellana e da un grosso tubo di ferro, non era possibile misurare le rapide variazioni di temperatura. Ma la misura eseguita immergendo il pirometro nella stessa lava fluente e mettendosi al riparo dalle cause di errore dà garanzia del risultato ottenuto. Se il valore della temperatura non raggiunse 1000° si pensi che il braccio di lava su cui la misura fu eseguita era una diramazione e che la lava non era molto fluida ma presentava un aspetto granuloso.

Lo studio dei fenomeni termici nei processi vulcanici interessa sommamente gli studiosi di fisica terrestre. Occorre perciò superare le difficoltà che si presentano in queste determinazioni. Per l'esplorazione termica di una colata di lava si prestano meglio i pirometri termo-elettrici, particolarmente quelli più pronti.

(1) Boll. Soc. Sism. Ital., XXIII (1920-21)

(2) *The American Journal of Science*, XXXVI, pag. 482.

Geofisica. — *L'influenza del monte Etna sulle correnti superiori.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Corrisp. Luigi Palazzo.

In un recente lavoro H. Hildebrandsson [1] esaminò i movimenti generali dell'atmosfera quali risultano dalle osservazioni fin'ora raccolte con i diversi metodi di indagine, e senza discutere i fenomeni speciali come cicloni, anticicloni, monsoni, dedusse come nelle zone temperate dominano le correnti di W; e ad alta quota esse divergono verso NW formando il controaliseo boreale che va ad alimentare il massimo tropicale. La costanza di tali venti è più rilevante quanto maggiore è l'altitudine considerata.

Le osservazioni di alta montagna hanno portato un grande contributo a tali ricerche anemologiche, e specialmente le osservazioni regolari sulla direzione dei pennacchi di fumo che talora appaiono alla cima dei vulcani, ben possono segnalare i caratteri delle correnti superiori se il vulcano considerato si erge a grande altezza. A tali condizioni corrisponde il vulcano Etna, alto m. 3200 sul mare, e il compianto prof. Riccò basandosi sulle osservazioni eseguite a Catania [2] col seguire il fumo del vulcano, che raramente manca, dedusse che il movimento dell'aria sull'Etna è tale come se sopra 100 osservazioni si avesse trovato 60 volte spirante un vento unico coll'azimut 320^0 cioè circa corrispondente alla direzione NW.

Le osservazioni dei cirri condotte a Catania per alcuni anni, hanno confermato la prevalenza dei venti di NW ad alta quota.

Dal maggio 1912 all'aprile 1913 e dal gennaio 1915 al luglio 1915 a Catania vennero eseguite a 8^h lanci di pallone pilota per conto del R. Servizio Aerologico; dall'esame di siffatti lanci possiamo ricavare elementi valevoli per seguire la variazione del vento predominante alle diverse quote. Abbiamo limitato il nostro esame a quei lanci in cui si raggiunse almeno la quota di 3000 metri, e ciò all'intento di avere dati più comparabili tra di loro per le diverse quote, ed abbiamo limitato l'altezza alla quota 4500 m., raggiunta dal maggior numero dei lanci considerati e che risultarono 29 in inverno, 29 in primavera, 17 in estate e 37 in autunno.

[1] Hildebrandsson H. H., *Résultats des recherches empiriques sur les mouvements généraux de l'atmosphère.* Nova Acta Regiae, Soc. Scient. Upsaliensis, ser. IV, vol. 5, n. 1. Upsala, 1918.

[2] Riccò A. e Saija G. *Meteorologia dell'Etna.* Annali del R. Ufficio Centrale di Meteorologia, vol. 17, Roma 1896

Nella figura seguente indichiamo la direzione del vento predominante alle diverse quote nelle quattro stagioni meteorologiche intese come aggruppamenti di 3 mesi a cominciare da dicembre. E da essa risulta come da 2400 m. a 4500 m. predomina la direzione NW e la più decisa costanza di tale direzione, in tutte le stagioni, appena da 3300 a 4500 m. Nella zona compresa tra 1200 e 2100 m. vi è frequenza di vàrie direzioni a seconda della stagione con prevalenza delle correnti del 1° quadrante specialmente da 1800 a 2100 m.; e a quote inferiori ai 1200 m. vi predomi-

metri	Inver.	Prim.	Est.	Aut.
suolo	↘	↖	↖	←
300	→	←	↖	←
600	→	←	←	←
900	→	←	←	←
1200	↘	↖	→	→
1500	→	↘	→	↘
1800	↙	↙	↙	↘
2100	↙	↙	↘	↘
2400	↙	↘	↘	↘
2700	↙	↘	↘	↓
3000	↓	↘	↘	↘
3300	↘	↘	↘	↘
3600	↘	↘	↘	↘
3900	↘	↘	↘	↘
4200	↘	↓	↘	↘
4500	↘	↓	↘	↘

Fig. 1.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
suolo	302°.49′	132°.58′	135°.48′	32°.28′
300	277.18	110.22	111.48	50.12
600	275.21	100.07	91.28	82.39
900	282.48	155.13	110.33	98.08
1200	309.48	260.32	45.0	309.48
1500	247.45	318.22	325.0	300.15
1800	326.41	0.0	323 26	305.13
2100	338.11	356.03	327.50	331.56
2400	354.48	334.34	327.06	338.09
2700	325.18	315.39	317.12	346.13
3000	325.00	324.35	307.08	331.29
3300	318.14	324.07	311.32	332.59
3600	307.28	332.09	317.13	335,18
3900	303.41	317.50	319.24	335.49
4100	318.11	326.18	315.28	328.37
4500	304.59	330.47	323.47	321.29

nano venti di levante. Trascriviamo qui appresso l'angolo, contato da nord verso est che la direzione del vento medio fa col meridiano. Da essa deduciamo come in inverno prevalgono venti del 4° quadrante, e dopo subìta una lieve deviazione verso W, nelle prime quote, da 1800 m. in su prevale la direzione NW. In primavera si hanno direzioni del 2° quadrante fino a 900 m., subentrano indi venti del 3° quadrante e a cominciare dalla quota 1500 m. prevalgono venti del 4° quadrante con direzione NW. In estate fino a 900 m. predominano venti del 2° quadrante; a 1200 appaiono venti del 1° quadrante e da 1500 m. decisivamente prevalgono venti del 4° quadrante con direzione di NW. In autunno fino a 900 m. prevalgono le correnti del 1° quadrante e poi si afferma con assoluto dominio la direzione di NW.

Rimane così confermata negli alti strati la frequenza dei venti di NW che il Riccò aveva dedotto dalla direzione del fumo dell'Etna e che risultava a me dalla direzione predominante dei cirri a Catania. E il predominio della corrente di NW a cominciare di 1500 m. o 1800 m. a seconda della stagione, mostra ancora come il monte Etna non provoca alcuna modificazione sul cammino del contro aliseo boreale.

Dalle predette osservazioni aerologiche abbiano dedotto la velocità del vento alle diverse quote scalate di 150 m. e di essa diamo la rappresentazione grafica nella figura 2ª. Appare distinto come fino all'altitudine di 1800 m. l'aumento della velocità con l'altezza si manifesta con i medesimi caratteri nelle diverse stagioni; e dopo tale quota l'aumento della velocità

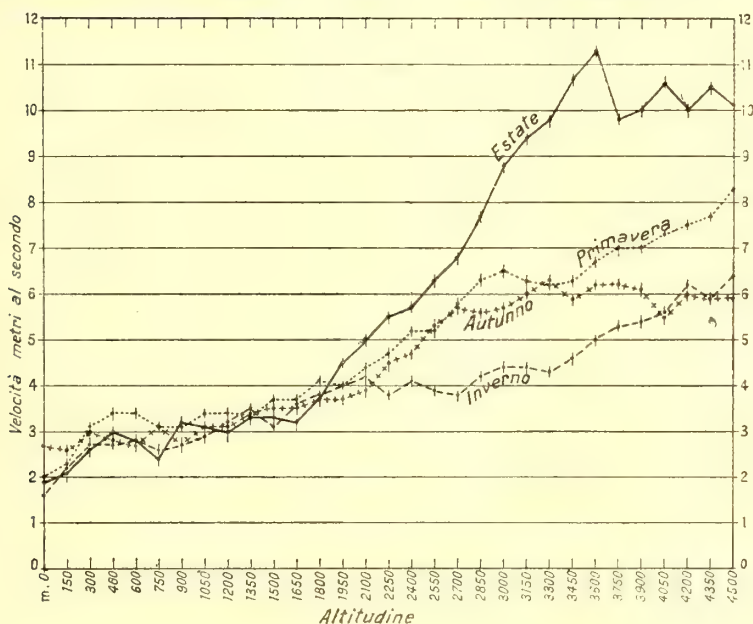



FIG. 2.

si presenta con maggiore entità mostrandosi più rilevante in estate e meno in inverno. Oltrepassata la quota di 3600 m., eccetto la primavera, sembra prevalere una diminuzione di velocità che si presenta più chiaramente in estate.

L'andamento dei predetti dati, escludendo quelli a quota inferiore ai 300 m., perchè perturbati dal suolo, può rappresentarsi con la formula:

$$\log V = a - C \log H ,$$

e alle due costanti spettano i seguenti valori per le stagioni:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
a	1.84	2.19	3,45	2.27
b	0.37	0.45	0.82	0.49

Dagli studi condotti sulle osservazioni delle nubi e sulle osservazioni ricavate dai palloni piloti in diverse locatità dell'Europa e delle Americhe [1] è risultato che la velocità media del vento ad ogni quota è più rilevante in inverno e meno in estate; e, salvo inversioni o stazionarietà variabili a seconda la posizione della stazione di lancio rispetto alla circolazione atmosferica, la variazione della velocità con l'altitudine si rileva con graduale aumento. L'esame dei dati da noi ottenuti ci porta alle medesime conclusioni relativamente alla variazione della velocità con l'altitudine, ma contrariamente a quanto si conosce, la serie dei dati di Catania, conduce a valori della velocità più alti in estate invece dell'inverno.

Se teniamo conto della direzione dei venti osservati in detti lanci, sembra che il forte aumento della velocità del vento con l'altitudine nella regione etnea sia legato alla rotazione della direzione del vento. E difatti il minimo aumento di velocità corrisponde alla stagione invernale ove i venti sono costantemente della direzione di NW; in autunno ove la rotazione del vento è minima, vi è un più sensibile incremento della velocità; in primavera e in estate le rotazioni della direzione del vento appaiono molto distinte, e in corrispondenza si hanno forti incrementi della velocità con l'aumentare dell'altitudine. La maggiore prevalenza degli incrementi estivi rispetto ai primaverili potrebbe attribuirsi al maggiore riscaldamento in detta stagione del massiccio dell'Etna che provocherebbe una più rapida diminuzione della densità dell'aria con l'altitudine e a cui corrisponderebbero, secondo la conclusione a cui pervenne Egnell [2] sull'esame delle nubi, velocità inversamente proporzionali alle densità. E tale minore densità in estate viene anche provocata dalla diminuzione ragguardevole del vapore acqueo negli alti strati dell'Etna che corrisponde alla nota legge dell'Hann $e_h = e_0 - 10 \frac{h}{6500}$ e che quindi non è affatto influenzata dalle emanazioni del vulcano.

[1] Hildebrandsson H. H. *Étude préliminaire sur les vitesses du vent et les témpératures dans l'air libre à des hauteurs différents,* Geografiska Annalen, 1920, H. 2, Upsats 1920. Chapman E. H. *The variation of wind velocity with height.* Meteorological Office, Professional Notes N. 6, London 1919. Shaw N. *Manual of Meteorology,* Part. IV, *The relation of the wind to the distribution of barometric pressure,* Cambridge 1919.

[2] Egnell A. *Sur la variation de la vitesse moyenne du vent dans la verticale,* Comptes Rendus, 1903, Paris.

Radiotelegrafia. — *Metodo per il confronto di frequenze radiotelegrafiche* [1]. Nota del dott. Ugo Grassi, presentata dal Socio M. O. Corbino.

Una corrente periodica di bassa frequenza può analizzarsi col tubo di Braun, osservando, dentro uno specchio girante, la macchia del fascio catodico la cui direzione sia controllata da una bobina percorsa dalla corrente in esame. Ma, passando a frequenze radiotelegrafiche, il metodo urta contro difficoltà che sembrano difficilmente superabili.

Disponendo di una corrente sinusoidale di periodo eguale a quello in esame, si può ricorrere al metodo delle figure di Lissajou, dalle quali si può risalire alla curva periodica oggetto di studio.

Ma si avrebbe lo stesso risultato se, trattandosi di funzioni rigorosamente periodiche, la corrente ausiliaria avesse una frequenza esattamente doppia, tripla, multipla di quella dell'altra. In tal caso la figura descritta dalla macchia catodica diventa una curva chiusa che possiede tanti massimi quanto è l'ordine di molteplicità della frequenza di una corrente rispetto a quella dell'altra.

A causa della elevata frequenza delle oscillazioni radiotelegrafiche, si poteva dubitare della possibilità di immobilizzare la curva in maniera bastante per la sua osservazione. Ma, effettivamente, le bobine incrociate percorse da correnti di frequenza variabile intorno a 100.000, dànno una macchia rettangolare di tinta uniforme, la quale si risolve in curve semplici e chiuse quando una frequenza è multipla dell'altra; e ciò in maniera così stabile da poterne fare comodamente la fotografia in $^1/_2$ posa. (Vedi diagrammi).

I diagrammi sono stati ottenuti con correnti fornite da due circuiti oscillanti regolati da tubi a vuoto a tre elettrodi ed indipendenti l'uno dall'altro. L'aggiustamento delle caratteristiche dei circuiti deve naturalmente essere fatto con straordinaria finezza. Basta (ed in ciò sta appunto il pregio del metodo) una variazione anche minima, ad es. della capacità di uno dei circuiti, per provocare una rapida rotazione della curva in un senso o nell'altro, ed in seguito la sua definitiva dissoluzione.

La sensibilità del metodo è superiore a quella stessa del metodo dei battimenti con il quale è evidentemente in parentela.

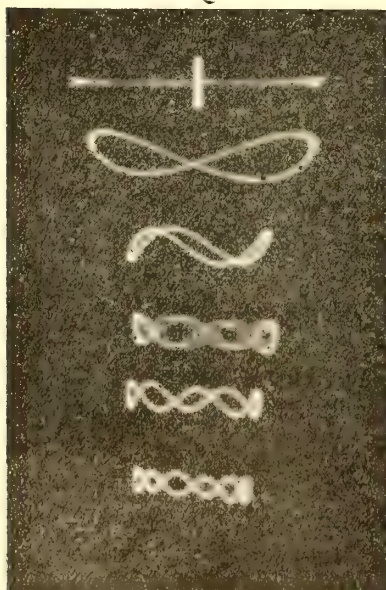
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto radiotelegrafico del Genio militare.

Certamente non è facile immobilizzare la immagine sullo schermo per lungo tempo, nel caso di molteplicità elevate, ma è facilissimo immobilizzarla quanto basta per la sua osservazione soggettiva anche nel caso di molteplicità compresa tra 20 e 30.

Oggetto della presente Nota è di proporre l'impiego del metodo di osservazione suesposto, per i due scopi seguenti per i quali non credo sia stato finora proposto.

I°) Poichè, passando da 4000 oscillazioni al secondo a 100.000 al secondo, si passa da frequenze musicali a radiotelegrafiche, è possibile costruire un circuito oscillante con una frequenza radiotelegrafica rigorosamente conosciuta variando le sue caratteristiche, finchè non compaia sullo schermo del tubo di Braun la figura corrispondente alla molteplicità della sua frequenza, rispetto ad un circuito oscillante fisso, avente la frequenza corrispondente ad una nota musicale conosciuta. La realizzazione di questo dispositivo non offre difficoltà, ed è intenzione dell'Istituto Radiotelegrafico del Genio Militare, di servirsene per ottenere un'onda normale da impiegarsi nella taratura degli ondametri.

II°) Si è già detto che il metodo è forse superiore per sensibilità a quella dei battimenti. Basta che lo sperimentatore, situato ad un metro o più di distanza, sposti, ad esempio, la sua mano, perchè la figura di molteplicità, già stabilizzata, si dissolva immediatamente.

Ciò suggerisce l'impiego del dispositivo sperimentale sopra accennato, per la determinazione, ad esempio, col metodo di sostituzione, di piccolissime capacità.

0 — Coordinate: la orizzontale corrisponde alla frequenza 75.000; la verticale a frequenze multiple.

1 — Comparazione di una oscillazione di frequenza uguale a 75.000, con una di frequenza doppia.

2 — Con una di frequenza tripla.

3 — Con una di frequenza quadrupla.

4 — Con una di frequenza quintupla.

5 — Con una di frequenza sestupla.

Chimica. — *Sopra i cosidetti piranidroni* [1]. Nota del dottor C. Gastaldi, presentata dal Corrispondente F. Zambonini.

W. Schneider e W. Mayer [2] hanno trovato che condensando l'anisolo con l'anidride acetica in presenza di acido solfoacetico (acido acetosolfonico) risulta il solfoacetato di 4-metil-2,6-p-dianisilpirilio. Generalizzando, essi hanno stabilito che la miscela « anidride acetica-acido solfoacetico » si comporta coi chetoni del tipo $Ar.CO.CH_3$ come la miscela « anidride acetica-cloruro ferrico sublimato » impiegata da Dilthey [3] per ottenere i sali di 4-metil-2,6-diarilpirilio.

Il processo sintetico, dagli autori sopracitati, è intepretrato nel seguente modo:

I $\quad CH_3O.C_6H_5 \longrightarrow CH_3O.C_6H_4.CO.CH_3$

II

$$CH_3O.C_6H_4.\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CO}} \quad + HX \quad \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CO}}.C_6H_4.OCH_3$$

$$\begin{array}{c} O \\ \| \\ C—OH \\ \\ CH_3 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} X \\ | \\ O \\ CH_3O.C_6H_4—C \diagup \quad \diagdown C.C_6H_4OCH_3 \\ HC \diagdown \quad \diagup CH \\ C \\ \cdot \\ CH_3 \end{array}$$

Inoltre essi hanno trovato che i sali di 4-metil-2,6-diarilpirilio trattati cogli idrossidi dei metalli alcalini o con un eccesso di acetato sodico dànno origine a delle sostanze bleu-violette incristallizzabili. Queste sostanze per la loro composizione si debbono considerare risultanti dalla eliminazione

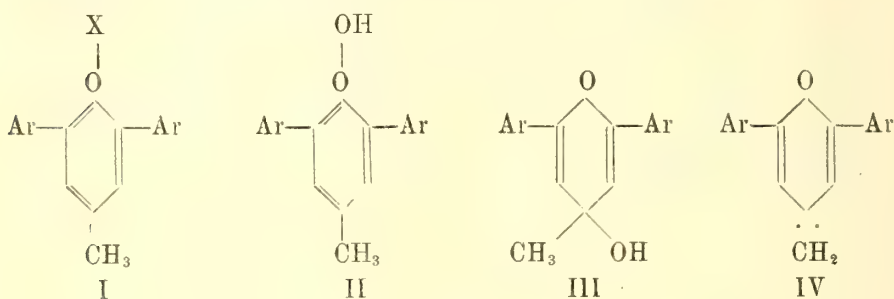
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Torino.

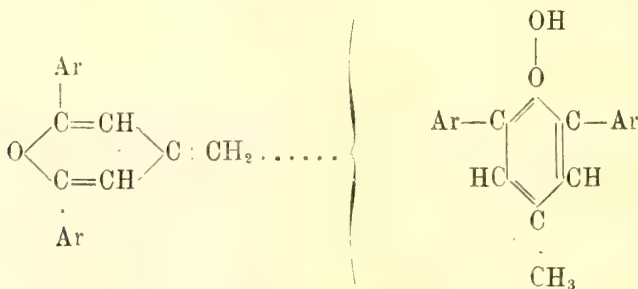
[2] B. 54, 1484 (1921).

[3] J. pr. 94,72 (1916).

di una molecola d'acqua da due molecole della base ossonica e rispettivamente dalla pseudobase, il piranolo. Per la loro dissociabilità, per il loro comportamento verso i solventi organici specialmente riguardo alla temperatura, le sostanze bleu-violette devono ritenersi dei prodotti di addizione analoghi ai chinidroni, e perciò si possono considerare come piranidroni della serie del pirano.

Per azione degli idrossidi alcalini o dell'acetato sodico in eccesso sui sali di 4-metil-2,6-diarilpirilio risulterebbe dapprima la base ossonica, la quale subirebbe le seguenti trasformazioni:

X — O — Ar, Ar — CH_3 (I); OH — O — Ar, Ar — CH_3 (II); O — Ar, Ar — CH_3, OH (III); O — Ar, Ar — CH_2 (IV)

Le sostanze bleu-violette, i cosidetti piranidroni, risulterebbero da una molecola di un γ-metilenpirano IV che allo stato nascente si unirebbe con una molecola della base ossonica II

$$O\langle{}^{C(Ar)=CH}_{C(Ar)=CH}\rangle C : CH_2 \ldots\ldots \quad HO-O\langle{}^{C(Ar)=CH}_{C(Ar)=CH}\rangle C-CH_3$$

Queste idee, qui succintamente riportate, sono contenute in una prima Nota di Schneider [1] sui cosidetti piranidroni. In una seconda Nota [2], lo stesso Autore si occupa specialmente dei composti i quali risultano per azioni delle basi organiche, quali l'anilina e la fenilidrazina, sui sali di 4-metil-2,6-diarilpirilio.

Di queste reazioni a me interessa mettere in evidenza quella che avviene con la fenilidrazina per la quale secondo Schneider risulterebbero i sali di N-fenilamino-4-metil-2,6-diarilpiridinio.

(1) Loc. cit.
(2) B. 54, 2285 (1921).

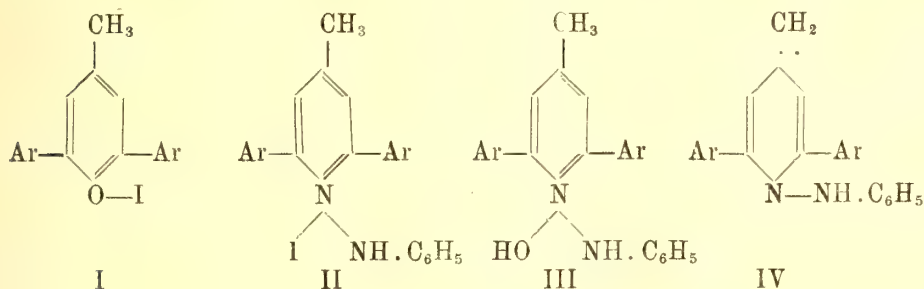
Questi sali di basi quaternarie, trattati con gli idrossidi dei metalli alcalini, dànno origine a delle base terziarie IV, intensamente colorate in bleu-scuro, le quali si formerebbero secondo gli schemi:

CH_3 CH_3 CH_3 CH_2

Ar— —Ar Ar— —Ar Ar— —Ar Ar— —Ar

O—I N N N—NH . C_6H_5

I NH . C_6H_5 HO NH . C_6H_5

I II III IV

W. Schneider svolge questi concetti fondandosi *sulla premessa errata che dalla condensazione dei chetoni del tipo* Ar . CO . CH_3 *con l'anidride acetica risultino i sali di 4-metil-2,6-diarilpirilio*. Invece, come io ho già dimostrato in un'altra Nota, *condensando l'acetofenone con l'anidride acetica risulta il sale di 2-metil-4,6 difenilpirilio*, quindi il gruppo metilico non si trova legato all'atomo di carbonio in γ rispetto all'etero-atomo, ma all'atomo di carbonio in posizione α. La condensazione dei chetoni del tipo Ar . CO . CH_3 con l'anidride acetica nelle condizioni di esperienza di Dilthey e di Schneider, non avviene secondo il processo sintetico indicato da quest'ultimo Autore, ma bensì, come io ho dimostrato, nel seguente modo:

$$2\,C_6H_5 . CO . CH_3 \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>C{=}CH . CO . C_6H_5$$

C_6H_5

C

HC CH$_2$ H + CO . CH_3

C_6H_5—CO O + HX

CO . CH_3

↓

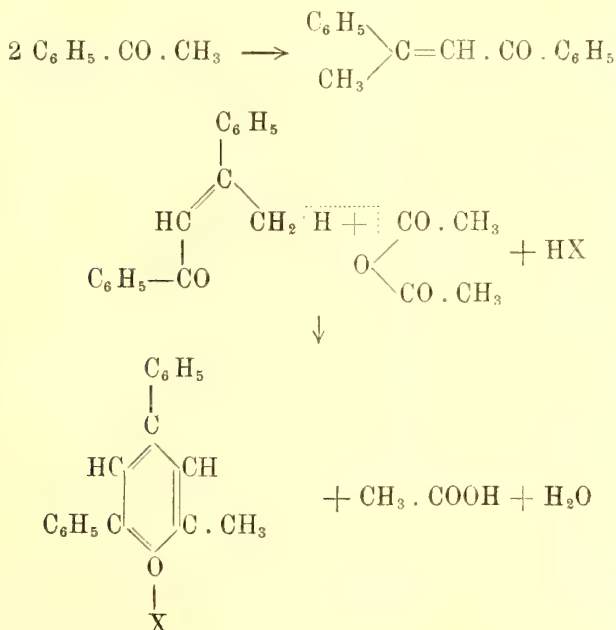
C_6H_5

C

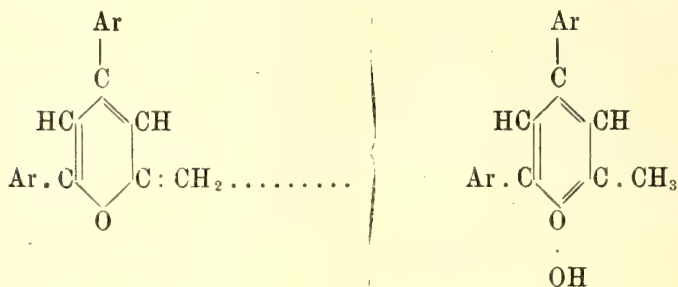
HC CH

C_6H_5 C C . CH_3 + CH_3 . COOH + H_2O

O

X

Questa formula di struttura dei sali di pirilio, seguendo il concetto di Schneider sulla natura di composti dimolecolari delle sostanze bleu-violette, porterebbe alla formula

Ar
C
HC CH
Ar . C C : CH_2 . . . .
O

Ar
C
HC CH
Ar . C C . CH_3
O
OH

cioè di un piranidrone, analogo a un chinidrone di un o-chinone. Spetta ora all'Autore citato di dire, se così modificata ritiene di poter ancora mantenere la sua ipotesi sulla natura delle sostanze bleu-violette.

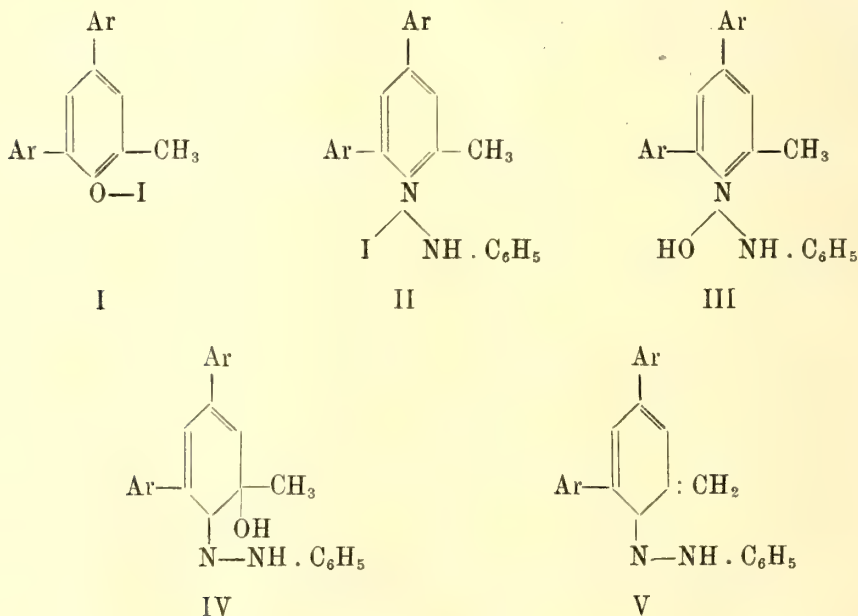
La nuova formula di struttura dei sali di 2-metil-4,6-diarilpirilio permette di dare una migliore interpretazione alla reazione per la quale da detti sali con la fenilidrazina si originerebbero gli N-fenilamino-derivati della 2-metilen-4,6 diaril-1,2-diidropiridina V

Ar
Ar— —CH_3
O—I
I

Ar
Ar— —CH_3
N
I NH . C_6H_5
II

Ar
Ar— —CH_3
N
HO NH . C_6H_5
III

Ar
Ar— —CH_3
OH
N—NH . C_6H_5
IV

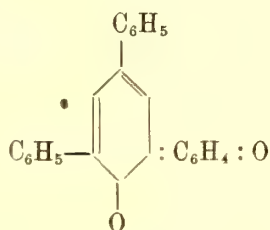
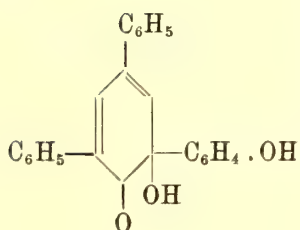
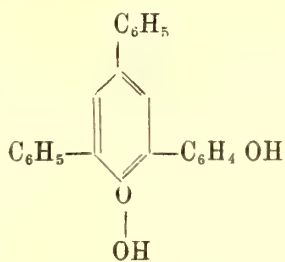
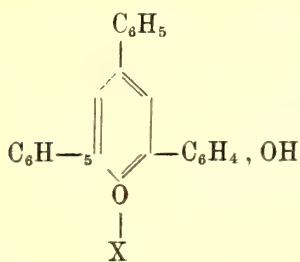
Ar
Ar— : CH_2
N—NH . C_6H_5
V

perchè la reazione così interpretata trova una perfetta analogia col comportamento del sale di 2-p-idrossifenil-4,6-difenilpirilio e di altri sali di

pirilio strutturalmente analoghi studiati da Dilthey [1]

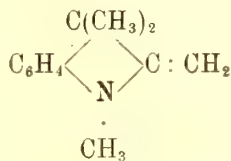
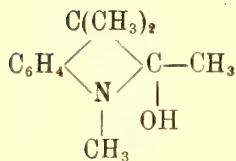
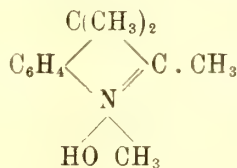
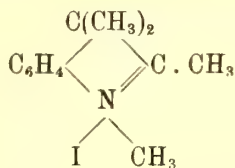
$$C_6H_5 \text{ (4)},\ C_6H_5 \text{ (2)},\ -C_6H_4\,.\,OH \text{ (6)},\ O-X$$

$$C_6H_5 \text{ (4)},\ C_6H_5 \text{ (2)},\ -C_6H_4\,OH \text{ (6)},\ O-OH$$

$$C_6H_5 \text{ (4)},\ C_6H_5 \text{ (2)},\ -C_6H_4\,.\,OH,\ OH \text{ (6)},\ O$$

$$C_6H_5 \text{ (4)},\ C_6H_5 \text{ (2)},\ :C_6H_4:O \text{ (6)},\ O$$

e con quello dei sali quaternari della N-metil-trimetilindolenina [2]

$$C_6H_4\langle C(CH_3)_2,\ N(I)(CH_3) \rangle C\,.\,CH_3 \qquad C_6H_4\langle C(CH_3)_2,\ N(HO)(CH_3) \rangle C\,.\,CH_3$$

$$C_6H_4\langle C(CH_3)_2,\ N(CH_3) \rangle C(OH)-CH_3 \qquad C_6H_4\langle C(CH_3)_2,\ N(CH_3) \rangle C:CH_2$$

(1) B. 52, 1195 (1919).
(2) B. 37, 4227 (1904).

Geologia. — *Il conglomerato di Como.* Nota II di EMILIO REPOSSI, presentata dal Socio ARTINI.

Il conglomerato mostra una variazione di composizione abbastanza netta in senso verticale, e questo, s'intende, indipendentemente dalle alternanze di arenarie e di puddinghe alle quali si è già accennato. A tal proposito mi sembra, per esempio, degno di rilievo il fatto che il *serizzo ghiandone*, scarsissimo o mancante del tutto nella più bassa parte della formazione, diventa abbondante e caratteristico qualche centinaio di metri più in su. I ciottoli eocenici, che abbiamo or ora ricordati, sono invece concentrati quasi esclusivamente nei banchi inferiori del conglomerato

Una variazione di composizione si rileva anche in senso orizzontale, e non solo a grandi linee (ciò che sarebbe abbastanza ovvio) ma anche a piccoli intervalli di distanza. Così, ad esempio, nel tratto collinesco che sta tra Camerlata e S. Fermo, proprio dinanzi allo sbocco della vallata del ramo comasco del Lario, mancano in modo quasi assoluto gli elementi calcarei. Quando si pensi che fin oltre Menaggio, ossia per una trentina di chilometri, tale vallata è incisa entro calcari e dolomie secondarî, fa meraviglia la enorme scarsità di simili rocce in un conglomerato interamente costituito da elementi cristallini provenienti dalla più alta parte della valle stessa.

Ma se noi ci portiamo appena qualche centinaio di metri ad est di Camerlata o qualche decina di metri ad ovest di S. Fermo, troviamo qua e là nel conglomerato sciami di ciottoli di calcari liasici, e ciottoli calcarei o dolomitici del trias, che rappresentano la fascia secondaria prealpina, pur mantenendosi, forse solo apparentemente, più scarsi di quanto ci si potrebbe a bella prima attendere.

Come pure caratteristico è il contrasto tra la composizione del conglomerato comense, quasi interamente costituito da elementi cristallini, e quella della breccia eocenica di Montorfano, esclusivamente formata, come la puddinga cretacea di Sirone, da elementi (calcari e selci) del secondario locale.

Queste considerazioni mi sembrano di qualche interesse quando si vogliano cavare deduzioni in riguardo alle questioni generali accennate sin da principio ed al modo stesso di formazione del conglomerato, ch'è certo un curioso problema, come provano le lunghe discussioni che si son fatte intorno ad esso.

Ma, sempre a questo proposito, mi parve pure opportuno tener conto non solo della composizione, dirò così, qualitativa del conglomerato, ma anche della sua composizione quantitativa.

Fu già detto da molti che il conglomerato comense consta almeno per nove decimi, di elementi cristallini e che questi sono molto varî: ci troviamo dunque davanti a un tipico conglomerato poligenico, giustamente associato al classico *Nagelfluh* poligenico della Svizzera. E questa è pura verità.

Ma tale affermazione generica lascia in ombra alcuni fatti degni di nota. Così, ad esempio, è utile constatare che nel tratto Como-Malnate una roccia forse prevale su tutte le altre indistintamente: e questa è la *tonalite* che nella Nota I abbiamo ricordato. Certo è che il conglomerato in taluni punti è formato, almeno per tre quarti, da tale roccia e che questa non manca mai a nessun livello ed in nessun punto della formazione, neppure al suo estremo occidentale; e di essa constano in prevalenza i grossi e problematici blocchi accennati più indietro. Il serizzo ghiandone, pur esso qualche volta abbondantissimo, e la stessa congerie di rocce gneissiche e scistoso-cristalline, varie e di significato meno caratteristico, che ordinariamente predomina, la cedono spesso in diffusione di fronte alla tonalite.

Questo fatto mi pare sia da porsi tra i più salienti per quanto riguarda la composizione del conglomerato, e mette in maggiore rilievo la relativa singolarità della roccia stessa, che, anche dal semplice punto di vista petrografico, offre qualche interesse. Essa infatti, che in tutta l'estensione della formazione mostra una mirabile costanza di aspetto ed una fisonomia affatto caratteristica, non trova riscontro sicuro in nessuna roccia oggi ampiamente affiorante nel tratto della regione alpina che va dalla Valsesia alla bassa Valtellina, mentre, come già dissi, ha una perfetta somiglianza con la tonalite del gruppo Adamello-Tonale.

La sola roccia che si possa in qualche modo paragonare alla nostra è la diorite che ho chiamato del M. Bassetta, che, come è noto, forma una lunga striscia che si stende dalla bassa Valtellina fin sotto Bellinzona, e può considerarsi come una *facies* periferica del massiccio granitico di Val Masino. Ma questa roccia, che, data la opportuna estensione del suo affioramento, potrebbe spiegare bene la presenza e l'abbondanza di ciottoli tonalitici in tutti i punti della formazione conglomeratica, presenta, nella parte ch'è tuttora conservata, una notevole differenza d'aspetto e di composizione con la nostra tonalite, e non sembra identificabile con questa.

Mentre invece è perfettamente identico con la nota roccia di Val Masino il serizzo ghiandone che abbonda allato alla tonalite nel conglomerato comense. Questa concomitanza m'induce anzi a supporre che l'origine della tonalite stessa sia da ricercarsi in qualcuna delle masse di tale roccia che son venute rintracciandosi nelle vicinanze del massiccio di Val Masino e che probabilmente rappresentano gli ultimi rimasugli di una più grande massa, in molta parte distrutta dall'erosione. Se così non fosse, non vedrei ragione perchè la concomitanza serizzo-tonalite non dovesse ripetersi anche nei depositi morenici.

Il caso è dunque interessante; tanto più che sembra ripetersi per altre rocce del conglomerato, il cui luogo d'origine pare debba ricercarsi nell'alta Engadina.

Ma tutti questi quesiti saranno esposti e discussi ampiamente in seguito, insieme cogli stessi particolari strutturali e tectonici della nostra formazione, già noti nelle linee generali.

Non posso però chiudere questi brevi cenni preventivi sul nostro studio senza esprimere il dubbio che possa esser mantenuto immutato il riferimento cronologico del conglomerato comense, attribuito ora al tongriano per le somiglianze sue con le formazioni oligoceniche piemontesi e per il rinvenimento in esso di un frammento osseo di tragulide di tale età. Parecchi dei fatti osservati mi indurrebbero ad un sensibile ringiovanimento di tutta la formazione.

Ma la questione è delicata e andrà trattata con molta prudenza, perchè essa è importantissima nel determinare la portata generale dei risultati del nostro studio, per la quale, come ognun vede, è necessario che l'età del conglomerato comense sia accertata nel modo più sicuro possibile.

Zoologia. — *Lo stomaco della larva di Anopheles claviger* Fabr. *e la dualità delle cellule mesointestinali degli Insetti* (¹). Nota I preliminare del dott. Enrico Federici, presentata dal Socio B. Grassi.

Negli anni 1920-21, ho eseguito una serie di ricerche istologiche sull'*Anopheles claviger* Fabr. (sin. *maculipennis* Meig.), rivolgendo particolare attenzione allo studio del canale digerente larvale e delle sue appendici. Credo opportuno riassumere i risultati ottenuti su questo argomento e anticiparne la pubblicazione, perchè essi mi sembrano costituire un contributo alla soluzione, tuttora controversa, di un interessante problema di entomologia generale (²).

È noto che, fino a pochi anni or sono, per consenso della maggior parte degli autori, si è ritenuto che le cellule dello stomaco degli Insetti siano (morfologicamente e fisiologicamente) di una sola specie, cioè che abbiano la medesima origine e che ad ogni elemento competano le medesime fun-

(¹) Lavoro compiuto nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

(²) Con animo riconoscente, ringrazio il prof. B. Grassi (che ha diretto e agevolato le presenti ricerche), il prof. C. Artom (cui debbo varie indicazioni tecniche) e la professoressa Anna Foà (che ha riletto il mio lavoro, opportunamente consigliandomi di indagare la struttura del canale digerente col metodo delle « colorazioni vitali »).

zioni (capacità di secernere i succhi digestivi, capacità di assorbire i materiali digeriti). Gli aspetti e le forme, talvolta diversissimi, descritti nelle cellule intestinali di una stessa specie e di uno stesso individuo, sono stati (dai sostenitori dell'unicità morfologica e della bipolarità funzionale di questi elementi) attribuiti alla diversità delle fasi o stadii di esistenza individuale, in cui le singole cellule potevano eventualmente trovarsi. Secondo questa concezione, le basi strutturali del processo digestivo-assimilatorio, sarebbero, negli Insetti, profondamente diverse da quelle proprie di tutti gli altri Invertebrati e Vertebrati a digestione extracellulare (cioè non fagocitaria), inquantochè questi ultimi posseggono sempre cellule o complessi di cellule, morfologicamente diversi e distinguibili, gli uni dei quali sono adibiti alla secrezione dei fermenti digestivi e gli altri all'assorbimento dei materiali digeriti.

Questa singolare eccezione ha fatto sì che non siano mancati gli avversarii dell'ipotesi unitaria, sia fra gli entomologi a noi meno vicini [1], sia fra quelli recenti e recentissimi. Tra gli ultimi merita particolar menzione il Deegener [2], il quale (in seguito a minute ricerche sul processo della secrezione intestinale nella larva di *Deilephila euphorbiae* L. e in *Macrodytes* [*Dytiscus*] *circumcinctus*) ha affermato che, almeno in certe specie di Insetti, l'epitelio mesointestinale è costituito « aus zwei morphologisch und « physiologisch unzweifelhaft verschiedenen Zellarten, zwischen welchen Ueber- « gänge nicht existieren » [3]. I caratteri differenziali fra queste due sorta di cellule sono stati da me schematicamente riuniti nella seguente tabella:

V'è un rabdorio più o meno distinto.	Non v'è un rabdorio distinto.
Sono elementi secernenti, ma anche capaci di assorbire, almeno negli intervalli tra due fasi di secrezione.	Sono elementi esclusivamente secernenti.
Il secreto assume la forma di sferule, ognuna circondata da una distinta pellicola e con un contenuto jalino o granuloso. Tali sferule passano attraverso il rabdorio (non essendovi un'apertura vera e propria per il loro passaggio) e, prima di sciogliersi, mantengono per un certo tempo la loro individualità anche nel lume intestinale.	Il secreto non assume mai la forma di sferule, ma è diffuso e acidofilo. Esso passa all'esterno attraverso un'apertura, (che esiste spesso, ma non sempre) della superficie cellulare, e non improvvisamente, ma gradualmente.

[1] Questi sono menzionati in Henneguy L. F., *Les Insectes* (*morphologie, reproduction, embryogénie*), Paris 1904; e in Berlese A., *Gli Insetti, loro organizzazione, sviluppo* ecc., vol. I, Milano 1909, pag. 741 e sgg.

[2] Deegener P., *Beiträge zur Kenntnis der Darmsekretion, I. Teil*: *Deilephila euphorbiae L.* (Arch. f. Naturgesch., 75, Jahrg., Bd. I, 1909); *II. Teil*: *Macrodytes* (*Dytiscus*) *circumcinctus* (Ibid., 76, Jahrg., Bd. I, 1910).

[3] Lo stesso Deegener ha riassunto e generalizzato le sue vedute nell'« *Handbuch der Entomologie* », herausg. v. Chr. Schröder, Bd. I, S. 273 u. ff., Jena 1913.

Il nucleo occupa una posizione variabile, ma generalmente si trova nella metà apicale della cellula.	Al principio del processo secretorio, il nucleo si trova basalmente; a mano a mano che l'intensità della secrezione aumenta, esso si sposta verso la superficie, giungendo fino a metà della cellula.
Il secreto non occupa mai la massima parte della cavità cellulare.	Il secreto, nelle fasi più intense del processo di sua formazione, scaccia quasi tutto il plasma, che rimane solo sotto forma di minuti e sottilissimi setti.
Sono state osservate in moltissimi Insetti; la loro presenza sembra costante e la loro diffusione generale.	Sono state messe in evidenza soltanto in larve di Lepidotteri, in *Cetonia aurata*, in *Gryllotalpa*, in Efemeridi ed Escnidi.
Denominazioni: Zylinderzellen (Frenzel), Sphaerocyten (Deegener).	Denominazioni: Becherzellen (Leydig, List), Schleimzellen (Auct.), Calycocyten (Deegener).

Per contro, lo Steudel (¹), che ha seguìto le fasi del processo digestivo in varie specie di Insetti è giunto a conclusioni affatto opposte, affermando che « das wichtigste Ergebnis [seiner Untersuchungen] ist die Doppelfunktion « (Absorption und Sekretion) der aktiven Darmepithelzellen, die in zwei « Stadien anzutreffen sind, im Absorptionsstadium (von verschiedenen Au- « toren auch Rukestadium genannt) und im Sekretionsstadium. Zwischen « beiden können Uebergänge beobachtet werden » (*loc. cit.*, p. 217 (²).

Un nuovo contributo alla soluzione del complicato problema ha portato recentemente la Foà (³), con lo studio dell'epitelio mesointestinale del baco da seta. Da varii anni era noto (grazie alle ricerche del Nazari e del Verson) che le cellule dell'intestino medio dei bachi sani si presentano sotto due aspetti, pressochè regolarmente alternati, l'uno cilindrico o a clava, l'altro caliciforme; ora la Foà ha notato che, nei bachi malati da flaccidezza, le cellule caliciformi sono ridotte, alterate o quasi completamente scomparse, mentre le altre si conservano, più o meno bene. La spiegazione di questo fatto presenta gravi difficoltà, se si ammette (come si vorrebbe dai più) che le cellule caliciformi e le cilindriche siano fasi diverse di elementi morfologicamente simili, ed è invece molto facilitata, se si ammette trattarsi di due sorta di formazioni, morfologicamente differenti. L'autrice ha adottato quest'ultima ipotesi, dopo aver constatato: *a*) che negli embrioni maturi (in cui l'intestino non ha ancora funzionato) e nei bachi appena nati

(¹) Steudel A., *Absorption und Sekretion im Darm der Insekten*. Zool. Jahrb. Abt. f. allg. Zool. u. Physiol. d. Tiere, Bd. XXXIII, 1913, pp. 165-224

(²) È opportuno avvertire che, in realtà, tra le ricerche dello Steudel e quelle del Deegener, non esiste quella aperta e stridente contraddizione, che sembra esservi a prima vista, inquantochè le specie di Insetti adoperate dai due Autori sono diverse e sistematicamente molto lontane.

(³) Foà A., *L'epitelio dell'intestino medio nel baco da seta sano e in quello malato di flaccidezza*. Rend. Ist. Bacol. Sc. Sup. di Agric. di Portici, vol III, 1918, pp. 41-69.

si possono già differenziare le due sorta di cellule; *b*) che nei varii stadii della digestione, cellule caliciformi e cellule cilindriche rimangono sempre distinte e non presentano forme di passaggio; *c*) che ambedue le sorta di cellule hanno funzione secernente e che, probabilmente, soltanto gli elementi cilindrici hanno funzione assorbente.

Tali essendo i dati essenziali, che attualmente possediamo, l'ipotesi della unicità degli elementi mesointestinali risulta inadeguata a dare una spiegazione di tutti i reperti finora noti e, per contro, l'ipotesi opposta non è ancora documentata con sufficiente ampiezza.

Vediamo ora se e quanto la conoscenza dello stomaco della larva anofelica possa contribuire alla soluzione del problema [1].

Lo stomaco della larva anofelica è la parte più appariscente e voluminosa del tubo digerente [2]: esso ha la forma di un lungo tubo cilindrico, ordinariamente riempito da una colonna di ingesti, che sono generalmente frammenti di alghe filamentose e detriti vegetali o di altra natura; procedendo dall'esterno all'interno, vi si possono identificare le seguenti formazioni, disposte concentricamente l'una intorno all'altra: *a*) la tunica connettivale, *b*) lo strato muscolare, *c*) la membrana basale, *d*) l'epitelio digerente, *e*) la membrana peritrofica.

Nella presente sommaria esposizione possiamo limitarci a considerare il solo epitelio digerente: questo presenta, a fresco, un colore debolmente giallastro, eccettuata la parte posteriore ove la tonalità del giallo è più intensa; con l'aiuto di questa diversità di colore, un occhio esercitato e pratico del materiale riesce a discernere, anche a fresco, una concomitante differenza istologica, che si può controllare poi, con grande evidenza, nei preparati di sezioni colorate. Osservando una sezione che interessi tutta la parete dello stomaco, in modo da metterci innanzi la faccia delle cellule opposta al lume intestinale (cioè rivolta verso la cavità del corpo) si vede la metà anteriore caratterizzata dalla presenza di grosse cellule, più o meno nettamente poligonali, con protoplasma che si colora in rosso-violaceo, piuttosto pallido. Tra queste cellule se ne intercalano altre, colorate più intensamente, più piccole, ovalari e con nucleo relativamente più grosso; infine, gruppetti di 2-3 piccoli nuclei, attorno a ciascuno dei quali non esiste una zona di plasma nettamente definito da un limite cellulare, sono disposti

[1] Questo è dichiarato attualmente « rimesso sul tappeto » anche dal Berlese, già autorevole sostenitore dell'ipotesi unitaria (v. A. Berlese, *Gli Insetti, loro organizzazione*, ecc., vol. II, Milano 1921, nota alle pp. 685-86).

[2] Sulle varie parti del tubo digerente, sugli organi emosteatici e sul sistema nervoso ho compiuto altre ricerche, la cui esposizione debbo riservare alla Memoria completa. Il lettore potrà acquistare una conoscenza sommaria dell'intestino della larva anofelica, consultando il lavoro di A. D. Imms (*On the larval and pupal stages of Anopheles maculipennis Meig. Part I. The larva.* Journ. of Hygiene, vol. VII, 1907, pp. 291-318).

irregolarmente (almeno in apparenza) fra queste due sorta di cellule (che, per ora, ci limiteremo a chiamare cellule grandi e cellule piccole); essi corrispondono verosimilmente a zone di rigenerazione dell'epitelio. Man mano che si procede verso la metà posteriore dello stomaco, le cellule grandi diminuiscono di numero e anche (ma non molto sensibilmente) di dimensioni, fino a che scompaiono verso la metà dello stomaco e sono sostituite totalmente dalle cellule piccole.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. Tricomi. *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto* (pres. dal Corrisp. Severi).

PERSONALE ACCADEMICO

Col più vivo dolore il Presidente Volterra partecipa all'Accademia la notizia della morte di uno dei Soci più anziani del nostro Sodalizio, il prof. Torquato Taramelli, che per oltre 40 anni fu professore di Geologia all'Università di Pavia. Era nato a Bergamo il 15 ottobre 1845 e faceva parte dell'Accademia dei Lincei dal 1879. L'Accademia gli conferì il premio Reale in Mineralogia e Geologia fino dal 1880 per i suoi studii sulla Geologia delle Provincie Venete. Fu questo anzi il primo dei premi Reali conferiti in questa disciplina. Le sue opere sono numerosissime; fra queste sono da citare quelle sul Friuli e gli studii geologici sulle nuove provincie acquisite all'Italia. Egli fu uomo mite, buono ed amatissimo dai Colleghi che ne piangono la perdita. Il Presidente propone e la classe approva che alla famiglia ed in particolare al collega Antonio Taramelli, figlio dell'illustre estinto, siano mandate profonde condoglianze. Alle parole di rimpianto pronunciate dal Presidente, si unisce cordialmente anche l'Accademico De Stefani.

In questa stessa ora, a Bologna, aggiunge il Presidente, la Università commemora solennemente un altro amato e compianto Socio, il sen. Giacomo Ciamician. Le più alte notabilità Italiane, a cominciare da S. M. il Re, associansi alla mesta e nobile cerimonia. La nostra Accademia vi è rappresentata dai nostri Soci e Corrispondenti presenti in Bologna. Ma non sono i soli Soci che si trovano in Bologna, che prendon parte a tali onoranze; siamo anche tutti noi presenti in ispirito a questa cerimonia.

Il Segretario Castelnuovo, a nome del Socio C. Segre, legge i seguenti cenni commemorativi del Socio straniero Carlo Teodoro Reye.

Alla vigilia della nostra entrata in guerra, io ricevevo una cartolina postale datata « *Strassburg Els.*, 18-5-15 », col visto della censura tedesca, così composta:

« *Lieber Freund und College, Bewahren Sie mir Ihre freundschaft-*
« *lichen Gesinnungen, wie ich die meinigen Ihnen bewahren werde, auch*
« *wenn Italien, wie ich fürchte, in den Weltkrieg hineingerissen wird.*
« *Herzlich grüsst Sie*

« *Ihr.* TH. REYE ».

Questo atto gentile, che m'aveva commosso, e che mostra la delicatezza di sentimento del nostro compianto Collega, mi si è riaffacciato alla mente quando, giorni sono, dalla Presidenza dell'Accademia ho avuto l'invito a commemorare Teodoro Reye. Ben volentieri dirò — sia pur brevemente — di Lui: che avevo cominciato ad ammirare fin da studente, leggendo la sua classica *Geometrie der Lage*; e col quale poi non avevo tardato ad entrare in relazione scientifica, ed anche personale, sì da poter apprezzare, oltre al valore del matematico, la grande bontà d'animo dell'uomo: vero gentiluomo!

Nato a Cuxhaven il 20 giugno 1838, addottoratosi nel 1861 a Gottinga, era passato verso il 1864 ad insegnare nel Politecnico di Zurigo, nel 1870 a quello di Aachen, e dal 1872 in poi nell'Università di Strasburgo. Quivi nel 1908 era stato collocato a riposo: ma non aveva smesso di lavorare; e l'ultimo suo lavoro porta la data di un mese prima della sua morte. Occupata Strasburgo dai Francesi, il Reye e la sua Signora venivano nel marzo 1919 espulsi da quella città, in cui avevan vissuto ben 47 anni, senza riguardo alla loro tarda età; ed andavano a rifugiarsi a Würzburg presso una loro figlia. E colà, poco dopo, il 2 luglio, Egli spirava (1).

Aveva esordito nella scienza con lavori di Fisica matematica e di Meteorologia. Ma, poichè a Zurigo il corso del Culmann, fondatore della Statica grafica, si basava sulle teorie della Geometria di posizione, e il classico trattato di Staudt era troppo difficile per gli studenti; Reye fu condotto ad insegnare quelle teorie e ad esporle in un nuovo trattato, che uscì in due parti nel 1866 e nel 1868, e che poi si è ristampato più volte, con sempre nuove modificazioni ed ampliamenti. In questo modo Egli veniva acquisito definitivamente alla Geometria pura, e si affermava in essa con un libro che è un capolavoro.

La *Geometrie der Lage* del Reye costituisce il naturale sviluppo del programma che Steiner nel 1832 aveva bandito colla *Systematische Ent-*

(1) Il medico ha riferito che Reye, nelle sue ultime ore, andava osservando sè stesso con interesse scientifico. Sentendosi preso da soffocazioni, domandava: « è questo adesso il rantolo della morte? ». — Così mi scriveva il prof. St. Jolles, che del Reye fu discepolo e amico, ed anche valente collaboratore nel preparare le ultime edizioni della *Geometrie der Lage*.

wickelung: svolgere le proprietà delle figure, generando queste per mezzo delle corrispondenze projettive tra forme geometriche fondamentali. Se l'opera dello Staudt del 1847 aveva un carattere di maggiore originalità, e, per certi riguardi, di una più grande perfezione; il libro del Reye, pur basandosi su quella, appare più didattico, più attraente, e più atto a dimostrare la grande fecondità del metodo inaugurato da Steiner. Le forme projettive di 1ª, di 2ª, di 3ª specie concorrono a generare coniche, quadriche (queste al modo di Seydewitz, con stelle reciproche), curve e superficie del 3º ordine, complessi di rette, e così via. Le diverse teorie si dispongono in un insieme armonico, imponente; esse tracciano veramente, come diceva W. Hankel, la « strada regia » delle Matematiche. — Sarebbe fuori luogo rilevare in questa occasione tutte le cose originali di quell'opera. Ricorderò solo che in essa per la prima volta è studiato l'importante complesso quadratico di rette, che fu poi chiamato *complesso di Reye*, o *complesso tetraedrale*, e che qui vien definito come il complesso delle rette congiungenti i punti omologhi di due spazi collineari [1]. Servendosi di esso, l'Autore riesce a fare una teoria sintetica dei fasci di quadriche, colle quartiche basi, ecc.

A questa pubblicazione tenne dietro una lunga serie di memorie, in alcune delle quali varî argomenti già nominati sono ulteriormente approfonditi; in altre vengono svolte nuove ricerche.

Sono di particolare interesse anzi tutto un gruppo di lavori pubblicati dal 1870 al 1875 nel Journal di Crelle. Chiamando n^{mo} *momento* di un sistema di masse rispetto ad un piano la somma dei prodotti di queste masse per le potenze n^{me} delle loro distanze da un piano, si vede subito che i piani il cui n^{mo} momento rispetto a un dato sistema è zero inviluppano una superficie algebrica di classe n. Ogni superficie algebrica si può ottenere in questo modo, da un conveniente numero di masse. Ciò porta a ricercare e a sfruttare le possibili rappresentazioni delle forme algebriche d'ordine n come somme di potenze n^{me}. Così per $n=2$ si hanno dei teoremi sui tetraedri, pentaedri, ed esaedri polari rispetto a quadriche: e qui Reye s'incontra colla *Géométrie de direction* di P. Serret (1869). Per $n=3$ si ottiene il pentaedro di Sylvester delle superficie cubiche: che viene ora costruito partendo dal nuovo concetto di *esaedri polari*, molto utile nella più recente teoria di quelle superficie, come poi fu messo in luce anche dal nostro Cremona. — Da queste considerazioni il Reye è stato condotto ad un'estensione della dottrina della polarità rispetto ad una superficie di classe n: una superficie d'ordine $k<n$ ha, rispetto a quella, per polare una superficie di classe $n-k$. Ne deriva il concetto di superficie *apolari*, e una teoria generale dell'*apolarità*, che ha la massima importanza nella moderna tratta-

[1] Subito dopo H. Müller dimostrava, seguendo l'indirizzo del Reye, che quel complesso si può anche definire direttamente dal tetraedro nel modo ben noto.

zione degl'invarianti, e che è merito speciale del Reye l'aver per primo avviata coi suoi lavori.

Un'altra serie notevole, più recente, di memorie è quella dedicata ai sistemi lineari di forme projettive. Indicando con a_{ik} delle forme lineari nelle coordinate di punto, l'equazione $\Sigma\lambda_i\mu_k a_{ik}=0$ rappresenta un piano: che descrive un fascio, una stella, uno spazio, se, tenute ferme le μ, si fan variare le λ, supposte in numero di 2, 3, 4; e questa forma geometrica varia poi projettivamente a sè stessa, se si mutano le μ. Così nasce il *sistema lineare di forme projettive*; e si vede che, scambiando l'ufficio ai due gruppi di parametri λ e μ, nasce un sistema lineare *coniugato* al precedente. Si può dire che primo F. Schur, in una bella memoria di geometria pura del 1881, aveva messo in luce, in alcuni casi notevoli, sistemi sì fatti di forme projettive: prendendo del resto le mosse dalla *Geometrie der Lage* di Reye. Ma questi ha poi trattato a fondo un grande numero di altri casi, determinando e studiando le diverse figure geometriche che così si posson generare.

Fra gli enti più interessanti della geometria moderna stanno le congruenze di rette del 2° ordine, la cui determinazione è dovuta a Kummer. Per quelle prive di linea singolare Reye ha scoperto due generazioni geometriche semplici ed eleganti. L'una è legata al complesso tetraedrale. Una congruenza di 2° ordine e di 6ª classe della 1ª specie di Kummer, od anche di 2° ordine e di classe <6, si può ottenere come composta delle rette in cui si tagliano le coppie di piani tangenti omologhi di due quadriche riferite collinearmente. — L'altra generazione si connette alle trasformazioni quadratiche multiple dello spazio, ripetutamente trattate dal Reye. Riferendo projettivamente un sistema lineare ∞^3 di quadriche di uno spazio Σ al sistema dei piani di uno spazio Σ_1, si ottiene una trasformazione puntuale, che ha in Σ una superficie doppia (Jacobiana) del 4° ordine, e in Σ_1 una superficie limite, o di diramazione, Φ, di 4ª classe e del 16° ordine. Ma l'ordine di Φ si abbassa di 2 unità ogni volta che il sistema triplo di quadriche acquisti un punto base. Alle rette di Σ passanti per un tal punto corrispondono in Σ_1 le rette di una congruenza di 2ª classe e del 7° ordine, avente Φ per superficie focale; oppure, se vi sono altri 1, 2, 3, 4, 5 punti base, le rette di una congruenza di 2ª classe e del 6° ordine (della 2ª specie nella classificazione di Kummer), o di ordine 5, 4, 3, 2.

Notevolissimo è il caso che il sistema di quadriche sia definito da 6 punti base scelti in modo generico. Si ha allora una trasformazione spaziale doppia, che dà come superficie limite la superficie di Kummer del 4° ordine e 4ª classe, e conduce nel modo più bello a tutte le proprietà dei 16 punti e piani singolari di questa superficie, e alle 6 congruenze quadratiche di cui essa è superficie focale. È questo uno dei più eleganti capitoli della moderna geometria sintetica. Esso è tutto dovuto al Reye, che ben a ragione lo ha poi introdotto nelle ultime edizioni del suo trattato.

Altri risultati di particolare interesse potrei ancora ricordare nella produzione scientifica del nostro Collega: ad esempio taluni sui complessi quadratici generali di rette, su una corrispondenza lineare che essi determinano fra quadriche-luoghi e quadriche inviluppi, ecc. Ma spero che i cenni precedenti bastino a caratterizzare la natura e il valore di quella produzione.

Artista non meno che scienziato, Reye ha molto contribuito a quella grandiosa e pure snella costruzione scientifica che è la Geometria di posizione, introducendo o svolgendo idee semplici e geniali; studiando, com'è carattere di essa, svariate figure in tal maniera da illuminarne di vivida luce le proprietà più profonde, e i legami che le uniscono. Non solo ci ha fatto conoscere nuovi veri; ma ci ha procurato squisiti godimenti estetici, quali solo può dare il bello. Onore e gratitutine a Lui!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Silvestri e Washington, dei professori Archibald e Pearl, e due Commemorazioni del Socio prof. V. Reina, dettate dall'ing. Cassinis.

Il Socio Foà fa omaggio di un capitolo, del vol. VIII del *Trattato di anatomia patologica* da lui diretto.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Volterra annuncia alla Classe che è presente S. E. il dott. Angelo Gallardo, Ministro della Repubblica Argentina in Italia; e dà il benvenuto, a nome dei Colleghi e suo, a questo chiaro scienziato ed eminente uomo politico, a questo antico e provato Amico dell'Italia. Il Presidente ricorda i numerosi ed importanti lavori scientifici del dott. Gallardo, professore nell'Università di Buenos Ayres, e l'attiva e proficua opera da lui spesa per l'istruzione pubblica nel proprio paese, dove le scuole ebbero da lui notevolissimo incremento. Il sen. Volterra spera che gli stretti vincoli anche culturali che legano l'Italia all'Argentina, si avvantaggeranno per la presenza fra noi del dott. Gallardo, presenza che l'Accademia saluta con la più schietta e viva simpatia.

Il dott. Gallardo ringrazia, commosso, per la bella manifestazione di simpatia e per l'onore che gli vien fatto; aggiunge che egli inizia adesso la propria carriera diplomatica, ma che non l'avrebbe iniziata se ciò non fosse

avvenuto in Italia. Aggiunge poi, applaudito dai presenti, che per lui la migliore politica è quella della sincerità e della giustizia, e la migliore diplomazia quella del cuore.

Il Socio Grassi fa una comunicazione verbale sulle formiche argentine, delle quali descrive, con interessanti particolari, i costumi, la diffusione, ed enumera i danni che causa questo insetto, i gravi pericoli che il suo diffondersi presenta e i mezzi cui oggi si può ricorrere per combatterlo.

Alle notizie date dal Socio Grassi altre del pari interessanti ne aggiunge il dott. Gallardo, che osserva come l'appellativo di *argentina* dato alla formica in questione non risponda al vero, essendo il Brasile il luogo di origine del dannoso insetto.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 5 marzo 1922.

Andoyer H. — L'oeuvre scientifique de Laplace. Paris, 1922. 12°, pp. 1-162.

Berzelius J. — Brev gemon H. G. Söderbaum. vol. IV, 1. Uppsala, 1921. 8°, pp. 1-103.

Boegan E. — La grotta di Trebiciano. Studi e rilievi dal 1910 al 1921 (Estr. dalla Rassegna « Alpi Giulie »). Trieste, 1921. 8°, pp. 1-42.

Braccialini S. — I telemetri da costa e gli apparecchi accessori sistema Braccialini (Estr. dalla « Rivista d'artiglieria e genio », vol. III e IV). Roma, 1921. 8°, pp. 1-57.

Clerici E. — Sulla analisi isopicnomerica delle roccie (Estr. dai « Nuovi annali del Ministero per l'agricoltura », anno I. pp. 329-347). Roma, 1921. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — L'argilla colloidale nel terreno agrario (Estr. dalle « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV, pp. 214-224). Modena, 1921. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — Materiali naturali per cementi nell'Umbria (Estr. dalla Rivista « La Miniera Italiana », anno V). s. l. 1921. pp. 1-4.

Lasareff P. — Richerches sur la théorie ionique de l'excitation. I[e] partie. Moscau, 1918. 8°, pp. 1-155.

Lasareff P. — Sur la relation entre la dureté et les costantes élastiques, thermiques et optiques des éléments (Estr. du « Bulletin de l'Accadémie des Sciences de Russie », 1918, pp. 2241-2244). Petergrad, 1919. 8°.

Peyronel B. — Sur l'identité du *Spirospora Castaneae* Mangin et Vincens et du *Stephanoma italicum* Sacc. et Trav. avec l'*Acrospeira mirabilis* B. et Br. (Estr. du « Bulletin de la Société mycologique de France », tome XXXVII, pp 56-61). Paris, 1921. 8°.

Peyronel B. — Una grave malattia del mandorlo prodotta dal « Fusicladium amygdali » Ducamet (Estr. dai « Nuovi annali del Ministero per l'agricoltura », anno I, pp. 27-44). Roma, 1921. 8°.

Serpieri A. — Per un'organica illustrazione della montagna italiana. Firenze, 1921. 8°, pp. 1-170.

Soler E. — Bibliografia geodetica italiana (R. Commissione geodetica italiana). Padova, 1921. 4°, pp. 1-63.

Terao A. — On the Development of *Panochirus yaponicus* (v. Siebold). (From « Report of the Imperial Fisheries Institute », vol. XIV). Tokyo, 1919. 8°, pp. 1-7

Traverso G. B. — Due interessanti micocecidii della Somalia (Estr. dalla Rivista di scienze naturali « Natura », vol. XII, pp. 179-189). Pavia, 1921. 8°.

Usai G. — Processi di riduzione su equazioni integrali di prima specie (Estr. dalle « Note e Memorie di matematica, vol. I, pp. 264-221). Catania, 1921. 8°.

Usai G. — Processi riduttivi su equazioni integrali (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. LIV, pp. 477-488). Milano, 1921. 8°.

Usai G. — Relazioni tra i simboli del Pascal e i simboli dell'Amaldi nella teoria delle derivate di ordine superiore delle funzioni composte (Estr. dal « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. LIX). Napoli, 1921. 4°. pp. 1-12.

Usai G. — Sugli esponenti nelle ripartizioni (Estr. dal « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. LVIII). Napoli, 1920. 4°, pp. 1-11.

Usai G. — Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali col nucleo (Estr. dai « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo XLV). Palermo, 1921. 8°.

Presentate nella seduta del 2 aprile 1922.

Agamennone G. — Breve periodo sismico nel Viterbese il 10 maggio 1920 (Estr. dalla « Meteorologia pratica », anno II). Subiaco, 1921. 8°, pp. 1-2.

Agamennone G. — Il terremoto di Castel Romano (Roma) del 12 febbraio 1919. Rocca di Papa, 1922. 8°, pp. 1-8.

Agamennone G. — Il terremoto di Velletri del 20 marzo 1921. Rocca di Papa, 1921. 8°, pp 1-4.

Archibald R. C. — Euclid's Book on Divisions of Figures. Cambridge, 1915. 8°, pp. i-vii, 1-88.

Archibald R. C. — Notes on the Logarithmic Spiral, Golden Section and the Fibonacci Series (Repr. from « Jay Hambidge's Dinamic Symmetry ». 1920, pp. 146-157). Yale, 1920. 8°.

Archibald R. C. — Simon Newcomb (Repr. from « Science », vol. XLIV, n. 1147). Washington, 1916. 8°, pp. 1-17.

Cassinis G. — Commemorazione del professor Vincenzo Reina letta nell'Aula della R. Scuola di applicazione per gli ingegneri. Roma, 1921. 8°.

Cassinis G. — Commemorazione del professor Vincenzo Reina (Estr. dai « Rendiconti del Seminario matematico della Università di Roma », anno 1919-1920). Roma, 1921. 8°, pp. 1-20.

Cassinis G. — Determinazioni di gravità relativa eseguite nel 1919 a Roma, Napoli, Palermo, Teramo. Roma, 1921. 4°, pp. 1-23.

La conquista de le vie aeree nel mondo, vol. I. Roma, 1922. 8°, pp. 1-55.

De Montessus de Ballare R. — Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1922. 4°, pp. 1-37.

Fea L. — Note circa la manovra dei grossi pesi a bordo delle navi moderne (Estr. dalla « Rivista Marittima »). Roma, 1922. 8°, pp. 1-69.

Ivaldi G. — Le leggi delle soluzioni diluite ed elettrolitiche secondo il metodo sperimentale (Estr. dalla « Rivista tecnica d'elettricità e delle invenzioni », dal n. 1905 al n. 2000). Milano, 1922. 4°, pp. 1-34.

Merwin H. E. — Aphthitalite from Kilauea (Repr. from the « American Mineralogist », vol. VI, n. VIII, pp. 121-125). Washington, 1921. 8°.

Merwin H. E. — Mineralogy augite of Haleakala, Maui. Hawaiian Islands

(Repr. from the « American Journal of Science », vol. III, pp. 117-122). Washington, 1922. 8°.

MINER R. J. — The Gradual Withdrawal Method of Treating Morphinism: a Mathematical Note (From the « Johns Hopkins Hospital Bulletin », volume XXXII. Baltimore, 1921. 8°, pp. 1-3.

PAIS A. — Radioeccitamento degli organi ematopoietici nel tifo addominale. Roma, 1922. 8°, pp. 1-11.

PEARL R. — A biological classification of the causes of Death (From « Metron », vol. I, pp. 92-99). Rovigo, 1921. 8°.

'EARL R. — A further Note on War and Population (Repr. from « Science », vol. LIII, n. 1362, pp. 120-121). Washington, 1921. 8°.

PEARL R. — A statistical Note on epidemic Encephalitis (From the « Johns Hopkins Hospital Bulletin », volume XXXII). Baltimore, 1921. 8°.

PEARL R. — Influenza Studies (From the « Public Health Reports »). Washington, 1921. 8°, pp. 1-27.

PEARL R. — Modern Methods in Handling Hospital Statistics (From the « Johns Hopkins Hospital Bulletin », volume XXXII). Baltimore, 1921. 8°.

PEARL R. — Studies on the physiology of Reproduction in the domestic Fowl. XIX. On the Influence of free Choice of food materials on Winter egg Production and Body Weight (Repr. from the « American Journal of Hygiene », vol. L, pp. 253-277).

PEARL R. — The Biology of Death; I. The Problem - II. Conditions of Cellular Immortality - III. The Chances of Death - IV. The Causes of Death - V. The Inheritance of Duration of Life in Man - VI. Experimental Studies on the Duration of Life - VII. Natural Death, public Health, and the Population Problem (Repr. from the « Scientific Monthly », 1921. pp. 193-215, 321-335, 443-456, 489-516, 45-65, 143-162). Baltimore, 1921. 8°.

PEARL R. — The Significance of Biometry and vital Statistics to the Science of Medicine. s. l., s. d. 8°

PEARL R. — Variation in the Rate of Infant Mortality in the United States Birth Registration Area (Repr. from. the « Transactions of the Eleventh Annual Meeting of the American Child Hygiene Association », St. Louis, 11-13. 1920). Baltimore, 1920. 8°.

PEPERE A. — Ghiandole a secrezione interna. Torino, 1922 8°, pp. I-XI, 1-319.

REED L. J. — Fitting Straight Lines (Extr. da « Metron », vol. I, n. III, pp. 56-60). Rovigo, 1921. 8°.

SILVESTRI F. — Description of a new Species of Embiidae from Southern Nigeria (From the « Transactions of the Entomological Society of London », pp. 449-451). London, 1922. 8°.

SILVESTRI F. — Stato attuale della lotta contro la mosca delle olive (Estr. dagli « Atti del I Congresso di arboricoltura meridionale »). Roma, 1922. 8°, pp. 1-31.

TRAVIS HOWARD. — The real Risk-Rate of Death to Mothers from Causes connected with Childbirth (Repr. from the « American Journal of Hygiene », vol. I, pp. 197-233). s. l., 1921. 8°.

TUMMARELLO A. — Su i sistemi omaloidici costituiti da monoidi aventi contatto di second'ordine nel vertice (Estr. dalle « Note e Memorie di Matematica », vol. I, pp. 289-298). Catania, 1921. 8°.

TUMMARELLO A. — Una nuova trasformazione birazionale $(n, 2n-3)$ dello spazio a tre dimensioni. Le superficie di de Vries (Estr. dalle « Note e Memorie di Matematica », vol. I, pp. 292-298). Catania, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — Aphthitalite from Kilauea (Repr. from the « American Mineralogist », vol. VI, n. VIII, pp. 121-125). Washington, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — Mineralogy. Augite of Haleakala, Maui, Hawaiian Islands (Repr. from the « American Journal of Science », vol. III, pp. 177-122). Washington, 1922. 8°.

WASHINGTON H. S. — Obsidian from Copan and Chichen Itza (Repr. from the

« Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. XI, pp. 481-487). Washington, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — Remarks on Volcanoes (Ropr. from « Special Publications of Bernice P. Bishop Museum », n. 7, pp. 361-368). Washington, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — The Chemistry of the Pacific Volcanoes the Limitations of our Knowledge (Repr. from « Special Publications of Bernice P. Bishop Museum », n. 7, pp. 325-345). Washington, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — The granites of Washington, D. C. (Repr. from the « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. XI n. XIX, pp. 459-470). Washington, 1921. 8°.

WASHINGTON H. S. — The Jade of the Tuxtla Statuette (From the « Proceedings of the United States National Museum », vol. 60). Washington, 1922. 8°. pp. 1-12.

WASHINGTON H. S. — The Lavas of the Hawaiian Volcanoes. Washington, 1921. 8°, pp. 1-13.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

COMUNICAZIONI VARIE

ERRATA CORRIGE

Vol. XXX, 2° sem. 1921, pag. 364, riga 13: invece di *Pacifico* leggasi *Panifico*.
In questo volume, pag. 105, riga 35. leggasi *cinque* invece di *tre*.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 aprile 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

(Segue in terza pagina).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 8°

Seduta del 23 aprile 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le **6** pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le **4** pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1922.

Presidenza del Socio anziano R. LANCIANI.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sopra i moti ellittici perturbati.* Nota del Socio E. ALMANSI.

1. Un punto materiale P, di massa m, si muova sollecitato dall'attrazione newtoniana dovuta ad una massa M, e da una forza perturbatrice.

Le formule a cui pervengo in questa Nota esprimono, in modo assai semplice, come variano da istante a istante, per effetto della forza perturbatrice, la forma dell'orbita istantanea, che suppongo ellittica, e la sua posizione rispetto ad una terna di assi ortogonali, d'orientazione fissa, colla origine in M.

Diciamo π, in un istante qualunque, il piano dell'orbita, ossia il piano che contiene il raggio vettore MP, ed è tangente alla traiettoria di P. Il passaggio del piano π dalla posizione che esso occupa al tempo t, a quella che occupa al tempo $t+dt$, si può immaginare che avvenga mediante una rotazione intorno alla retta MP. Denoti $d\sigma$ l'angolo di cui ruota π nel tempo dt.

Sia poi g una retta passante per M, situata sul piano π, *e fissa rispetto a questo piano*; ψ l'angolo, misurato nel verso in cui avviene il movimento di P, che l'asse maggiore della ellissi, orbita istantanea di P al tempo t, forma con g; p il parametro, e l'eccentricità della ellissi.

Le quattro quantità $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ si esprimono molto semplicemente facendo intervenire una forza che chiamo *forza perturbatrice ridotta* (e indico con f. p. r.): forza definita nel modo seguente.

Consideriamo una terna $M(r, r', r'')$ di rette ortogonali, congruente colla terna $M(x, y, z)$ degli assi coordinati. La retta r abbia la direzione e il verso MP. La retta r' sia normale alla r, sul piano dell'orbita, e formi un angolo acuto (o nullo) colla velocità di P. La retta r'' sarà normale al piano dell'orbita. Denotino S, T, W le proiezioni della forza perturbatrice (unitaria) sulle tre rette r, r', r''. La f. p. r. abbia sulla stessa retta le proiezioni

$$S_1 = S - T \operatorname{tag} \zeta \quad , \quad T_1 = 2T \quad , \quad W_1 = W ,$$

ζ essendo l'angolo che la velocità di P forma colla retta r'.

Siano poi: U_1 e V_1 le proiezioni della f. p. r. sull'asse maggiore e sull'asse minore dell'orbita istantanea; r la lunghezza del segmento MP; μ il prodotto della costante dell'attrazione per $M + m$ (supposta mobile anche la massa M). Si trova

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu p}}\, r W_1 \, , \; e \dfrac{d\psi}{dt} = -\sqrt{\dfrac{p}{\mu}}\, U_1 \, , \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = \sqrt{\dfrac{p}{\mu}}\, r T_1 \, , \quad \dfrac{de}{dt} = \sqrt{\dfrac{p}{\mu}}\, V_1 \, . \end{cases}$$

Insieme alle precedenti, è da considerare la formula

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$$

in cui $d\theta$ denota l'angolo descritto dal raggio vettore MP, sul piano π, nel tempo dt.

Dedurrò le formule (1) direttamente dalle equazioni del movimento di m. Esse potrebbero dedursi da note formule di Gauss [1].

2. Diciamo x, y, z le coordinate del punto P; α, β, γ i coseni direttori della retta r. I coseni direttori della r' saranno:

$$(2) \qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{d\theta} \, , \; \beta' = \frac{d\beta}{d\theta} \, , \; \gamma' = \frac{d\gamma}{d\theta} \; [2].$$

Dalle formule $x = r\alpha$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\alpha + r\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\alpha + r\dfrac{d\theta}{dt}\alpha'$, ecc., si ricava

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}(\beta\gamma' - \gamma\beta') ;$$

(1) V. Tisserand, *Mécanique céleste*, vol. I, cap. XXVII.

(2) Si può riconoscere osservando che, abbassata da P la perpendicolare PQ sul raggio vettore MP' inf. vicino ad MP, il segmento PQ, che al limite giace sulla retta r', avrà (a meno d'inf. d'ord. sup.) la grandezza $r\,d\theta$, e le proiezioni, differenze fra le proiezioni dei segmenti PP' e QP', $dx - dr\alpha = r d\alpha$, ecc.; onde i coseni della r' saranno $\dfrac{r d\alpha}{r d\theta} = \dfrac{d\alpha}{d\theta}$, ecc.

quindi, ponendo

$$q = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

e indicando con $\alpha'', \beta'', \gamma''$ i coseni direttori dalla r'':

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = q\alpha'', \text{ ecc.}$$

D'altra parte, dalle equazioni del movimento del punto m rispetto alla terna $M(x, y, z)$, che scriveremo $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, ecc., si ricava

$$\frac{d}{dt}\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = yZ - zY = r(\beta Z - \gamma Y).$$

Sarà per conseguenza

$$\frac{dq}{dt}\alpha'' + q\frac{d\alpha''}{dt} = r(\beta Z - \gamma Y). \tag{3}$$

Moltiplicando questa equazione, e le due analoghe, per $\alpha'', \beta'', \gamma''$, e sommando, si ottiene

$$\frac{dq}{dt} = r\,T_0,$$

ove $T_0 = \alpha''(\beta Z - \gamma Y) + \cdots = (\beta''\gamma - \gamma''\beta)\,X + \cdots = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$. Dunque T_0 è la proiezione della forza (X, Y, Z), che indicheremo con F, sopra la direzione r'.

L'equazione (3), sostituendo $r\,T_0$ a $\frac{dq}{dt}$, potremo scriverla

$$\frac{d\alpha''}{dt} = \frac{r}{q}(\beta Z - \gamma Y - \alpha'' T_0).$$

Ma se W_0 è la proiezione della forza F sulla direzione r'', si ha

$$\beta Z - \gamma Y - \alpha'' T_0 = -\alpha' W_0, \text{ ecc.},$$

(come si riconosce moltiplicando successivamente queste ultime equazioni per i coseni di r, r', r'', e sommando). D'altronde la forza F ha sulle direzioni r' ed r'', normali al raggio vettore, le stesse proiezioni T e W della forza perturbatrice. Pertanto avremo:

$$\frac{dq}{dt} = r\,T; \tag{4}$$

$$\frac{d\alpha''}{dt} = -\frac{r}{q} W\alpha' \quad , \quad \frac{d\beta''}{dt} = -\frac{r}{q} W\beta' \quad , \quad \frac{d\gamma''}{dt} = -\frac{r}{q} W\gamma'. \tag{5}$$

3. Indichiamo con E l'ellissi orbita istantanea del punto m al tempo t, ossia l'orbita che m descriverebbe negl'istanti successivi a t, se nello

istante t si annullasse la forza perturbatrice; P_1 la posizione che in tale caso occuperebbe il punto m in un istante qualunque; c il valore che avrebbe la costante delle aree.

Al tempo t i due punti P e P_1 hanno la stessa posizione e la stessa velocità; quindi anche la quantità $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ avrà lo stesso valore per ambedue i punti, sarà cioè $q = c$. Ma $c = \sqrt{\mu p}$; dunque $q = \sqrt{\mu p}$, da cui $p = \frac{q^2}{\mu}$. Considerando p, in ogni istante, come il parametro della ellissi relativa a quell'istante, questa formula varrà per tutti i valori di t. Derivandola rispetto a t, e tenendo conto della (4), si ha $\frac{dp}{dt} = \frac{2q}{\mu} r\mathrm{T}$. Ma $2\mathrm{T} = \mathrm{T}_1$ (n. 1), $q = \sqrt{\mu p}$: donde la terza delle (1).

La prima delle (1) si ottiene dalle (5). Se infatti ω è la velocità angolare con cui il piano π, al tempo t, ruota intorno ad r, si avrà per le formule del Poisson, $\frac{d\alpha''}{dt} = -\omega\alpha'$, ecc.; quindi, per le (5), ω, ossia $\frac{d\sigma}{dt}$, sarà uguale ad $\frac{r}{q}\mathrm{W} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r\mathrm{W}_1$.

4. Abbiamo indicato con $d\theta$ l'angolo descritto dal raggio vettore MP (sul piano π) nel tempo dt. Con θ potremo denotare l'angolo che il raggio vettore, al tempo t, forma colla retta g fissa sul piano π (n. 1).

Diciamo θ_1 l'angolo che il raggio vettore MP_1 forma colla retta g_1 sulla quale è disteso l'asse maggiore della ellissi E; ϱ_1 l'inversa del segmento MP_1. L'equazione della ellissi sarà

$$e \cos \theta_1 = p\varrho_1 - 1 .$$

In ogni punto di E sarà anche verificata l'equazione

$$e \operatorname{sen} \theta_1 = -p \frac{d\varrho_1}{d\theta_1},$$

ottenuta derivando la precedente rispetto a θ_1. In particolare le due equazioni varranno nel punto $P_1 \equiv P$ che il mobile occupa al tempo t. Ma quivi $\varrho_1 = \varrho = \frac{1}{r}$, $\frac{d\varrho_1}{d\theta_1} = \frac{d\varrho}{d\theta}$; e inoltre $\theta_1 = \theta - \psi$ (ψ essendo l'angolo che g_1 forma con g: n. 1). Sarà dunque al tempo t:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e \cos(\theta - \psi) = p\varrho - 1 , \\ & e \operatorname{sen} (\theta - \psi) = -p \frac{d\varrho}{d\theta} . \end{aligned} \right.$$

Se poi consideriamo p, e, ψ come variabili, in quanto varia con t la ellissi E, queste due equazioni sussisteranno in ogni istante.

Deriviamo le due equazioni rispetto a t, ed eseguita la derivazione, torniamo a scrivere θ_1 in luogo di $\theta - \psi$, denotando così con θ_1 l'angolo che in un istante qualunque il raggio vettore MP forma colla retta g_1 sulla quale è disteso l'asse maggiore della ellissi relativa a quell'istante. Avremo

$$\frac{de}{dt}\cos\theta_1 - e \operatorname{sen}\theta_1\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{dp}{dt}\varrho + p\frac{d\varrho}{dt},$$

$$\frac{de}{dt}\operatorname{sen}\theta_1 + e\cos\theta_1\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right) = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - p\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Portiamo i termini che contengono $\frac{d\theta}{dt}$ nei secondi membri; nei quali poi, in luogo di $\frac{d\varrho}{dt}$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)$, scriveremo $\frac{d\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$. E denotiamo con A′ ed A ciò che rimane nei primi membri, ossia poniamo

$$(7)\qquad A' = \frac{de}{dt}\cos\theta_1 + e\frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen}\theta_1 \quad , \quad A = \frac{de}{dt}\operatorname{sen}\theta_1 - e\frac{d\psi}{dt}\cos\theta_1 .$$

Si otterrà

$$A' = \frac{dp}{dt}\varrho + \left(e\operatorname{sen}\theta_1 + p\frac{d\varrho}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

$$A = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - \left(e\cos\theta_1 + p\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\right)\frac{d\theta}{dt};$$

e sostituendo nei secondi membri, ad $e\operatorname{sen}\theta_1$ ed $e\cos\theta_1$, i valori $-p\frac{d\varrho}{d\theta}$ e $p\varrho - 1$ forniti dalle (6) in cui si ponga $\theta - \psi = \theta_1$

$$(8)\qquad A' = \frac{dp}{dt}\varrho \quad , \quad A = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - \left\{ p\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho\right) - 1 \right\}\frac{d\theta}{dt}.$$

Per le formule (7), $-e\frac{d\psi}{dt}$ e $\frac{de}{dt}$ saranno le proiezioni, sull'asse maggiore e sull'asse minore della ellissi, del vettore di cui le quantità A ed A′, date dalle (8), sono le proiezioni sulle direzioni r ed r'.

Trasformiamo queste ultime equazioni.

5. Diciamo perciò w_r la proiezione della accelerazione di m sul raggio vettore. Si ha

$$w_r = -q^2\varrho^2\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho\right) - \frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} \qquad \left(q = r^2\frac{d\theta}{d\varrho}\ ,\ \varrho = \frac{1}{r}\right)\ (^1).$$

(¹) Si ottiene questa espressione di w_r dalla formula $w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right\}$, osservando che, per le (2), $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \cdots = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, e tenendo poi conto delle formule $\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{r^2}$, $\frac{1}{r} = \varrho$.

Ma l'accelerazione di m è il vettore F (n. 2); quindi $w_r = -\mu\varrho^2 + S$ (essendo S la proiezione sul raggio vettore della forza pert.). Avremo dunque

$$-q^2\varrho^2\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}+\varrho\right)-\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}=-\mu\varrho^2+S,$$

donde, posto $q^2=\mu p$ (n. 3),

$$p\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}+\varrho\right)-1=-\frac{1}{\mu\varrho^2}\left(S+\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}\right);$$

quindi, sostituendo nella seconda delle (8), e notando che $\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta}{dt}=q$,

$$A=-\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}+\frac{q}{\mu}\left(S+\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Nella prima delle (8)', e in quest'ultima, a $\frac{dp}{dt}$ e $\frac{dq}{dt}$ sostituiamo i valori $\frac{2q}{\mu}rT$, ed rT (n. 3 e 2). Avremo

$$A'=\frac{q}{\mu}2T \quad , \quad A=\frac{q}{\mu}\left(S-rT\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Ora $r\frac{d\varrho}{d\theta}=-\frac{dr}{rd\theta}=\operatorname{tag}\zeta$, ($\zeta$ essendo l'angolo che la tangente alla traiettoria di P forma colla direzione r'); $S-T\operatorname{tag}\zeta$ e $2T$ sono le proiezioni della f. p. r. sulle direzioni r ed r'. Avendo presente l'osservazione fatta nel n. 4, in fine, ed osservando che, per la formula $q=\sqrt{\mu p}$, $\frac{q}{\mu}$ è uguale a $\sqrt{\frac{p}{\mu}}$, si ottengono le seconda e la quarta delle formule (1).

Chimica. — *Sopra i diazocomposti.* Nota del Socio Angelo Angeli.

Recentemente i proff. A. Hantzsch e G. Reddelien hanno pubblicato un libro sopra i diazocomposti (1) che rappresenta una seconda edizione della monografia che porta lo stesso titolo e che comparve nell'anno 1902 nella pregevole Raccolta del prof. Ahrens (2).

Siccome gli autori asseriscono che le ulteriori e numerose ricerche sperimentali hanno confermato le vedute del prof. Hantzsch sopra la isomeria e stereoisomeria che presentano i composti diazoici aromatici, che i recenti studî hanno portato nuova luce anche nel campo dei diazocomposti alifatici e che la letteratura relativa venne presa in considerazione fino al mese di aprile 1921, nelle righe che seguono io mi permetto di fare osservare che non è esatto che la letteratura comprenda i lavori comparsi fino all'aprile 1921 e che d'altra parte nel mentre il prof. Hantzsch si dà tanta premura di porre in rilievo il notevole contributo da lui stesso portato all'importante argomento, egli sovente trascura, ovvero cita in modo incompleto, quanto altri hanno fatto ovvero pensato in proposito. In ogni pagina egli si sforza di confutare le supposizioni ed i fatti che non sono in accordo con la sua ipotesi, e nel fare ciò dà spesso prova di una abilità di ragionamento che non è sempre accompagnata dal rigore delle argomentazioni.

1. A pag. 7 del citato libro gli autori asseriscono che fu il prof. Hantzsch a porre in rilievo per il primo le analogie fra ossime e diazocomposti; ciò non è esatto: contemporaneamente ed in modo del tutto indipendente dal prof. H. (3) io stesso ho accennato alla possibilità di stereoisomeria dei composti diazoici, stereoisomeria che corrisponderebbe a quella che viene ammessa per le ossime (4).

(1) Die Diazoverbindungen. I. Springer, Berlino, 1921.

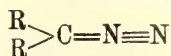
(2) Stuttgart, F. Encke.

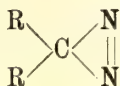
(3) Gazzetta, *23* (1893), II, 345; ibid. *24* (1894), II, 369.

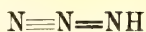
(4) Alcune reazioni scoperte in questi ultimi anni non sarebbero sempre in buon accordo con la ipotesi di Hantzsch e Werner sopra la stereoisomeria delle ossime e nemmeno con le conseguenze che si possono dedurre dalla trasposizione di Beckmann; così p. es. sembra che sia stata ottenuta una quarta diossima del benzile [Chem. Soc. (1921), 1184); pare che alle monossime del benzile si debba mutare la forma finora loro attribuita (Berichte, *54*, 3206); non si comprende perchè non tutte le diossime che si ottengono per riduzione dei corrispondenti perossidi siano in grado di fornire sali complessi col nichelio [Gazzetta (1921), 324]; le reazioni di alcune ossime si spiegano meglio ammettendo che esse contengano il gruppo $>C{=}NH{=}O$. ecc.

Il prof. Hantzsch, che conosce bene i miei lavori, anche perchè ne abbiamo parlato personalmente, si guarda dal citare il mio nome.

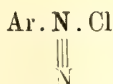
2. Sebbene gli autori asseriscano di aver presa in considerazione la letteratura fino all'aprile 1921, essi trascurano di citare i più recenti lavori di Staudinger (pag. 19) sopra i diazocomposti alifatici (senza annoverare quelli comparsi al principio di quest'anno) coi quali viene confermato che la formola dei diazocomposti alifatici da me proposta[1]:

$$\begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>C{=}N{\equiv}N$$

spiega molto meglio le nuove reazioni interessanti scoperte da Staudinger stesso, che non quella di Curtius:

$$\begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>C<\begin{matrix} N \\ \| \\ N \end{matrix}$$

D'altra parte ancora nel 1919 [2], I. Sureda Blanes era arrivato alla stessa conclusione per mezzo dello studio di altre reazioni. Le stesse osservazioni valgono per le formole dell'acido azotidrico e del protossido di azoto da me proposte:

$$N{\equiv}N{=}NH \qquad\qquad N{\equiv}N{=}O$$

e che si trovano oramai diffuse anche nei trattati più recenti.

3. È molto probabile che i sali di diazonio possiedano la struttura proposta da Blomstrand

$$\begin{matrix} Ar.N.Cl \\ \,\,\,\,\,\,\| \! | \\ \,\,\,\,\,\,N \end{matrix}$$

ovvero qualche altra poco diversa, ma invece non mi sembra punto dimostrato che ai due idrati del diazobenzolo, normali ed isodiazotati, spettino le forme stereoisomere proposte da Hantzsch:

$$\begin{matrix} C_6H_5.N \\ \| \\ (HO).N \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} C_6H_5.N \\ \| \\ N.(OH) \end{matrix}$$

diazotato normale — isodiazotato

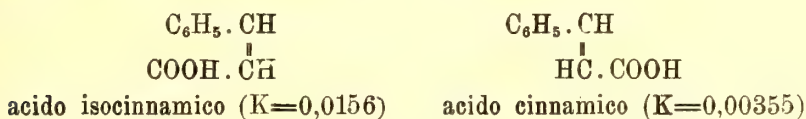
Tali forme, a mio modo di vedere, si potranno invocare per i soli casi in cui gli ossidrili sono rimpiazzati da altri gruppi (diazonitrili, diazosolfonati, ecc.).

Infatti a pag. 29 il prof. Hantzsch dice che i diazotati normali in soluzione acquosa sono maggiormente idrolizzati che non gli isodiazotati e ciò

[1] Helvetica Acta, *4* (1921), 213 e seg.
[2] Journal Chem. Soc., pag. 78 *i*.

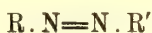
significa che se entrambi funzionano da acidi deboli i primi sono più deboli ancora dei secondi; secondo la sua ipotesi, data la maggiore vicinanza del fenile, gruppo negativo, all'ossidrile sarebbe in verità da aspettarsi tutto il contrario, come si verifica p. es. nel caso degli acidi cinnamico ed isocinnamico (1):

$$\begin{array}{cc} C_6H_5.CH & C_6H_5.CH \\ \| & \| \\ COOH.CH & HC.COOH \end{array}$$

acido isocinnamico (K=0,0156) acido cinnamico (K=0,00355)

Hantzsch dice che i due isomeri differiscono soltanto per un diverso contenuto di energia, che si tratta di differenze puramente graduali ecc.; sta il fatto però che le differenze di comportamento sono troppo notevoli per poter essere giustificate solamente da una diversità di configurazione.

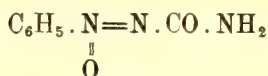
4. Sebbene pubblicata ancora nell'anno 1917 (2) il prof. Hantzsch a pag. 41 del suo libro tralascia completamente di citare la reazione da me descritta che riguarda un nuovo modo di formazione dei diazotati normali.

Ancora a suo tempo io ho dimostrato che ossidando nelle opportune condizioni gli azoderivati:

$$R.N{=}N.R'$$

si ottengono con tutta facilità i corrispondenti azossicomposti che nella maggior parte dei casi si presentano nelle due forme

$$\begin{array}{cc} R.N{=}N.R' & R.N{=}N.R' \\ \| & \| \\ O & O \end{array}$$

Ora io ho trovato che anche la fenilazocarbonammide di Oscar Widman (3) per lo stesso trattamento fornisce nettamente il prodotto (4):

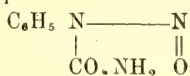
$$\begin{array}{l} C_6H_5.N{=}N.CO.NH_2 \\ \quad\quad\;\; \| \\ \quad\quad\;\; O \end{array}$$

il quale, in presenza di alcali reagisce immediatamente con il β-naftolo; questa reazione non si può spiegare che ammettendo che l'azossiammide, al

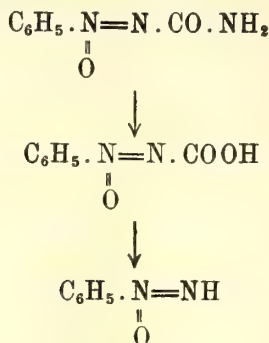
(1) R. Bader, Zeit. phys. chem., *6* (1890), 289.

(2) R. A. L., *26* (1917), 1° sem, 207; confr. anche: Gazzetta, *51* (1921), parte 1ª, pag. 35.

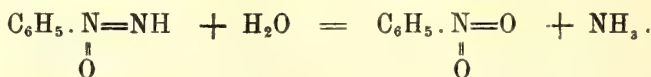
(3) O. Widman, Berliner Berichte, *28* (1895), pag. 1926.

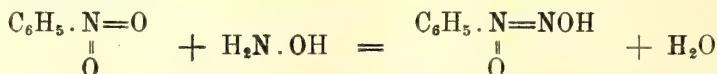
(4) Questa sostanza, come si vede, è isomera ma molto diversa dalla nitrosammina della fenilurea, nota da molto tempo:

$$\begin{array}{ll} C_6H_5\ N & \!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\ N \\ \quad\;\; | & \quad\;\; \| \\ CO.NH_2 & \quad\;\; O \end{array}$$

pari della corrispondente azoammide di Oscar Widman, per azione degli alcali subisca le demolizioni successive:

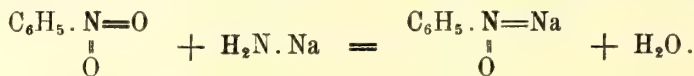
$$\begin{array}{c} C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}N.CO.NH_2 \\ \downarrow \\ C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}N.COOH \\ \downarrow \\ C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NH \end{array}$$

Sarebbe quest'ultimo termine che rappresenta una delle forme dell' idrato normale, quello che subito reagisce col β-naftolo presente.

Ciò sarebbe contrario a quanto Hantzsch dice a pagg. 13 e 34 del suo libro; egli fa osservare infatti che secondo questa struttura i diazotati normali sarebbero da considerarsi come strani aggruppamenti di imminocorpi (imminonitrobenzolo), mentre invece in realtà non sono in grado di fornire ammoniaca:

$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NH + H_2O = C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}O + NH_3.$$

Ma a questo proposito io faccio notare al prof. Hantzsch che tale obbiezione non ha nessun valore, giacchè nemmeno dalla cosidetta nitrosofenilidrossilammina, alla quale per la sintesi da me effettuata spetta una struttura analoga (ossima del nitrobenzolo):

$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}O + H_2N.OH = C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NOH + H_2O$$

non è possibile in nessun modo di riottenere idrossilammina.

Questa sintesi corrisponde d'altra parte all'altra effettuata in seguito da E. Bamberger, e che conduce al sale del diazocomposto normale:

$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}O + H_2N.Na = C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}Na + H_2O.$$

Un'altra sintesi infine del diazocomposto normale è stata da me stesso realizzata, e consiste nel far reagire il nitrosile sopra la fenilidrossilammina, la quale come io ho dimostrato in questi casi reagisce sotto forma di ossido (1):

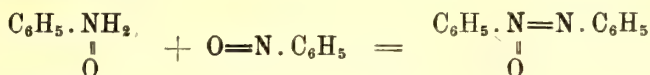
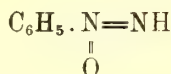
$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}H_2 + O{=}NH = C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NH + H_2O.$$

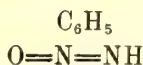
(1) Berliner Berichte, *37* (1904), pag. 2390.

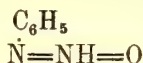
Essa corrisponde alla formazione dell'azossibenzolo dalla fenilidrossilammina e nitrosobenzolo:

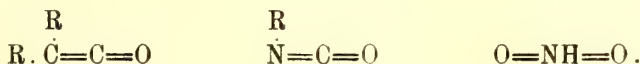
$$\underset{\underset{O}{\|}}{C_6H_5.NH_2} + O{=}N.C_6H_5 = C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N.C_6H_5$$

La forma:

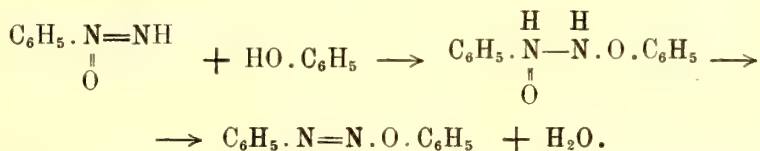
$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}NH$$

che si può anche scrivere:

$$\overset{C_6H_5}{O{=}N{=}NH}$$

come pure la forma tautomera della fenilnitrosammina:

$$\overset{C_6H_5}{\dot{N}{=}NH{=}O}$$

rappresenterebbero composti contenenti due doppi legami « gemelli » ovvero « cumulati » perfettamente analoghi a quelli che sono presenti in altre sostanze caratterizzate per la facilità con cui prendono parte a molte reazioni, quali p. es. i cheteni, gli isocianati e l'acido nitroso nella sua forma tautomera (¹):

$$R.\overset{R}{\dot{C}}{=}C{=}O \qquad \overset{R}{\dot{N}}{=}C{=}O \qquad O{=}NH{=}O.$$

Ciò spiegherebbe non solo come i diazotati normali e gli isodiazotati possano fornire sali, ma sarebbe anche in accordo con quanto Dimroth ha trovato (²) sopra il meccanismo di copulazione di tali sostanze; questo chimico ha infatti posto in rilievo che in una prima fase, coi fenoli, si forma un diazoetere, che senza dubbio deriva da un prodotto di addizione:

$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}NH + HO.C_6H_5 \longrightarrow C_6H_5.\overset{H}{\underset{\underset{O}{\|}}{N}}{-}\overset{H}{N}.O.C_6H_5 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_6H_5.N{=}N.O.C_6H_5 + H_2O.$$

La sola differenza di reazione dai cheteni ecc. risiede nel fatto che nel caso dei diazotati normali il processo è seguìto dall'eliminazione di una molecola di acqua.

La forma tautomera della nitrosammina (come è noto in alcuni casi fu possibile isolare anche le nitrosammine), come sopra ho accennato, contiene

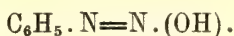
(¹) H. Staudinger, Die Ketene, Stuttgart (1912), pag. 121.
(²) Berliner Berichte, *41* (1908), pag. 4016.

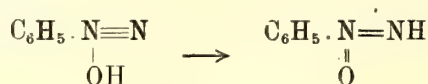
del pari un sistema di doppî legami gemelli e le due forme dell'idrato di diazobenzolo normale corrisponderebbero quindi alle due forme di un azossiderivato da me descritte;

$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NH \qquad\qquad C_6H_5.N{=}\underset{\overset{\|}{O}}{N}H$$

$$C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}N.R \qquad\qquad C_6H_5.N{=}\underset{\overset{\|}{O}}{N}.R$$

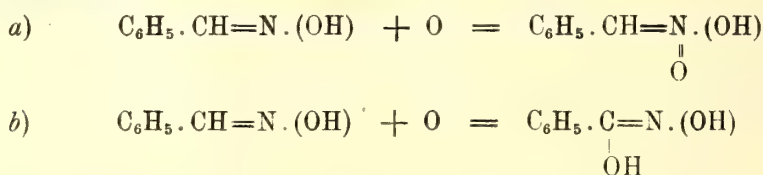
Agli isodiazotati spetta senza dubbio l'altra struttura:

$$C_6H_5.N{=}N.(OH).$$

Tutto ciò sta anche in accordo col fatto osservato da H. Goldschmidt che le copulazioni ordinarie sono ostacolate tanto dagli acidi come dalle basi; il passaggio poi dall'idrato di diazonio alla forma di diazotato normale si intende da sè:

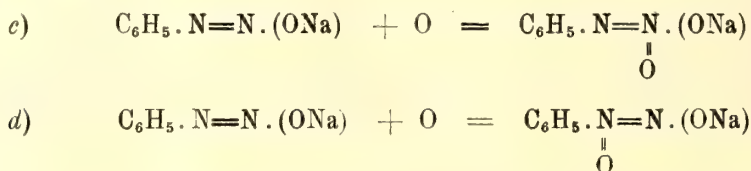
$$C_6H_5.\underset{\overset{|}{OH}}{N}{\equiv}N \longrightarrow C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}NH$$

In altro senso senza dubbio procedono gli interessanti processi di copulazione che in questi ultimi anni ha descritto Kurt Meyer [1], giacchè si tratta di reazioni che si compiono solamente in mezzo fortemente acido.

5. A pag. 59 del suo libro il prof. Hantzsch, dopo di aver fatto notare il fatto scoperto da E. Bamberger, che le ossime per ossidazione possono fornire nitroderivati ed acidi idrossammici:

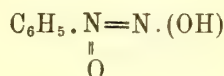
$$a) \qquad C_6H_5.CH{=}N.(OH) + O = C_6H_5.CH{=}\underset{\overset{\|}{O}}{N}.(OH)$$

$$b) \qquad C_6H_5.CH{=}N.(OH) + O = C_6H_5.\underset{\overset{|}{OH}}{C}{=}N.(OH)$$

dice che fu Bamberger stesso a porre in rilievo l'analogia che presentano queste reazioni con i processi di ossidazione che si possono effettuare partendo dai diazotati:

$$c) \qquad C_6H_5.N{=}N.(ONa) + O = C_6H_5.N{=}\underset{\overset{\|}{O}}{N}.(ONa)$$

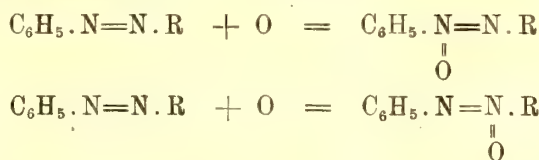
$$d) \qquad C_6H_5.N{=}N.(ONa) + O = C_6H_5.\underset{\overset{\|}{O}}{N}{=}N.(ONa)$$

[1] Berliner Berichte, *47* (1914), 1741 e seg.; Annalen, *398* (1913), 74.

Ciò è completamente falso, come Bamberger stesso ha dovuto recentemente riconoscere [1]; questo chimico aveva realizzate le reazioni *a*) e *b*) nel 1900 [2] e molti anni prima, nel 1892, Bamberger ed indipendentemente da lui Hinsberg, avevano effettuata l'ossidazione rappresentata dall'eguaglianza *c*); basandomi sulla struttura da me proposta per la nitrosofenilidrossilammina [3]:

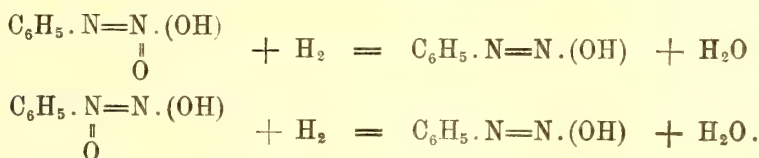
$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N.(OH)$$

ancora nel 1905 [4], per analogia, io aveva preveduto che doveva essere possibile anche il passaggio rappresentato dall'equazione *d*). Ora il Bamberger solamente nel 1909 [5] riuscì ad effettuare anche questa ossidazione, confermando in tale modo quanto io aveva preveduto 4 anni prima.

D'altra parte queste ossidazioni altro non rappresentano che casi particolari di quelle di indole più generale da me realizzati più tardi partendo dagli azoderivati, azoammidi ecc.:

$$C_6H_5.N{=}N.R + O = C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N.R$$

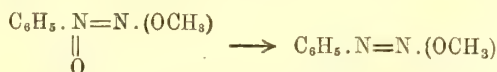
$$C_6H_5.N{=}N.R + O = C_6H_5.N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.R$$

Per riduzione questi azossicomposti perdono facilmente l'atomo di ossigeno e rigenerano gli azoderivati di partenza, nello stesso modo che la fenilnitrammina e la nitrosoidrossilammina per analogo trattamento (pag. 59 del libro del prof. Hantzsch) forniscono gli isodiazotati, che perciò corrispondono agli azoderivati:

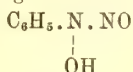
$$C_6H_5.N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.(OH) + H_2 = C_6H_5.N{=}N.(OH) + H_2O$$

$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N.(OH) + H_2 = C_6H_5.N{=}N.(OH) + H_2O.$$

[1] Berliner Berichte. *53* (1920), 2308.

[2] Ibid., *33* (1900), 1781.

[3] Questa formola dà anche ragione del fatto che tale sostanza, per qualunque trattamento, dà un solo etere metilico che per riduzione fornisce l'etere dell'idrato di diazobenzolo:

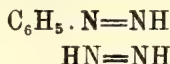
$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N.(OCH_3) \longrightarrow C_6H_5.N{=}N.(OCH_3)$$

La struttura proposta da Bamberger e da altri:

$$C_6H_5.\underset{\underset{OH}{|}}{N}.NO$$

non spiega in nessun modo questo passaggio.

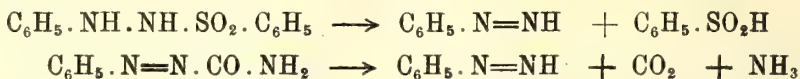
[4] R. A. L., *14* (1905), 2° sem., 658.

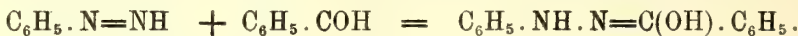
[5] Berliner Berichte. *42* (1909), pag. 3568.

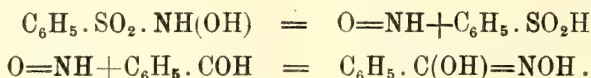
6. Anche riguardo al comportamento delle due sostanze (pp. 84, 92, 114):

$$C_6H_5.N{=}NH$$
$$HN{=}NH$$

che ancora non si è riusciti ad avere allo stato libero, il prof. Hantzsch trascura completamente quanto io ho fatto e pensato in proposito.

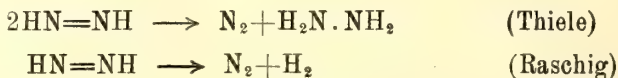
Se esse non sono ancora conosciute, io sono egualmente riuscito a fissarne il comportamento: infatti per trattamento con alcali in presenza di benzaldeide della benzolsolfonidrazina di E. Fischer oppure della fenilazocarbonammide di O. Widman:

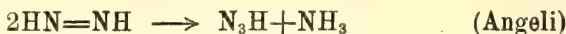
$$C_6H_5.NH.NH.SO_2.C_6H_5 \longrightarrow C_6H_5.N{=}NH + C_6H_5.SO_2H$$
$$C_6H_5.N{=}N.CO.NH_2 \longrightarrow C_6H_5.N{=}NH + CO_2 + NH_3$$

io ho trovato che si forma con tutta facilità benzoilfenilidrazina [1]:

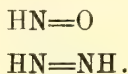
$$C_6H_5.N{=}NH + C_6H_5.COH = C_6H_5.NH.N{=}C(OH).C_6H_5.$$

Questa reazione corrisponde perfettamente all'altra da me effettuata molti anni or sono e che conduce nettamente all'acido benzidrossammico, quando nelle identiche condizioni si fa reagire l'acido benzolsolfoidrossammico sopra la benzaldeide:

$$C_6H_5.SO_2.NH(OH) = O{=}NH + C_6H_5.SO_2H$$
$$O{=}NH + C_6H_5.COH = C_6H_5.C(OH){=}NOH.$$

Sopra altre scissioni che queste sostanze presentano non è qui il luogo di dilungarsi.

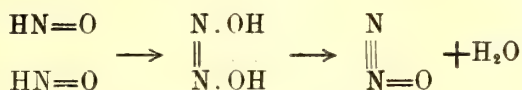
In quanto alla diimmina, nelle reazioni in cui è da aspettarsi che essa si formi, a pag. 92 del suo libro il prof. Hantzsch si limita a citare le due scissioni:

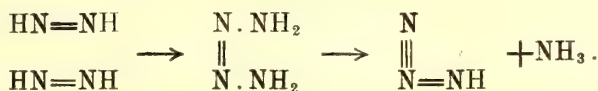
$$2HN{=}NH \longrightarrow N_2 + H_2N.NH_2 \qquad \text{(Thiele)}$$
$$HN{=}NH \longrightarrow N_2 + H_2 \qquad \text{(Raschig)}$$

e naturalmente nemmeno accenna all'altra trasformazione da me effettuata molti anni or sono [2]:

$$2HN{=}NH \longrightarrow N_3H + NH_3 \qquad \text{(Angeli)}$$

in occasione del parallelismo da me posto in rilievo fra il comportamento dei termini instabilissimi:

$$HN{=}O$$
$$HN{=}NH.$$

(1) R. A. L., *24* (1915), 1° sem., 1093; *26* (1917), 1° sem., 95.
(2) R. A. L. (1910), 2° sem., pag. 99.

Il primo, con tutta rapidità, si polimerizza per dare acido iponitroso e protossido di azoto:

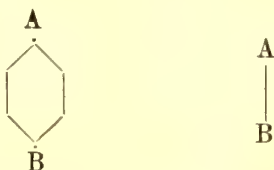
$$\begin{matrix} HN{=}O \\ HN{=}O \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N.OH \\ \| \\ N.OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ ||| \\ N{=}O \end{matrix} + H_2O$$

e l'altro, in modo analogo, fornisce acido azotidrico:

$$\begin{matrix} HN{=}NH \\ HN{=}NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N.NH_2 \\ \| \\ N.NH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ ||| \\ N{=}NH \end{matrix} + NH_3 .$$

Questa interpretazione è stata subito accettata da Diels (¹), il quale se ne è giovato per spiegare altre interessanti scissioni che presentano alcuni composti azotati da lui scoperti.

Non solo, ma la formazione del termine intermedio:

$$\begin{matrix} N.NH_2 \\ \| \\ N.NH_2 \end{matrix}$$

è resa sommamente probabile anche da un altro fatto. Come io ho recentemente posto in rilievo, nei composti aromatici orto e parasostituiti, i due sostituenti in molte reazioni si comportano come se fossero direttamente riuniti fra di loro (²):

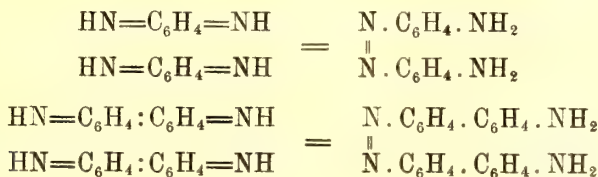
$$\begin{matrix} A \\ | \\ B \end{matrix}$$

cioè come se la catena di atomi di carbonio possedesse una forma di « conducibilità ».

Ora, prendendo in esame gli interessanti lavori eseguiti da R. Willstätter, ho trovato che anche le diimmine aromatiche:

$$HN{=}C_6H_4{=}NH \qquad\qquad HN{=}C_6H_4:C_6H_4{=}NH$$

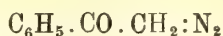
hanno grande tendenza a polimerizzarsi per dare gli azoderivati:

$$\begin{matrix} HN{=}C_6H_4{=}NH \\ HN{=}C_6H_4{=}NH \end{matrix} = \begin{matrix} N.C_6H_4.NH_2 \\ \| \\ N.C_6H_4.NH_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} HN{=}C_6H_4:C_6H_4{=}NH \\ HN{=}C_6H_4:C_6H_4{=}NH \end{matrix} = \begin{matrix} N.C_6H_4.C_6H_4.NH_2 \\ \| \\ N.C_6H_4.C_6H_4.NH_2 \end{matrix}$$

(¹) Berliner Berichte, *46* (1913), pag. 2002.
(²) R. A. L., *26* (1917), 1° sem., 480 e seg.

Come si vede, le mie ipotesi non potevano avere una migliore conferma da esperienze eseguite in campi così diversi: esse dimostrano che anche in questi casi i due gruppi NH si comportano come se fossero riuniti direttamente fra di loro.

7. A pag. 93 del libro del prof. Hantzsch trovo che questi fa notare che i diazocomposti alifatici si formano per azione dell'acido nitroso solamente sopra quelli amminoderivati nei quali in posizione α è contenuto un gruppo non saturo (COOR, CO, CN ecc.). Il prof. Hantzsch dimentica anche questa volta di rammentare che questa regolarità è stata rilevata da me molti anni or sono; anzi in tale circostanza non solo ho preparato il diazoacetofenone [1]:

$$C_6H_5.CO.CH_2:N_2$$

ma altresì ho posto per la prima volta in rilievo che gli amminoacidi naturali contengono il gruppo amminico in posizione α rispetto al carbossile.

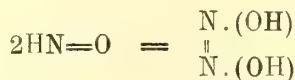
Inoltre il prof. Hantzsch riconosce che la diazocanfora (pag. 97 e 111) è un vero diazocomposto alifatico, scoperto nel 1881 a Modena dal professore R. Schiff [2] ed in seguito studiato ulteriormente da me; ora per quale ragione il prof. Hantzsch asserisce a pag. 93 del suo libro che il primo rappresentante dei diazocomposti alifatici è stato scoperto da Curtius nel 1883?

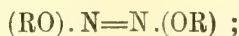
A quest'ultimo chimico spetta il grande merito di avere preparato il primo diazoetere e di averne studiato il comportamento, ma non già il primo diazocomposto alifatico.

8. Sempre fisso nella sua idea il prof. Hantzsch vorrebbe considerare come stereoisomeri anche la nitrammide, scoperta dal mio compianto amico I. Thiele, e l'acido iponitroso (pag. 115):

$$\begin{array}{c} N.(OH) \\ \| \\ N.(OH) \\ \text{nitrammide} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (HO).N \\ \| \\ N.(OH) \\ \text{acido iponitroso} \end{array}$$

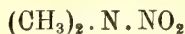
ma egli dimentica che se l'acido iponitroso è un polimero del nitrossile, come prima ho detto:

$$2HN{=}O \;=\; \begin{array}{c} N.(OH) \\ \| \\ N.(OH) \end{array}$$

che fornisce eteri ben definiti della forma:

$$(RO).N{=}N.(OR)\;;$$

la nitrammide invece, non solo per il suo modo di formazione, ma anche

(1) Berliner Berichte, *26* (1893), 1717.
(2) Berliner Berichte, *14* (1881), 1373.

per il fatto che per azione del diazometano dà dimetilnitrammina [1]:

$$(CH_3)_2 . N . NO_2$$

contiene sicuramente i due atomi di ossigeno uniti ad uno stesso atomo di azoto.

Mi sembra quindi che sia per lo meno poco logico parlare di stereoisomeria.

Finisco queste pagine esprimendo l'augurio che in avvenire anche il prof. Hantzsch tenga meglio presenti le ricerche eseguite dagli altri colleghi, nello stesso modo che io non trascuro di prendere in attenta considerazione i lavori che egli ha pubblicato.

Geologia. — *L'origine del Petrolio nell'Emilia.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

I terreni dell'Emilia, salvo minimi lembi isolati ed i terreni recenti, appartengono alla serie terziaria e sono, cominciando dal basso:

1°) l'Arenaria *Macigno* dell'Eocene medio: con qualche alternanza argillosa nella parte superiore;

2°) Calcare ad *Helminthoidea* talora con qualche alternanza argillosa;

3°) Galestri, Argille scagliose, Calcari marnosi e zone ofiolitiche appartenenti all'Eocene superiore. Sovente, specie nella parte meridionale, questa zona viene ad immediato contatto col *Macigno* senza intermezzo della zona seconda;

4°) Marne, arenarie, argille, calcari organogenici, del Miocene medio e gessi con marne del Miocene superiore, essendochè l'Oligocene sia rappresentato solo nella Liguria confinante con la Provincia di Piacenza salvo qualche mal definita zona nelle alte valli del Taro e del Santerno. Le arenarie vennero spesso arbitrariamente confuse con quelle della zona 1ª;

5°) Conglomerati, Argille e sabbie Plioceniche. Qua e là a Montese (Modena), sul Dordone (Parma), a Rocca Corneta (Bologna), spuntano piccoli isolotti di arenarie o calcari appartenenti a qualche piano della Creta media e superiore e nel Reggiano anche di terreni più antichi; ma non vennero ancora bene circoscritti.

Le rocce Eoceniche nel Piacentino e nella parte appenninica appartenente al Pavese formano pieghe dirette da N. o da N. N.O. a S. e S. S.E.; e si succedono a guisa delle quinte d'un teatro; quindi normalmente alla direzione geografica della catena montuosa; ma in questa stessa regione, verso

(1) Heinke, Berliner Berichte, *31* (1898), 1395.

la pianura Padana, e nella parte meridionale rimanente, le pieghe si dirigono da N. N.O. o N.O. a S. S.E. o S.E. secondando la direzione geografica dell'Appennino e del Bacino Padano-adriatico. La zona 1ª è quasi esclusiva dell'alta montagna: la 2ª e la 3ª formano ripetute serie spesso assai compresse ed anche rovesciate; nel Modenese e nel Bolognese sono in parte rovesciate ed apparentemente ricoperte dalla ampia zona 1ª. La zona 3ª che dirò sommariamente delle *argille scagliose*, quando siano presenti le zone anteriori, forma quasi sempre la parte interna dei sinclinali. Le zone Neogeniche 4ª e 5ª formano le serie più esterne scendenti verso la pianura; ma la zona 4ª si interna spesso di molto e forma uniclinali o sinclinali talora isolati e stretti od anche invertiti in mezzo all'Eocene.

Un prezioso e riassuntivo studio sulle zone petroleifere Emiliane è stato recentemente pubblicato dagli ingegneri E. Camerana e B. Galdi.

Dall'arenaria (zona 1ª) e dal Calcare ad *Helminthoidea* quando è in alta e compatta serie non escono idrocarburi liquidi o gasosi, a meno che vi sieno strati argillo-marnosi intercalati, come avviene talora nella parte più alta delle rispettive zone. Ne escono a volte attraverso al Pliocene ed al Miocene, ma provengono da zone inferiori ovvero da adunamenti che derivano da queste; il Miocene è talora ricco di fossili svariati e fornito di rocce alquanto bituminose: ma penso che la sede di quegl'idrocarburi sia nelle *Argille scagliose* e che qualunque foro d'importanza si faccia in esse sia suscettibile di dare qualche prodotto gasoso.

Or sono circa nove lustri sono stato dei primi a mostrare che queste sono rocce prettamente sedimentarie, non eruttive, e che si sono depositate in grandi e spesso grandissime profondità, opinioni oggi universalmente ammesse. In pari tempo ho sostenuto, e quasi tutti ora sono d'accordo, che le rocce verdi serpentinose sono vulcaniche, eruttate probabilmente a profondità dei mari e coeve alle *argille*; nè, perciò, cagionarono perturbamenti e fenditure eccezionali in queste. La *Argille scagliose* nei calcari e nei diaspri contenutivi sono una congerie di organismi (Globigerinidae, Spongiari, Radiolarie). Alcuni dei tipi argillosi e calcarei sono colorati in scuro da idrocarburi e nelle sezioni microscopiche presentano tracce di Carbonio d'origine animale. Non già ch'io creda che il Petrolio provenga dai Diaspri, dai Calcari, da Marne argillose chiare o dalle fucoidi contenutevi e meno che mai dalle Serpentine e Diabasi: ma sappiamo che nelle profondità indisturbate dei mari si accumulano masse di sostanze albuminoidi, residui della decomposizione di materiali d'origine animale la più svariata, vertebrati e invertebrati che non hanno lasciato alcun altro indizio di sè. A tale categoria di residui appartiene il supposto *Bathybium* che le dragate più profonde hanno spesso incontrato nei mari. La roccia eminentemente impermeabile alle acque, sebbene talora molto frammentizia pei movimenti risentiti, ha incapsulato e conservato gl'idrocarburi originatisi: è possibile che la di-

stillazione e l'ascensione loro prosegua tuttora, ciò che potrebbe anche essere soggetto di sperimento. Essi per gl' incessanti movimenti che si manifestano in rocce così eterogenee, per migrazione, penetrano nei calcari e nelle rocce neogeniche sovrastanti, e riempiono le fenditure anche capillari fino a che, se queste arrivino a contatto della superficie, si svuotano e si esauriscono.

Non contesto che gl'idrocarburi abbiano in altre regioni origini differenti; ma la geologia mi consiglia di credere che in Italia sia prevalente e forse pure unica l'origine animale.

Superficiale è l'origine del Metano nelle paludi e tale è quella degl' idrocarburi dagli strati anche arenacei, coperti da materiale impermeabile nei nostri stagni littorali recenti ed antichi alternativamente occupati da acque salse, salmastre e dolci. Così può forse verificarsi da molti strati Pliocenici (Montearioso, Montespertoli, Asciano in Toscana). Idrocarburo si sviluppa dalle marne alquanto bituminose a Paternò in Sicilia per lenta distillazione derivata dall'alto gradiente termico a contatto con le lave Etnee. Tracce di Petrolio, dicesi, e tracce d'idrocarburi si svolgono da alcuni Lagoni boraciferi di Toscana per distillazione o meglio per dissoluzione chimica di calcari o d'altre rocce alquanto bituminose traversate, e per simili cause, non già per sintesi interna, tracce d'idrocarburi si svolgono talora, nei nostri vulcani, negli ultimi periodi che chiudono le eruzioni; poichè nei primi, calienti, si verificherebbe la loro dissociazione.

L'attribuire ai detti Idrocarburi una origine sintetica interna, profonda, ha condotto lo Stato a promettere premi, inefficaci, per coloro che approfondassero i pozzi al di là di certe profondità, indipendentemente da altre considerazioni tecniche dedotte da altre regioni petroleifere, non applicabili alle nostre. L'esperienza insegnerà. Da ciò vedesi una volta di più come la scienza regoli, o debba regolare la pratica e deducesi la necessità di giungere in proposito a studî più precisi e bene ordinati.

Mineralogia. — *L'isomorfismo dell'albite con l'anortite.* Nota I del Corrisp. FERRUCCIO ZAMBONINI [1].

Le ricerche termiche di Day e Allen [2], prima, e quelle, poi, ancora più complete di N. L. Bowen [3] hanno dimostrato in modo definitivo che le fasi tricline dei due composti $Na\,Al\,Si_3\,O_8$ e $Ca\,Al_2\,Si_2\,O_8$ possiedono una miscibilità completa allo stato solido. Si è tolto così, una volta per sempre, ogni valore ai dubbî che, a varie riprese, erano stati avanzati in-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

[2] *The isomorphism and thermal properties of the feldspars.* Washington, 1905.

[3] *Die Schmelzerscheinungen bei den Plagioklas-Feldspaten.* Zeitsch. anorg. Chemie 1913, LXXXII, 283.

torno alla reale validità della teoria di Tschermak, la quale considerava, appunto, i plagioclasi come una serie continua di cristalli misti, formati dai due componenti albite ed anortite.

Rimane, però, sempre il fatto che i due composti $Na\ Al\ Si_3\ O_8$ e $Ca\ Al_2\ Si_2\ O_8$ possiedono delle formule chimiche ben diverse, sicchè il loro isomorfismo, indiscutibile, si differenzia assai da quello delle coppie tipiche di sostanze isomorfe, le quali rispondono allo stesso tipo di formola chimica. La differenza, anzi, è così netta, che studiosi di grande valore, come W. C. Brögger (1), e, più tardi, A. Arzruni (2), ritennero opportuno considerare i plagioclasi non come miscele isomorfe, ma, invece, come « miscele morfotropiche », costituite, cioè, da sostanze « chimicamente affini, ma diversamente composte » (Arzruni).

Non va, però, taciuto, che la distinzione, proposta da Arzruni, dei cristalli misti in miscele isomorfe propriamente dette ed in miscele morfotropiche, non appare, al giorno d'oggi, giustificata in alcuna guisa, e fu, del resto, criticata già al suo apparire da studiosi distinti dell'isomorfismo, quali il Retgers (3). Invero, è divenuto sempre più considerevole il numero delle sostanze che, pur presentando miscibilità completa, o, almeno, assai estesa allo stato solido, possiedono formule chimiche notevolmente diverse, sia per il numero, che per la natura degli atomi in esse presenti. Sotto questo punto di vista, il caso dell'albite e dell'anortite è ancora relativamente semplice, perchè le formule di quei due minerali sono formate dallo stesso numero di atomi, e pure uguale è, nei due casi, la somma delle valenze. Quest'ultimo fatto è interessante, perchè, come è noto, in una memoria assai importante, Th. Hiortdahl (4) ha appunto osservato come, in certi casi, esistano intime relazioni cristallografiche fra sostanze che non hanno lo stesso tipo di formula chimica, ma, però, uguale somma delle valenze (s'intende principali).

Finchè si ammetteva che nei reticolati bravaisiani i singoli punti materiali rappresentassero i centri di gravità delle molecole (o di gruppi di molecole), e che nei cristalli misti avvenisse la sostituzione molecola a molecola (o gruppo di molecole a gruppo di molecole), la miscibilità completa allo stato solido dell'albite e dell'anortite si spiegava facilmente. I due componenti puri presentavano, infatti, caratteri cristallografici e di coesione vicinissimi, e, poichè i loro volumi molecolari erano praticamente pressochè identici, si comprendeva senz'altro come in un edificio cristallino

(1) *Die silurischen Etagen 2 und 3 im Kristianiagebiete und auf Eker.* Kristiania 1882, pag. 302. Cfr. anche Zeitsch. für Kryst. 1885, X, 498.

(2) *Physikalische Chemie der Krystalle* 1893, 166-167, 188 etc.

(3) *Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus.* Zeitsch. phys. Chemie 1894, XIV, 40.

(4) *Krystallform der Erdalkali-Molybdate. Die morphotropen Reihen des Scheelit.* Zeitsch. für Kryst. 1887, XII, 416.

dell'uno si potessero sostituire le molecole esistenti con quelle dell'altro, senza determinare perturbazioni notevoli.

Non si spiegava, naturalmente, perchè i due composti, con formule così diverse ed appartenenti, anzi, a due diversi tipi di silicati, presentassero forma cristallina vicinissima. I tentativi di spiegazione avanzati sono numerosi, ma, in gran parte almeno, poco felici. Quelli di Streng, infatti, riferiti in tutti i trattati, non fanno altro, come ebbe giustamente a rimarcare l'Arzruni, che rimettere in onore il sepolto isomorfismo polimero di Scheerer. Tschermak [1] osservò che alluminio e silicio hanno peso atomico molto vicino, il che potrebbe spiegare la sostituzione scambievole dei loro atomi, analogamente a quanto accade per l'azoto ed il carbonio nel caso della calcite e del nitrato di sodio. Naturalmente, questa ragione non poteva invocarsi per il calcio ed il sodio, che hanno peso atomico molto diverso. Tschermak si tolse d'impaccio col seguente periodo, non troppo chiaro, almeno per me: « Da das Natrium einwerthig, das Calcium zweiwerthig erscheint, so kann diese Isomorphie immer nur bei solchen Verbindungen stattfinden, welche in qualitativer Beziehung ungleichartig sind ». In tempi più recenti, Th. V. Barker [2] ha pensato che la differenza in composizione dell'albite e dell'anortite sia della stessa natura di quella che si manifesta nei composti $CuTiF_6 . 4H_2O$, $CuNbOF_5 . 4H_2O$, $CuWO_2F_4 . 4H_2O$, ma, a vero dire, non mi sembra che il confronto sia opportuno. Infatti, mentre i composti indicati, come ha mostrato il Werner, si possono mettere in relazione fra loro mediante la teoria dei numeri di coordinazione, non si può fare altrettanto con l'albite e l'anortite [3]. I. Langmuir [4], poi, fa dipendere l'isomorfismo di questi due minerali dal fatto che essi contengono lo stesso numero di atomi e di elettroni utili. Anche questa spiegazione, per quanto contenga, come vedremo, una parte della verità, non soddisfa a pieno, perchè non mancano davvero esempî di composti che rispondono alle condizioni indicate, ma che, ciò non ostante, non soltanto non sono isomorfi, ma non presentano nemmeno relazioni cristallografiche notevoli. In realtà, noi dobbiamo limitarci a constatare con Groth [5], che nel passaggio dall'albite all'anortite un gruppo Na Si viene sostituito da un gruppo Ca Al, con uguale somma delle valenze principali.

(1) *Ueber die Isomorphie der rhomboëdrischen Carbonate und des Natriumsalpeters.* Tschermak's min. petr. Mitt. 1882, IV. 119.

(2) *Studies in Chemical Crystallography.* Part I. Trans. Chem. Soc. 1912, CI, 2484.

(3) Le formule « coordinative » di Jakob $[SiO_4 . SiO_3 . SiO_2]^{Al}_{Na}$ e $[SiO_6 . SiO_2]^{Al_2}_{Ca}$ non fanno certo risaltare una qualche somiglianza fra albite ed anortite.

(4) *Isomorphism, Isosterism and Covalence.* Journ. Am. Chem. Soc. 1919, XLI, 1543.

(5) *Chemische Krystallographie,* II, 275.

Ora, poichè nel 1916 Vegard e Schjelderup [1], hanno verificato, con le loro belle ricerche sui cristalli misti di KCl e di K Br, la geniale intuizione di Groth, in base alla quale nei cristalli misti deve aversi una sostituzione di natura atomica, ne segue che nei cristalli misti di albite e di anortite non può parlarsi di un gruppo di atomi che ne rimpiazza un altro, ma, invece, di un atomo di alluminio che prende il posto di uno di silicio, di un atomo di calcio che si sostituisce ad uno di sodio. Il Niggli [2] pensa, anzi, che l'alluminio possa sostituirsi al silicio anche in altri silicati. Si tratta, certamente, di fatti che non rientrano nelle ordinarie sostituzioni isomorfe di elementi vicarianti, perchè, in tal caso, un atomo di calcio dovrebbe prendere il posto di due di sodio, come si verifica in tanti minerali. È possibile darci una spiegazione plausibile di queste singolari sostituzioni atomo ad atomo di elementi con valenza differente?

Io credo che si possa dare una risposta affermativa, tenendo conto delle recenti ricerche importantissime di W. L. Bragg [3] sulla distribuzione degli atomi nei cristalli, in base alle quali egli ha potuto calcolare il diametro atomico [4] di varî elementi.

Secondo Bragg, il diametro atomico del silicio è 2.35 Å., mentre quello dell'alluminio è 2.70 Å.: la differenza, come si può vedere dalla tabella del Bragg, è dello stesso ordine di grandezza di quelle che si hanno fra atomi sicuramente vicarianti. Si comprende, pertanto, come nella struttura cristallina dell'albite si possa sostituire un atomo di silicio con uno di alluminio senza determinare modificazioni considerevoli.

Ancora più favorevoli sono le condizioni nel caso del sodio e del calcio, perchè i diametri atomici di questi due elementi, sempre secondo Bragg, sono rispettivamente 3.55 e 3.40 Å. Notevole è anche il fatto, che il minore diametro atomico del calcio rispetto al sodio compensa in buona parte la differenza fra il diametro atomico dell'alluminio e quello del silicio. In complesso, il passaggio dall'albite all'anortite avviene con una differenza, nella somma dei diametri atomici, di soli 0.2 Å., che è praticamente trascurabile, se si tiene conto che si tratta di un complesso di ben tredici atomi.

(1) *Die Konstitution der Mischkrystalle.* Phys. Zeitsch. 1917, XVIII. 93. Nuove esperienze sono state fatte conoscere recentemente dal Vegard: *Die Konstitution der Mischkrystalle und die Raumfüllung der Atome.* Zeitsch. für Phys. 1921, V, 17.

(2) *Lehrbuch der Mineralogie*, pag. 379. Per porre in evidenza che si può passare da albite ad anortite sostituendo ad un atomo di silicio e di sodio della prima rispettivamente uno di alluminio e di calcio, Niggli scrive come segue le formule di Jacob: $\left[SiO_4 \, . \, SiO_2 \, . \, SiO_2\right]^{Al}_{Na}$ e $\left[SiO_4 \, . \, SiO_2 \, . \, AlO_2\right]^{Al}_{Ca}$.

(3) *The arrangement of Atoms in Crystals.* Phil. Mag. 1920 (6ª) XL, 169.

(4) Il diametro della sfera rappresentante un atomo è chiamato dal Bragg, per brevità, il diametro dell'atomo, ed è espresso in unità Ångström.

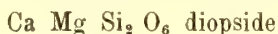
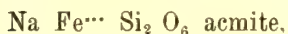
Naturalmente, un atomo di alluminio può prendere il posto di uno di silicio non soltanto per la piccola differenza che esiste fra i diametri atomici dei due elementi, ma anche per il fatto che l'alluminio presenta col silicio delle relazioni interessanti. Esso è, infatti, un elemento spiccatamente anfotero, e può, quindi, assumere la funzione acida che spetta al silicio: inoltre, e ciò è assai importante, esso è uno dei due eterologhi del silicio stesso. A questo complesso di circostanze si deve la possibilità che ha l'alluminio di rimpiazzare il silicio in certi silicati, atomo ad atomo.

Il fatto, poi, che la sostituzione, nell'edificio cristallino dell'albite, di un atomo di alluminio ad uno di silicio è accompagnata da quella di un atomo di calcio ad uno di sodio, presenta, a mio modo di vedere, un interesse particolarissimo, perchè viene a costituire un valido appoggio alle idee di coloro che pensano debbano essere paragonabili alle valenze principali le forze che tengono uniti gli atomi negli edifici cristallini di molte sostanze. Ed invero, noi possiamo pensare, e si tratta di un ragionamento oltremodo spontaneo, che, quando nella struttura dell'albite, fermi restando gli otto atomi di ossigeno con le loro sedici valenze, noi poniamo un atomo di alluminio al posto di uno di silicio, necessariamente, perchè tutte le valenze dell'ossigeno sieno saturate, occorre che l'atomo di sodio venga sostituito da uno di un elemento bivalente, quale è il calcio.

Risulta, così, chiarita anche la regola di Hiortdahl. Nei composti nei quali hanno parte esclusiva od essenziale le valenze principali, perchè nel passaggio da un composto ad un altro mediante sostituzioni di atomi con valenze diverse la forma cristallina non subisca modificazioni profonde, dovrà rimanere inalterata la somma delle valenze, ed il numero degli atomi [1] (o dei radicali).

Alla regola di Hiortdahl ubbidiscono, per esempio, i composti isomorfi

$Ca\ Mg\ Si_2\ O_6$ diopside

e

$Na\ Fe^{\cdots}\ Si_2\ O_6$ acmite,

l'isomorfismo dei quali presenta notevoli analogie con quello dell'albite e dell'anortite. Si ha, infatti, anche in questa seconda coppia di composti, la sostituzione di un atomo di sodio ad uno di calcio, ed il posto del magnesio, bivalente, viene preso dal ferro trivalente, col che rimane costante la somma delle valenze. Ferro e magnesio hanno quasi esattamente, lo stesso diametro atomico (2.80 e 2.85 Å. rispettivamente).

[1] Occorrerà anche, naturalmente, che gli atomi che si sostituiscono presentino relazioni chimiche, strutturali, ecc., senza di che la regola non sarà verificata. La condizione che il numero degli atomi deve restare inalterato non era stata posta da Hiortdahl.

Anche nel caso dell'isogonismo notevole, rimarcato già da J. D. Dana nel 1854 [1], esistente fra i minerali del gruppo olivina R·· R·· SiO_4 e la trifilite Li· Fe·· PO_4, è verificata la regola di Hiortdahl. Si può ancora osservare che un atomo di ferro ferroso può rimpiazzarne senza difficoltà uno di magnesio, che litio e magnesio hanno diametri atomici molto vicini (3.0 e 2.85 Å risp.), e che, infine, il fosforo è uno dei due eterologhi del silicio [2]. Si ha, forse, nell'isogonismo dell'olivina e della trifilite, un indizio intorno alla via da seguire nella interpretazione dei fosfato-vanadio- ed arseniosilicati.

Nella teoria della valenza detta dell'ottetto, proposta da Langmuir [3], l'equazione dell'ottetto è

$$e = 8n - 2p$$

nella quale e rappresenta il numero totale degli elettroni utili negli involucri di tutti gli atomi di una molecola, n il numero degli ottetti e p quello delle coppie di elettroni tenute in comune dagli ottetti stessi. Quando, come si verifica secondo Langmuir [4] nei silicati, $p = 0$, e soltanto l'ossigeno forma ottetti, la relazione $e = 8n$, nella quale n indica il numero degli atomi di ossigeno, diventa l'unica condizione di valenza che deve essere soddisfatta, sicchè due composti saranno isomorfi (come dice Langmuir), o presenteranno semplicemente relazioni cristallografiche (come ritengo più opportuno dire io), quando in essi si avrà lo stesso numero sia di atomi, che di elettroni utili $e = 8n$. Questa condizione di Langmuir è, evidentemente, identica alla regola di Hiortdahl, così come è stata da noi espressa [5]. Le vedute di Hiortdahl vengono pertanto a ricevere una brillante conferma, ed appare chiaro che molto a torto Th. V. Barker [6] aveva affermato « One is forced to the conclusion that equality of valency summation has nothing to do with isomorphism ».

(1) *On the Homoeomorphism o, Mineral Species of the Trimetric System.* Amer. Journ. Sc. 1854 (2a) XVIII, 35.

(2) Il volume molecolare dei due composti è praticamente identico. Assumendo per la trifilite il peso specifico = 3.55 e per la forsterite = 3.2, si hanno, rispettivamente, i valori di 44.4 e 44 per i volumi molecolari.

(3) *The arrangement of electrons in atoms and molecules.* Journal Amer. Chem. Soc. 1919, XLI, 868.

(4) *Isomorphism, Isosterism and Covalence.* Journal Amer. Chem. Soc. 1919, XLI, 1543.

(5) Torno ad insistere sul fatto che la particolare natura degli atomi che si sostituiscono è di importanza essenziale perchè la regola di Hiortdahl sia verificata. L'isosterismo di Langmuir non è applicabile: infatti, Ca^{++} e Na^{+} non sono isosteri, e ciò non ostante albite ed anortite sono isomorfi, mentre Na^{+} e Mg^{++} sono isosteri, ma un'anortite di magnesio non esiste nemmeno.

(6) *Studies in Chemical Crystallography.* Part. I. Trans. Chem. Soc. 1912, CI, 2484.

La regola di Hiortdahl non sarà verificata, invece, quando entrano in campo i numeri di coordinazione o le valenze secondarie. Così, per esempio, possiedono forma cristallina molto vicina i due composti $(NH_4)_2 MoO_2 F_4$ e $(NH_4)_2 Mo O F_5$ nei quali la somma delle valenze non è la stessa, e la sostituzione di un solo atomo di fluoro ad uno di ossigeno è resa possibile dal fatto che, in quei composti, sia l'ossigeno, che il fluoro, non occupano, con un loro atomo, che uno dei sei numeri di coordinazione del molibdeno. Non si hanno, poi, variazioni notevoli nella struttura cristallina, perchè fluoro ed ossigeno hanno diametro atomico quasi identico (1.35 e 1.30 Å rispettivamente).

La considerazione dei diametri atomici ci permette, mi sembra, anche di darci ragione facilmente del come mai la celsiana, che ha la composizione di una anortite di bario, non sia isomorfa con l'albite e l'anortite, ma cristallizzi, invece, nel sistema monoclino e sia isomorfa con l'ortoclasio. La celsiana $Ba Al_2 Si_2 O_8$ si può supporre derivata sia dall'albite, che dall'ortoclasio, per sostituzione, in questi ultimi, di un atomo di silicio con uno di alluminio e di quello di sodio o di potassio con uno di bario. Ora, secondo i calcoli di Bragg, il diametro atomico del bario è 4.20 Å, mentre quelli del sodio e del potassio sono rispettivamente 3.55 e 4.15 Å. In altre parole, il bario ha quasi esattamente il diametro atomico del potassio, mentre diversifica molto dal sodio. Si comprende, allora, come nella struttura cristallina dell'ortoclasio possa sostituirsi un atomo di silicio con uno di alluminio e quello di potassio col bario, senza che la struttura stessa risulti modificata in modo notevole: come conseguenza di questo fatto, ortoclasio e celsiana presenteranno un'ampia miscibilità allo stato solido, la quale risulta chiara non soltanto dalle analisi eseguite sui cristalli misti naturali, ma anche dalle esperienze sintetiche di Dittler [1]. Invece, negli edifici cristallini triclini dell'albite la sostituzione del bario al sodio non potrà che essere limitata, ed i cristalli misti risultanti non potranno essere molto stabili. In realtà, plagioclasi bariferi sono rari e quelli ottenuti sinteticamente da Fouqué e Michel Lévy [2] non hanno le proprietà ottiche dei plagioclasi: anche il loro sistema cristallino è rimasto incerto, ma poichè una direzione di massima estinzione coincide costantemente con l'allungamento dei cristalli, è molto probabile che essi non fossero triclini.

(1) *Ueber das Verhalten des Orthoklas zu Andesin und Celsian* etc. Tschermak's min. petr. Mitt. 1911, XXX, 122.

(2) *Synthèse des minéraux et des roches.* Paris, 1882, pag. 145.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geodesia. — *Determinazione astronomica di azimut eseguita sul M. Pellegrino nel 1920.* Nota di G. CICCONETTI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

Nei giorni 31 Maggio, 1° Giugno e 5 Giugno dell'anno 1920 fu effettuata una misura di azimut astronomico sul vertice trigonometrico di 1° ordine Monte Pellegrino in prossimità e a nord di Palermo.

Gli strumenti necessarî furono tutti gentilmente prestati dal ch.^{mo} prof. C. Mineo, direttore del Gabinetto di Geodesia teoretica della R. Università di Palermo e qui glie ne rendo vive grazie. Alle spese necessarie venne in parte sopperito con un residuo di assegno concesso dalla R. Commissione geodetica italiana per precedenti determinazioni geodetiche-astronomiche in Pisa e dintorni, ed anche ad essa mi è grato porgere i miei ringraziamenti.

Per le misure angolari fu usato un Universale Salmoiraghi con circoli di 27 cm. di diametro (lettura diretta al doppio secondo sulle rotelle dei microscopi) e con cannocchiale diritto montato ad una estremità del suo asse di rotazione. Lo strumento, che inizialmente era stato costruito a cannocchiale spezzato centrale [1], fu poi fatto ridurre a cannocchiale eccentrico dal prof. Venturi che ne diede uno studio esauriente nelle pubblicazioni indicate in nota.

Il valore angolare della parte della livella a cavalletto sui perni del cannocchiale risultò al prof. Venturi di 3",78 nel 1892 in occasione della misura dell'azimut di M. Alfano dalla Martorana e di 3",85 nel 1899 in occasione della misura dell'azimut della Lanterna del Faro dalla stessa stazione [2]. Sei serie di nuove osservazioni eseguite col comparatore di livelle Salmoiraghi appartenente al Gabinetto di Geodesia e Topografia della Regia Scuola Ingegneri, la cui costante è 0",98 per parte di rotella, hanno dato come valor medio della sensibilità della livella azimutale 3",76 e fu questo

[1] A. Venturi, *Relazione sul nuovo strumento universale costruito dall'ing. Salmoiraghi e appartenente al Gabinetto di Geodesia della R. Università di Palermo.* Milano, 1892. — Id., *Azimut di M. Alfano sull'orizzonte della Specola della Martorana in Palermo.* Palermo, 1892.

[2] A. Venturi, *Azimut della Lanterna del Faro sull'orizzonte della Specola della Martorana.* Palermo, 1899.

l valore che servì di base nelle misure della inclinazione dell'asse dei perni del cannocchiale.

Per le determinazioni di tempo, effettuate col metodo di Dollen, cioè colla osservazione di stelle orarie pel verticale della polare, si usò uno dei cronometri di marina (Nardin), a tempo siderale, che avevano servito in precedenti lavori del prof. Venturi.

Il vertice trigonometrico del M. Pellegrino è individuato dall'asse dell'albero semaforico che si eleva sulla terrazza del piccolo fabbricato eretto sulla vetta più alta del monte (m. 600). Per il collocamento dell'Universale si costruì sulla terrazza un pilastrino in muratura sormontato da una grossa pietra quadrata. Il pilastrino si fece poggiare su un robusto muro divisorio e ciò rese necessario allontanarsi dal centro trigonometrico un poco di più di quello che sarebbe stato necessario per la stazione eccentrica. Ma si preferì una buona stabilità dello strumento ad un minor valore dell'eccentricità della stazione, tanto più che questo elemento riusciva misurabile direttamente con molta precisione.

La direzione della quale venne determinato l'azimut astronomico fu quella individuata dal punto trigonometrico di 1° ordine: Specola geodetica della Martorana in Palermo, sul cui pilastrino venne fissata in centro una ordinaria mira notturna a sorgente luminosa elettrica.

La distanza fra il vertice trigonometrico C (asta del semaforo) di M. Pellegrino e quello M (centro del pilastrino) della Martorana si rileva dalla triangolazione fondamentale dello Stato ed è di m. 5750,03. Detto S il centro del pilastrino della stazione eccentrica sul M. Pellegrino, la misura degli elementi di riduzione condusse ai valori

$$SC = \text{m}\ \ 2{,}919 \qquad \widehat{CSM} = 30^\circ 24'.$$

Per un osservatore in S che guarda M, il vertice C rimane alla sinistra.

Con questi dati si ottenne come riduzione in centro dell'azimut misurato: $+56'',00$.

All'atto di togliere la mira dalla Martorana, uno scrupoloso esame della sua posizione condusse ad accertare una lievissima eccentricità di $1^{mm},7$ nel senso di ingrandire l'azimut. La correzione relativa è dunque $-0'',06$.

La distanza zenitale sotto cui appariva la mira della Martorana risultò di $95^\circ 40'$, epperò nelle osservazioni di azimut fu sempre tenuto conto della inclinazione dell'asse dei perni del cannocchiale sia nelle collimazioni della polare sia in quelle della mira.

Per ogni sera di osservazioni di azimut si fece una determinazione di tempo osservando ad occhio e ad orecchio, al solo filo medio verticale del

reticolo e nelle due posizioni coniugate del cerchio verticale, la polare ed una stella equatoriale. Le coordinate della polare, tolte dalla *Connaissance des temps*, furono ambedue corrette per l'aberrazione; per le equatoriali si corresse la sola ascensione retta.

Ecco il riassunto delle determinazioni di tempo che, come quelle di azimut, furono rese impossibili nei giorni 2, 3, 4 Giugno dal vento e dal cielo nuvoloso.

Data	Stelle osservate	Indicaz. cronom. media	Correz. al tempo sider. (Stato assoluto)
		h m	h m s
1920. Maggio 31	α Urs. min. - β Librae α Urs. min. - [γ Librae]	14.20	+ 0.52.38,5
" Giugno 1	α Urs. min. - 109 Virginis α Urs. min. - β Librae	13.54	0.52.38,2
" " 5	α Urs. min. - 20 Librae α Urs. min. - β Librae	14.10	0.52 37,4

Con questi stati assoluti cronometrici si calcolarono gli angoli orari e gli azimut della polare negli istanti di puntamento per le osservazioni di azimut che ebbero luogo per gruppi, ciascun gruppo effettuandosi, con due misure coniugate, secondo lo schema consueto: *Mira-Polare-Polare-Mira*. Ad ogni coppia di gruppi veniva ruotato il cerchio orizzontale di 15° ed a metà lavoro fu invertito il cannocchiale sui suoi appoggi.

Qui appresso sono riportati i risultati delle osservazioni eseguite.

Gli azimut della polare e quindi l'azimut della mira furono calcolati colle note formole giovandosi della Tav. 33 di Albrecht. Nella colonna intestata c_m sono indicati i valori della costante di collimazione dedotti dai puntamenti della mira ed in quella intestata $c_m - c_p$ sono trascritte le differenze fra i valori della costante di collimazione ottenuti dalla mira e quelli corrispondenti risultanti dalla osservazione della polare. Le espressioni differenziali riportate nell'ultima colonna furono calcolate colla formola consueta che nel caso attuale, pel valore assunto della latitudine $\varphi = 38°09'51'',7$ (latitudine geodetica) e pel valor medio della declinazione della polare $\delta_m = 88°52'32'',5$ diviene

$$da'' = \{[9,57329] \cos t + [7,76143] \cos 2t\} \, d\alpha^s$$
$$+ \{[0,10444] \operatorname{sen} t + [8,29258] \operatorname{sen} 2t\} \, d\delta''$$
$$- [8,29258] \operatorname{sen} t \, d\varphi''$$

dove i numeri fra parentesi quadre rappresentano i logaritmi decimali dei coefficienti che sostituiscono.

Data	Lembo	Gruppo	Azimut della mira	c_m	$c_m - c_p$	Espressioni differenziali
1920						
Maggio 31	170°	I	171°52′56″,05	− 9″,3	− 4″,0	$da'' = -0,37\, d\alpha^s + 0,03\, d\delta'' - 0,00\, d\varphi''$
		II	56,30	7,4	2,2	0,37 −0,06 0,00
	185	III	56,05	9,2	3,6	0,36 0,20 0,00
		IV	57,60	7,6	1,2	0,36 0,29 0,00
	200	V	55,90	8,8	3,0	0,31 0,67 +0,01
		VI	56,70	8,1	2,9	0,30 0,73 0,01
	215	VII	59,05	7,9	3,0	0,29 0,78 0,01
		VIII	55,20	9,3	2,9	0,28 0,83 0,01
Giugno 1	230	IX	57,90	11,4	2,4	$da'' = -0,37\, d\alpha^s - 0,07\, d\delta'' - 0,00\, d\varphi''$
		X	54,05	10,1	0,9	0,37 0,02 0,00
	245	XI	54,65	8,2	2,1	0,37 0,11 0,00
		XII	55,10	7,3	1,9	0,36 0,18 0,00
	260	XIII	59,95	10,9	1,0	0,33 0,59 0,01
		XIV	55,60	10,2	4,6	0,32 0,64 0,01
	275	XV	52,65	8,5	5,4	0,31 0,68 0,01
		XVI	56,50	7,9	1,8	0,30 0,73 0,01
	290	XVII	57,70	7,5	1,5	0,29 0,78 0,01
		XVIII	59,55	8,5	2,2	0,28 0,81 0,01
Giugno 5	305	XIX	53,75	9,5	2,4	$da'' = -0,37\, d\alpha^s + 0,14\, d\delta'' - 0,00\, d\varphi''$
		XX	56,05	8,9	1,9	0,37 +0,05 −0,01
	320	XXI	55,30	8,3	1,9	0,37 −0,02 0,00
		XXII	58,05	6,5	+ 0,3	0,37 0,10 0,00
	335	XXIII	57,00	7,5	− 1,4	0,37 0,17 0,00
		XXIV	55,65	7,8	2,0	0,36 0,25 0,00

Risulta come valore medio dell'azimut della mira osservato

$$171^\circ 52' 56'',35 \pm 0'',37 \text{ (errore medio)}$$

e applicando le riduzioni in centro per la stazione e per la mira si ha come valore definitivo dell'*azimut astronomico della Martorana sull'orizzonte del M. Pellegrino*:

$$A = 171^\circ 53' 52'',29 \pm 0'',37 \qquad \text{Epoca } 1920,\ 42$$

$$dA'' = -0,34\, d\alpha^s - 0,35\, d\delta'' + 0,004\, d\varphi'' .$$

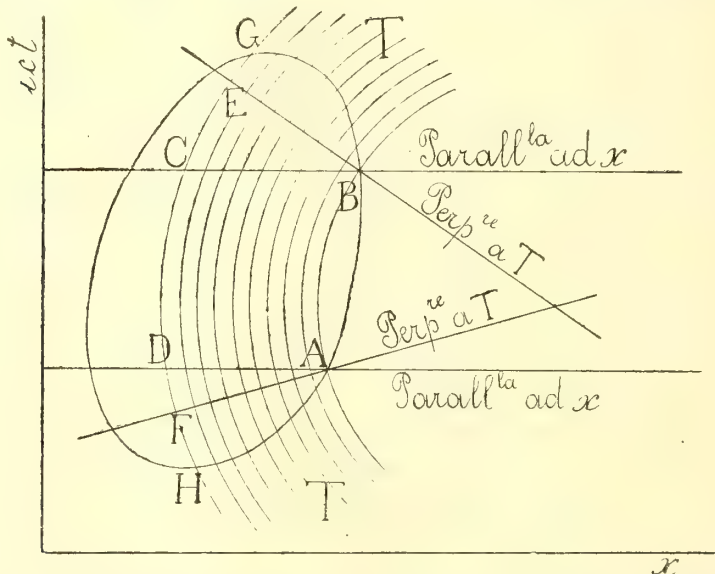
L'azimut geodetico della Martorana sull'orizzonte del M. Pellegrino è

$$171^\circ 53' 52'',77$$

e quindi

$$A_{geod.} - A_{astr.} = +0'',48$$

Relatività. — *Correzione di una grave discrepanza tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche. Inerzia e peso dell'elettricità.* Nota II di ENRICO FERMI, presentata del Corrisp. G. ARMELLINI.

Per poter applicare il principio di Hamilton dobbiamo sottoporre le nostre variazioni all'ulteriore condizione di annullarsi sul contorno del campo quadridimensionale G di integrazione. Con tale condizione se applichiamo il sistema di variazione A il campo di integrazione si riduce a ABCD, poichè nei campi BGC, ADH i δx_i si annullano dovendo annullarsi sul contorno del campo, e quindi nei segmenti BG, AH ed aver valore costante per t

costante. Per la stessa ragione, se invece che il sistema di variazioni A adottiamo quello B, il campo di integrazione si riduce ad ABEF. È ora ben evidente che la variazione A è in contraddizione colla teoria della relatività poichè essa non ha carattere invariante nello spazio-tempo; prendendo a base lo spazio arbitrario x, y, z. La variazione B possiede invece il desiderato carattere invariante prendendo sempre a base lo spazio perpendicolare al tubo, ed è perciò certamente da preferire all'altra.

Indichiamo secondo l'opportunità con (t, x, y, z) o con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate di tempo e spazio e sia F_{ik} il campo elettromagnetico.

Il principio di Hamilton, che riassume le leggi meccaniche e quelle di Maxwell-Lorentz ci dice che [1]:

La variazione dell'azione complessiva deve essere nulla per ogni variazione conforme ai vincoli e che si annulli sul contorno del campo di integrazione G. Nel nostro caso l'azione è semplicemente quella delle cariche elettriche, perchè le uniche quantità che facciamo variare sono le x_i.

Ponendo tale variazione $= 0$ troviamo l'equazione:

$$\sum_{ik} \iint d\,e\, F_{ik}\, \delta x_i\, dx_k = 0 \tag{1}$$

dove la prima integrazione è fatta sugli elementi di carica $d\,e$ del sistema, e la seconda lungo quegli archi della linea oraria descritta da $d\,e$ che sono contenuti nel campo G. Dobbiamo ora esaminare separatamente le conseguenze dei sistemi di variazioni A e B.

Conseguenze del sistema di variazioni A. In questo caso il campo di integrazione è ABCD; se t_1 e t_2 sono i tempi di A e B, osservando che i δx_i dipendono solo dal tempo e che $\delta t = 0$ si vede che (1) diventa:

$$\sum_{ik} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta x_i \int d\,e\, F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0 \quad (i = 1\,,2\,,3)\,,(k = 0\,,1\,,2\,,3)\,.$$

Siccome poi i dx_i sono funzioni qualunque del tempo ne ricaviamo le tre equazioni:

$$\sum_{k} \int d\,e\, F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0$$

cioè se E ed H rappresentano le forze elettrica e magnetica:

$$\int \left\{ E_x + \frac{1}{c}\left(\frac{dy}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_y\right)\right\} d\,e = 0$$

e le due analoghe.

Se all'istante che si considera la velocità del sistema è nulla nel riferimento $(t\,, x\,, y\,, z)$ le tre equazioni precedenti si riassumono nell'unica vettoriale:

$$\int E\, d\,e = 0\,. \tag{2}$$

Nelle trattazioni ordinarie tale equazione si ammette a priori. L'abbiamo dedotta col principio di Hamilton per mostrare il difetto della sua origine. Osserviamo ora che E è la somma di una parte $E^{(i)}$ dovuta al sistema stesso, e di una parte $E^{(e)}$ dovuta a cause esterne. La (2) diventa perciò:

$$\int E^{(i)}\, d\,e + \int E^{(e)}\, d\,e = 0\,.$$

[1] Weyl-Raum, Zeit, Materie, pag. 194 segg. Berlin, Springer; 1921.

D'altra parte sia il calcolo diretto, che la ben nota considerazione del momento elettromagnetico (1) mostrano che il primo integrale è $= -\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\boldsymbol{\Gamma}$, essendo $\boldsymbol{\Gamma}$ l'accelerazione. Il secondo integrale rappresenta invece la forza esterna totale F. Troviamo così:

$$F = \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\boldsymbol{\Gamma},$$

che confrontato con l'equazione fondamentale della dinamica del punto, ci dice che la massa è $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$

Conseguenze del sistema di variazioni B. In questo caso il campo di integrazione è ABEF. Pensiamolo diviso in infiniti strati infinitesimi, per mezzo di infinite sezioni normali del tubo. Per uno di essi ammettiamo poi che (t, x, y, z) sia il riferimento di quiete. Per esso sarà allora $\delta t = 0$, $\delta x, \delta y, \delta z$ costanti arbitrarie: $dx = dy = dz = 0$ perchè il riferimento è di quiete; $dt =$ spessore dello strato $= d\tau(1 - k \times P - 0)$ se $P - 0$ è il vettore con origine nel punto 0 dove una linea oraria L_0 generica ma fissata, incontra lo strato, e termine in P dove lo strato è incontrato dalla linea oraria descritta da de, e k rappresenta il vettore curvatura di L_0 nel punto 0. Il contributo del nostro strato all'integrale (1) diventa con ciò:

$$\int de(F_{10}\,\delta x + F_{20}\,\delta y + F_{30}\,\delta z)\,(1 - k \times P - 0)\,d\tau$$

se $\boldsymbol{\Gamma}$ è l'accelerazione si ha però $k = -\boldsymbol{\Gamma} : c^2$; osserviamo inoltre che nell'integrazione su de $\delta x, \delta y, \delta z, d\tau$ sono costanti; allora l'integrale precedente diventa:

$$-d\tau\left[\delta x\int E_x\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times P - 0}{c^2}\right)de + \delta y\int E_y\left(1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times P - 0}{c^2}\right)de + \delta z\int E_z\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times P - 0}{c^2}\right)de\right].$$

Dovendo tale espressione annullarsi per tutti i possibili valori di δx, $\delta y, \delta z$ troviamo tre equazioni che si riassumono nell'unica vettoriale:

$$\int E\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times P - 0}{c^2}\right)de = 0. \tag{3}$$

(1) Richardson, loc. cit.

Tale equazione sostituisce (2) e conduce come massa elettromagnetica al valore $u : c^2$. Poniamo, infatti, come sopra $E = E^{(i)} + E^{(e)}$ ed osserviamo che si ha ancora $\int E^{(i)}\, de = -\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\,\Gamma$. Troviamo:

$$\int E^{(e)}\, de + \int E^{(e)} \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2}\, de - \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\,\Gamma + \int E^{(i)} \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2}\, de = 0 .$$

Di qui segue che $E^{(e)}$ è dell'ordine di grandezza ([1]) di Γ. Se trascuriamo i termini in Γ^2 possiamo sopprimere il secondo integrale; ponendo come sopra $F = \int E^{(e)}\, de$, si ha dunque:

$$(4) \qquad F - \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\,\Gamma + \int E^{(i)} \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2}\, de = 0 .$$

Per calcolare l'ultimo integrale osserviamo che $E^{(i)}$ è la somma della forza di Coulomb $= \int \frac{P - P'}{r^3}\, de'$ (dove P è il punto potenziato, P′ il punto potenziante di carica de' ed r la distanza PP′) e di una parte contenente Γ che darebbe termini in Γ^2, da trascurarsi. L'integrale in questione diventa dunque:

$$\frac{1}{c^2} \iint \frac{P - P'}{r^3} (\Gamma \times P - 0)\, de\, de'$$

oppure scambiando P con P′ e prendendo la semisomma dei valori ottenuti

$$\frac{1}{2c^2} \iint \frac{P - P'}{r^3} (\Gamma \times P - P')\, de\, de'$$

tale integrale si calcola subito nel caso della simmetria sferica ([2]) e risulta $= \frac{1}{3}\frac{u}{c^2}\,\Gamma$. Sostituendo in (4) troviamo dunque:

$$F = \frac{u}{c^2}\,\Gamma$$

cioè la massa elettromagnetica $= u \cdot c^2$.

([1]) Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è $\frac{\Gamma l}{c^2}$, essendo l la massima lunghezza che interviene nel problema.

([2]) Basta perciò prender la media del suo termine generale per tutte le possibili orientazioni del segmento PP′, osservando che si ha:

$$\text{media di } (P - P')(\Gamma \times P - P') = \frac{1}{3} r^2\, \Gamma .$$

Matematica. — *Sulla durata delle oscillazioni di una sfera vibrante radialmente in un fluido.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. In una Nota [1] pubblicata in questi Rendiconti, ho dimostrato che le vibrazioni semplici di una sfera vibrante radialmente in un fluido perfetto sono caratterizzate dalle equazioni:

$$u'' + \frac{2}{r}u' = \left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{2}{r^2}\right)u : \qquad 0 \leq r \leq R$$

$$\varrho a^2 \left[\frac{1}{R} + \frac{\lambda}{c}\right] u'(1) + \left[2\varrho \frac{a^2 - 2b^2}{R}\left(\frac{1}{R} + \frac{\lambda}{c}\right) + \varrho_1 \lambda^2\right] u(1) = 0 , \quad r = R$$

nelle quali: a, b sono le velocità di propagazione delle onde longitudinali, e trasversali nel vibratore, c è la velocità del suono nel fluido, ϱ è la densità della sfera, ϱ_1 quella del fluido. La parte reale e il coefficiente di i nell'espressione $e^{\lambda t}u$ dànno possibili spostamenti.

Si facciano le posizioni:

$$A = \frac{\varrho a^2}{R^2} ; \; B = \frac{\varrho a^3}{cR^2} ; \; h = 2\frac{a^2 - 2b^2}{a^2} : \; \alpha = \frac{\varrho_1 a^2}{R^2} ; \; x = \frac{r}{R}$$

e si ponga λ in luogo di $\frac{\lambda R}{a}$. Il sistema cui soddisfanno le soluzioni semplici acquista la forma:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u'' + \frac{2}{x}u' = \left(\lambda^2 + \frac{2}{x^2}\right)u \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (A + B\lambda)\, u'(1) + [h(A + B\lambda) + \alpha\lambda^2]\, u(1) = 0 , \\ u(0) = 0 . \end{cases}$$

L'ultima condizione deriva da ovvie considerazioni di continuità dello spostamento.

Le costanti A, B, h, α soddisfanno alle diseguaglianze:

$$A > 0 \qquad B > 0 \qquad \alpha \geq 0 \qquad h \geq -1 .$$

[1] *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Rendiconti Acc. dei Lincei. Vol, XXI, serie V, 2° semestre, pag. 20 e seguenti.

Metterò questo sistema sotto la forma:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (x^2 u')' = (\lambda^2 x^2 + 2) u \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u'(1) + (h + \alpha l) u(1) = 0 : \qquad u(0) = 0 ; \qquad l = \dfrac{\lambda^2}{A + B\lambda} . \end{cases}$$

Se una sfera ancora di raggio R e della stessa sostanza della precedente vibra in un fluido di densità ϱ_0, e poniamo $\alpha_1 = \frac{\varrho_1 a^2}{R^2}$, le sue vibrazioni semplici saranno caratterizzate dal nuovo sistema:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} (x^2 v')' = (\mathit{\Lambda}^2 x^2 + 2) v \\ v'(1) + (h + \alpha_1 L) v(1) = 0 : \qquad v(0) = 0 ; \qquad L = \dfrac{\mathit{\Lambda}^2}{A + B\mathit{\Lambda}} . \end{cases}$$

Le soluzioni (λ, u) del sistema (II) corrispondano biunivocamente alle soluzioni $(\mathit{\Lambda}, v)$ del sistema (III) per modo che quando α_1 tende ad α la soluzione $(\mathit{\Lambda}, v)$ tenda alla (λ, u).

Dai sistemi (II) e (III) discende facilmente:

$$(v u' - v' u)_{x=1} = (\lambda^2 - \mathit{\Lambda}^2) \int_0^1 x^2 uv \, dx .$$

Usando poscia delle condizioni ai limiti si deduce ancora:

$$(1) \qquad (\alpha_1 L - \alpha l) u(1) v(1) = (\lambda^2 - \mathit{\Lambda}^2) \int_0^1 x^2 uv \, dx .$$

Ammesso che λ sia funzione derivabile di α, dalla (1), dividendo per $\lambda^2 - \mathit{\Lambda}^2$ e passando al limite per $\alpha_1 = \alpha$, si ottiene:

$$\frac{1}{2\lambda} \left[\frac{d\alpha}{d\lambda} l + \alpha \frac{dl}{d\lambda} \right] = - \frac{\int_0^1 x^2 u^2 \, dx}{u(1)^2} .$$

Da questa infine discende:

$$(2) \qquad \frac{d\lambda}{d\alpha} = - \frac{l u(1)^2}{\alpha \dfrac{dl}{d\lambda} u(1)^2 + 2\lambda \int_0^1 x^2 u^2 \, dx} .$$

Usiamo della (2) per ricavare il valore di $\frac{d\lambda}{d\alpha}$ per $\alpha = 0$. Se $\alpha = 0$ il sistema (II) diviene:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} (x^2 u')' = (\lambda^2 x^2 + 2) u , \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ u'(1) + h u(1) = 0 , \qquad u = 0 , \end{cases}$$

sistema che caratterizza le vibrazioni radiali che dànno tensioni superficiali nulle. Gli autovalori λ, come le corrispondenti funzioni che soddisfanno al sistema (IV) sono imaginari puri. Poniamo allora

$$\lambda = i\lambda_0 \quad , \quad u = i u_0 ,$$

con λ_0, u_0 reali.

La (2) diviene allora:

$$\left.\frac{d\lambda}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{\lambda_0 u_0(1)^2}{2\int_0^1 x^2 u_0^2 dx} \, \frac{B\lambda_0 + iA}{A^2 + B^2\lambda_0^2}. \tag{2}$$

Poniamo:

$$\lambda = -m + i n ,$$

n e λ_0 saranno dello stesso segno; supponiamo positivi. La (2) si scinde nelle relazioni:

$$\left.\frac{dm}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\lambda_0^2 u_0(1)^2 B}{2\int_0^1 x^2 u_0^2 dx \, (A^2 + B^2\lambda_0^2)}$$

$$\left.\frac{dn}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{A\lambda_0 u_0(1)^2}{2(A^2 + B^2\lambda_0^2)\int_0^1 x^2 u_0^2 dx}.$$

Per α sufficientemente piccolo si ha dunque:

$$m > 0 \tag{3}$$

$$n(\alpha) < \lambda_0 = n(0). \tag{4}$$

La (3) è caso particolare di un teorema generale già dimostrato (Cfr. Nota citata pag. 25). La (4) dà il teorema: *se* $\alpha = \frac{\varrho_1 a^2}{R^2}$ *è una quantità sufficientemente piccola, le durate delle oscillazioni della sfera vibrante radialmente nel fluido, sono maggiori delle corrispondenti oscillazioni della sfera stessa vibrante nel vuoto.*

Consegue poi, per α sufficientemente piccolo, la seguente espressione della frequenza della sfera vibrante nel fluido:

$$n(\alpha) = \lambda_0 - \frac{A\lambda_0 u_0(1)^2}{2(A^2 + B^2\lambda_0^2)\int_0^1 x^2 u_0^2 dx}\,\alpha.$$

In una successiva Nota estenderò il risultato ora ottenuto e quello (Cfr. la Nota citata al principio) relativo al segno della parte reale dei valori eccezionali λ ad una equazione autoaggiunta generica.

Fisica. — *Potere emissivo dell'argento in rapporto alla cristallizzazione* [1]. Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal Socio M. Cantone.

Continuando lo studio del potere emissivo dei metalli ho notato che l'argento portato a 700° C. e poi raffreddato acquista un aspetto singolarmente splendente, il quale si conserva anche per parecchi mesi dopo il riscaldamento. A giudicare dalla curva di emissione (fig. 1) si deve trattare

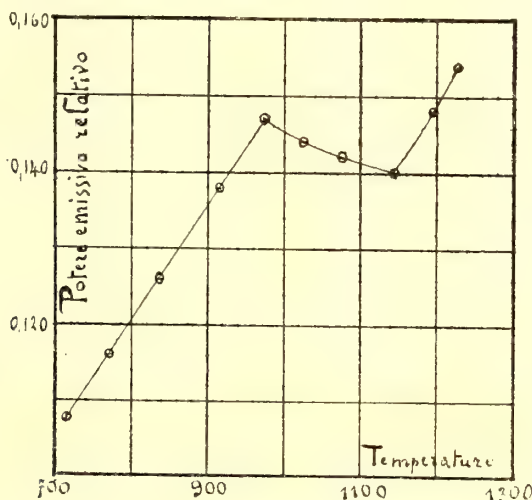



Fig. 1.

di una modificazione di struttura, poichè la trasformazione si compie con assorbimento di calore [2], come si può anche argomentare dai valori numerici.

Infatti, da misure eseguite col solito metodo [3] si ottiene per l'energia

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) M. Kahanowicz, *Punti di trasformazione di alcuni metalli e leghe in rapporto al potere emissivo*. Reale Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 5°-6°, p. 178.

(3) M. Kahanowicz, *Potere emissivo di alcuni metalli ed ossidi*. Reale Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°-4°, p. 132.

irradiata il sistema di valori:

E	3.8	5.6	8.3	13.1	17.6	21.2	25.6	32.1	40.8	46.8
T	714.4	773.0	837.5	916.8	973.0	1023.0	1078.1	1143.9	1197.0	1227.0
$\frac{E}{CT^4}$ [1]	0.108	0.116	0.126	0.138	0.147	*0.144*	*0.142*	*0.140*	0.148	0.154,

dai quali si deduce una legge di emissione, fino a 700° C., simile a quella riscontrata per gli altri metalli (platino, oro, nichel) e che nel nostro relativo sistema di misure viene espressa da

$$E = 20{,}19 \times 10^{-15}\, T^{5.0},$$

dove E indica l'energia emessa dalla lamina alla temperatura assoluta T; da 700 a 900° C. circa si osserva una diminuzione del potere emissivo, dovuta alla sottrazione del calore per la trasformazione; verso 920° C. il potere emissivo riprende l'andamento crescente, ma con una legge diversa rispetto alle condizioni normali del metallo.

Una ricerca micrografica ha messo in evidenza che le modalità dell'emissione possono essere in rapporto colla cristallizzazione che si compie alle alte temperature, a partire dallo stato quasi amorfo dipendente dai processi meccanici di lavorazione. Sono state rilevate alcune fasi del fenomeno interessanti per la metallografia.

Il processo, a quanto pare, si compie nel modo seguente: la cristallizzazione si rivela in principio, verso 700° C., con un ammasso disordinato di piccoli granuli cristallini; cominciano però nello stesso tempo a percepirsi tracce di poligoni, indizio di una generale simmetria (fig. 2). Col crescere della temperatura queste linee poligonali diventano sempre più marcate; a 800° C. la lamina si presenta ricamata da tutta una rete cellulare (fig. 3). A 850° C. la rete poligonale appare completa, ed i granuli assumono una distribuzione filiforme, disponendosi addossati uno all'altro nel senso longitudinale (fig. 4), onde ad occhio nudo la lamina si presenta tutta striata. A 870° C., in corrispondenza al minimo nella curva di emissione, si nota un cambiamento radicale nell'edifizio cellulare: compaiono cristalli macroscopici, ben disegnati nei contorni, con configurazioni svariatissime (fig. 5). Con ciò la cristallizzazione è finita, poichè l'aumento di temperatura non porta ulteriormente alcuna modificazione nell'assetto cristallino (fig. 6), e solo il lavoro di disgregamento della fusione incipiente determina l'incurvamento delle regioni periferiche (fig. 7).

Le micrografie furono eseguite col microscopio metallografico di Koristka e coll'ingrandimento di 100 diametri.

[1] $C = 1{,}34 \times 10^{-10}$ rappresenta, nel nostro sistema di misure relative, la costante della legge di Stefan-Boltzmann.

Fig. 2. 700° C.

Fig. 3. 800° C.

Fig. 4. 850° C.

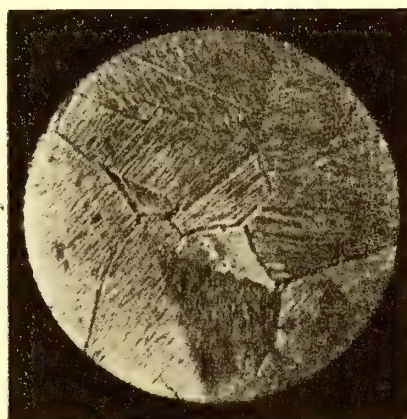



Fig. 5. 870° C.

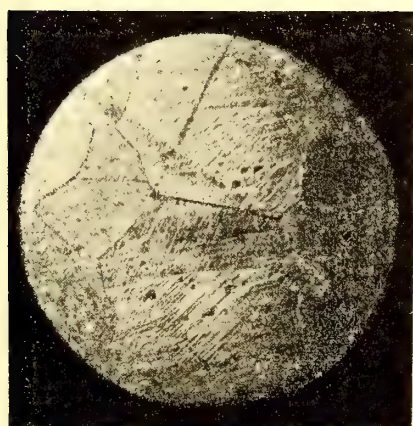



Fig. 6. 920° C.

Fig. 7. 958° C.

Fisica terrestre. — *Il terremoto di Caldarola (Marche) del 28 agosto 1921.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio V. Cerulli.

1. Fin dalle prime ore del 28 agosto, una domenica piovosa, si cominciarono a sentire in Caldarola e paesi circonvicini molte scosse di varia intensità, che culminarono in una fortissima alle $11^h\frac{3}{4}$ e per la quale caddero parecchi camini, si riaprirono fenditure in moltissimi edifici e se ne verificarono anche delle nuove. Lo spavento fu grandissimo, specialmente nelle chiese affollate, essendo giorno di festa; ma se dopo questi scuotimenti il suolo avesse ripresa l'ordinaria stabilità, la popolazione si sarebbe ben presto quietata. Invece, il ripetersi di altre scosse, sebbene lievi, nei giorni successivi, ma con allarmante accentuazione, per numero ed intensità, tra il 6 e l'8 settembre, provocò un panico tale, che il sindaco di Caldarola si rivolse al R. Ufficio Centr. di Meteorologia e Geodinamica, affinchè fosse inviata colà una persona per studiare il fenomeno e calmare gli animi, così eccitati che numerose famiglie dormivano all'aperto in baracche improvvisate, o sotto tende militari, ed alcune persone si erano decise a lasciare la città. In seguito a ciò, il Ministero per l'Agricoltura, da cui dipende il predetto Ufficio, invitò lo scrivente a recarsi al più presto nella regione colpita. Giunto a Caldarola il 23 settembre, esaminai i danni, raccolsi notizie e non mancai dal visitare i paesi vicini e, in seguito, Sarnano, Camerino, Tolentino, Macerata, Osimo, Ancona, Foligno, Visso, Spoleto e Cerreto di Spoleto, sia per informazioni sul numero e l'entità delle scosse ivi segnalate, sia per l'eventuale funzionamento di strumenti sismici negli Osservatori esistenti in alcune fra dette località. Il 5 ottobre la mia missione era terminata, ed ora — in attesa che a suo tempo si possano pubblicare le numerose notizie da me raccolte insieme a quelle chieste dall'Ufficio anzidetto — credo opportuno di comunicare le principali conclusioni cui sono pervenuto.

2. Nessun dubbio che l'epicentro cada proprio in Caldarola (lat. 43° 8',3 N.; long. 13°13',5 E. Gr.; altit. 250 m.) o sue immediate adiacenze, e che la forza ivi spiegata dalla principale scossa del 28 agosto abbia raggiunto il grado VII-VIII della *scala sismica* « Mercalli ». A pochi chilometri di distanza, l'intensità scese già al grado VI-VII e la relativa *isosista* passa approssimativamente per Belforte del Chienti (3^{km} N.N.E. Caldarola), Camporotondo (3^{km} E.), Cessapalombo (4^{km} S.E.), Montalto (4^{km} S.), Vestignano (3^{km} S.S.W.), Croce (2^{km} S.W.), Pievefavera (3^{km} W.), Borgiano

(3^{km} N.W.). L'area di questa isosista, supposta circolare e di $3^{km}\frac{1}{2}$ di raggio, ammonta a quasi 40 km². L'isosista V-VI, tocca Tolentino (9^{km} N.E.), San Ginesio (8^{km} S.E.), Paganico (frazione di Camerino, 9^{km} W), e presenta una superficie quasi circolare di 9^{km} di raggio e di c. 250 km.² di estensione. L'isosista IV-V rasenta Pollenza (17^{km} N.E.), Sarnano (13^{km} S.E.), Pieve Bovigliana (14^{km} S W.), Muccia (16^{km} W.S.W.), Camerino (13^{km} W.), e prendendo la media (15^{km}) per il raggio dell'area racchiusa, si arriva ad una superficie di c. 700 km². L'isosista III IV passa approssimativamente per Cingoli (26^{km} N.). Appignano (27^{km} N.N.E.), Macerata e Pausula (26^{km} N.E), S. Vittoria al M. (27^{km} S.E.), Serravalle di Ch. (25^{km} W.S.W.), e racchiude un'area presso a poco circolare di c. 25^{km} di raggio e 2000 km² di estensione. Infine, l'isosista II-III si estende fino a Fermo (40^{km} E), Cerreto di Spoleto (45^{km} S.S.W), Foligno (40^{km} S.W.), Fiuminata Cast. (25^{km} W.), Fabriano (32^{km} N.W.). Ammettendo 40 km. pel raggio medio di questa isosista, supposta circolare, si arriverebbe ad una superficie di c. 5000 km², ciò che dimostra come lo scuotimento abbia avuta una limitatissima propagazione, tanto da non essere stato percepito neppure sul litorale Adriatico, e fa giustamente pensare alla poca profondità del focolare sismico.

Però, le onde sismiche, ancor più affievolite, si propagarono a maggiori distanze, traversando l'Appennino e perturbando i sismografi del R. Osservatorio Geod. di Rocca di Papa a ben 165^{km} in direzione S.S.W. Disgraziatamente non esisteva, o non era in azione, o funzionava male qualche strumento sismico in alcuni osservatorî delle Marche, dell'Umbria e degli Abruzzi, e pare che il passaggio delle onde sismiche sia passato inosservato agli strumenti dell'Osservatorio Xim. di Firenze (170^{km} N.W.), stando almeno a quel Bollettino sismico.

3. Oltre alla principale scossa del 28 agosto, registrata a Rocca di Papa con notevole sismogramma cominciato a $11^h 45^m 27^s$, ne furono registrate altre cinque, e precisamente: una lievissima a $6^h 33^m 33^s$, una lieve a $6^h 36^m 30^s$, una mediocre a $11^h 32^m 5^s$, altra lievissima a $11^h 48^m 31^s$ e lieve a $13^h 49^m 2^s$. Evidentemente si tratta della ripercussione delle scosse più notevoli a Caldarola e dintorni e che furono segnalate, più o meno lievi, fino a una trentina di chilometri. Alla notevole replica delle $13^h 49^m$ c. — per la quale crollò una casa fatiscente a Sarnano, fortunatamente già sgombrata dopo la forte scossa precedente delle $11^h\frac{3}{4}$ — ne seguirono altre poche e piuttosto lievi fino al 6 settembre; ma alla sera di questo giorno crebbero per numero ed intensità fino verso le ore 12 del giorno 8 e, nuovamente, nei giorni 20 e 21, e tra le altre se n'ebbe una sensibilissima a $0^h\frac{1}{4}$ c. del 21 settembre, segnalata fino a Foligno e forse anche a Cerreto di Spoleto (45 km.). Dopo nuove accentuazioni il 25 e 26 settembre, e il 1° e 5 ottobre, le scosse cessarono a Caldarola a partire dal 6 successivo, e poi non si ebbero che quattro lievi scosse il 2, 3, 20 e 26 novembre nel vicino

Camporotondo [1]. È singolare che nessuna delle numerose repliche, anche abbastanza forti, del settembre ed ottobre, sia stata registrata a Rocca di Papa; e da ciò potrebbe forse arguirsi o che la loro intensità sia stata esagerata, a causa degli animi eccitati, e che perciò sia rimasta ben al di sotto in confronto delle scosse del 28 agosto, o che il focolare sismico siasi, in seguito, reso più superficiale in confronto di quello che produsse le prime e forti scosse del 28 agosto, una quindicina, le quali, quasi tutte, si estesero a notevoli distanze.

Tanto a Caldarola, quanto nei villaggi vicini, le scosse erano sussultorie e a tonfo, come se fossero prodotte da mine sotterranee, ed erano precedute o accompagnate da boato, paragonato in alcune località a colpo di cannone ed in altre a folata di vento. Sovente si udivano i boati senza scosse e in taluni giorni quest'ultime erano avvertite in gran numero da persone attente. Così a Borgiano si contarono, il 20 settembre, una trentina di scosse; ed in certi momenti il suolo sembrava in continua trepidazione in accordo con osservazioni consimili fatte a Pievefavera, dove verso le $2^h\frac{1}{2}$ dello stesso giorno, si percepirono continue scosse leggiere, o piuttosto rombi, per quasi mezz'ora.

4. Da speciale mia inchiesta è risultato che questo periodo sismico, annunciatosi così rudemente il 28 agosto, era già cominciato, in verità, quasi un mese prima. Così, a Borgiano, ricordano una sensibile scossa il 1° agosto, altra il 3, altre sei scosse il 5 e una più forte a 1^h del 6 agosto, la quale potrebbe essere la stessa sentita a Montalto a $0^h\frac{1}{2}$ del 5, con tali riferimenti di circostanze, da far ritenere più sicura quest'ultima data. Oltre a ciò, a Montalto, era stata avvertita qualche lieve scossa insieme a qualche boato, anche alcuni giorni prima del 28 agosto; sicchè è probabile che si tratti di prodromi delle scosse cominciate in detto giorno e causate forse da successivi cedimenti, assestamenti o scorrimenti di strati verso una nuova posizione di riposo, e tutto ciò a profondità relativamente tenue, e probabilmente in seguito al lavorìo incessante di acque sotterranee, provenienti anche da infiltrazioni di quelle del fiume Chienti e del suo affluente T. Fiastrone, presso la cui confluenza trovasi appunto Caldarola sopra uno stretto lembo di *quaternario antico* (sabbie, ghiaie, argille) racchiuso fra terreni miocenici, e perciò in cattive condizioni di stabilità dei suoi edifici.

Anche le sue frazioni Croce e Vestignano si trovano sul *quaternario antico*, Belforte sul Chienti sta sopra un lembo isolato dello stesso terreno poggiante sul *miocene*, Camporotondo è edificato sul *pliocene* e Montalto su schisti argillosi.

[1] Ringrazio il sig. maestro C. Salvi, direttore delle scuole di Caldarola, per aver presa nota delle numerose repliche, e così pure tutte le altre persone, da cui cortesemente ebbi informazioni nella mia visita alle varie località.

5. Che Caldarola con i suoi dintorni sia una località assai soggetta a terremoti, lo si può arguire facilmente dalle numerose catene che si vedono applicate a molti fabbricati, soprattutto di vecchia costruzione; e vi è grande probabilità che la maggior parte delle lesioni prodotte dal recente *periodo sismico*, siano quelle stesse causate da precedenti moti tellurici e poi, come quasi sempre avviene, nascoste alla vista da riparazioni superficiali e di poca spesa. Oltracciò, i maggiori danni verificatisi a Caldarola e in alcune sue frazioni — per fortuna senza alcuna vittima — si riscontrano generalmente in edifici in cattive condizioni statiche o per costruzione difettosa, o per vetustà, o per malfatte o insufficienti riparazioni dopo precedenti scosse, tanto che non di rado gli edifici crollano anche senza le medesime, come a sazietà è stato sempre ripetuto nelle relazioni scientifiche sopra le catastrofi sismiche così frequenti in Italia. Non è quindi mai abbastanza da deplorare l'incuria colpevole delle autorità comunali le quali, interessandosi soltanto dell'aspetto estetico degli edifici pubblici e privati, non si preoccupano della loro solidità e talora neppure di quelli notoriamente malsicuri che dovrebbero con rigore esser fatti sgombrare, quando non si potesse o volesse ripararli a regola d'arte.

6. In quanto ai terremoti che nel passato hanno danneggiato Caldarola, troppo lungo sarebbe il volerli qui ricordare, e perciò mi limito ai più recenti. Il Baratta nel suo studio sulla distribuzione topografica dei terremoti italiani, a proposito di Caldarola dice che nei suoi pressi trovasi un focolare, la cui attività si estrinseca con frequenti scuotimenti oltremodo localizzati, e cita quelli del novembre 1871, del 14 gennaio 1889 e del 19 dicembre 1894.

Il 22 novembre 1871 cominciarono frequenti scosse, fino a 15-20 in ogni notte, ad intervalli regolari e quasi ad ore fisse; e di questo *periodo sismico* serbano ancora viva memoria alcuni abitanti di Caldarola e paesi vicini. Nel Notiziario sismico pubblicato dal R. Ufficio Centr. di Met. e Geod. trovo per il 14 gennaio 1889 una scossa sussultoria, seguìta da altra minore, avvertita da moltissimi; ma non è affatto sicuro che l'epicentro sia stato a Caldarola. L'altra scossa ivi sentita con moderata intensità il 19 dicembre 1894, fu certamente il contraccolpo d'un movimento sismico che da Osimo e Cingoli al N. si estese fino a Sarnano e S. Vittoria al M. al S. con probabile epicentro presso Montegiorgio (Fermo).

È da ricordare altresì l'importante scossa di terremoto del 12 marzo 1873, studiata in modo particolare dal Serpieri e riesaminata dal Baratta, la quale riuscì rovinosa a Camerino, Fabriano e S. Ginesio ed ebbe sì grande estensione da essere ben avvertita lungo la costa Dalmata e segnalata perfino in qualche località del Piemonte e della Calabria! Poichè Caldarola si trova tra Camerino e S. Ginesio e tra Fabriano e S. Ginesio, e fu pur essa danneggiata, viene giustamente il sospetto che anche i *periodi sismici* del 1871 e del 1921 possano essere dovuti ad un lieve risveglio dello stesso focolare del 1873.

7. Indubbiamente questa parte delle Marche è molto esposta ai terremoti generati da parecchi centri sismici, a poca distanza l'uno dall'altro; ma è assai difficile determinarne anche adesso l'esatta posizione in base delle poche e bene spesso vaghe notizie che sogliono pervenire al R. Ufficio Centr. di Met. e Geod. coll'attuale insufficientissima rete di punti d'osservazione. Affinchè il servizio sismico procedesse bene, occorrerebbero numerosi e zelanti corrispondenti, come pure sarebbe necessario in alcuni Osservatori, opportunamente scelti, il funzionamento di appropriati sismografi, le cui indicazioni integrassero e all'occorrenza rettificassero le notizie provenienti dalle località colpite dal terremoto; e quando fossero meno scarsi questi mezzi d'investigazione, aumenterebbe certamente la probabilità di scoprire le leggi, ancora tanto oscure e misteriose, che regolano i fenomeni sismici.

Chimica. — *Iodo-derivati pirrolici* [1]. Nota di ANTONIO PIERONI, presentata del Socio A. ANGELI.

L'importanza dell'argomento e più ancora la grande attività che attorno ad esso vanno svolgendo molti sperimentatori rendono opportuno la pubblicazione di queste mie ricerche, sebbene non completamente ultimate.

Dopo la preparazione del iodolo per opera di G. Ciamician e Silber, non risulta che siano stati ottenuti altri derivati iodurati del pirrolo. Le ricerche successive vennero limitate ai prodotti di decomposizione che lo iodolo fornisce per effetto del riscaldamento; gli autori citati [2] osservarono che evaporando una soluzione alcoolica di iodolo a b. m. sino a secchezza si aveva sviluppo di vapori di iodo, mentre rimaneva come residuo una massa carboniosa. H. Pauly ed E. Waltzinger [3] trovarono che per riscaldamento lo iodolo si decompone perdendo iodo, ammoniaca e lasciando un residuo nero che contiene ancora il 19.7 % di azoto.

Già in una mia precedente pubblicazione [4] osservai che l'ossidipirrile reagisce con iodo e potassa caustica per dare un prodotto grigio che a 163° si decompone liberando iodo. Non studiai ulteriormente questo prodotto poichè l'ottenni con rendimento molto scarso; il fatto però di ottenerlo mi indusse alla facile previsione che la iodurazione con ipoiodito alcalino, dei

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica, R. Istituto di studî superiori, Firenze.

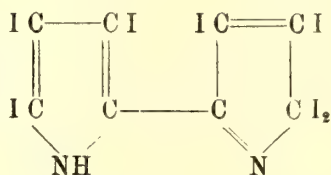
(2) B. XV, 2583.

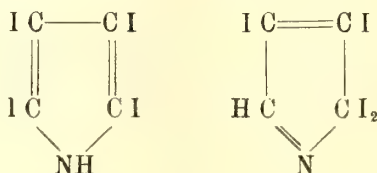
(3) B. 46, 3132.

(4) Loc. cit. XXX, 317.

composti pirrolici, poteva essere generalizzata. Infatti trovai che l'acido α pirrolcarbonico, l'acetil, il benzoilpirrolo gli acidi α e β indolcarbonici, i soli per ora sperimentati, reagiscono tutti in soluzione acquosa alcalina con iodo e potassa caustica, dando composti che per brevità tralascio ora di descrivere.

I prodotti iodurati che si formano in ogni singola reazione sono certamente più di uno e la separazione di essi non è tanto semplice e sicura. Osservai però che, sia partendo dal pirrolo come dall'acido α-pirrolcarbonico, ed operando in soluzione acquosa in presenza di un eccesso di alcali e della quantità voluta di iodio in ioduro di potassio, si ottengono gli stessi prodotti e di preferenza, iodolo ed un'altra combinazione alla quale per la determinazione del peso molecolare e per gli altri dati analitici corrisponderebbe la formula

```
I C——C I     I C══C I
  ‖    ‖       |    |
I C    C———————C    C I2
   \  /         \\  /
    NH            N
```

la cui formazione si può spiegare ammettendo che lo iodolo in soluzione alcalina esiste nelle due forme tantomere dalle quali

```
I C——C I      I C══C I
  ‖    ‖        |    |
I C    C I    H C    C I2
   \  /          \\  /
    NH             N
```

per eliminazione di H I, mediante la potassa si giunge alla combinazione sopra scritta. Se non che la stessa combinazione era prevedibile si dovesse ottenere anche sciogliendo lo iodolo in potassa caustica; la previsione venne confermata dall'esperienza. Gr. 10 di iodolo (della Ditta Kalle) purificati dal benzolo vengono, finamente macinati, sospesi in cc. 50 di acqua ed addizionati di gr. 28 di potassa caustica Kahlbaum, sciolti in 50 cc. di acqua, si agita energicamente scaldando per alcuni secondi a circa 40° (lo stesso avviene se si lascia il tutto a sè a temperatura ambiente per 12 ore). Si nota un ingiallimento sensibile del liquido e la formazione di una polvere azzurro scura che talvolta assume in un primo tempo l'aspetto di una massa densa e pastosa. (Eccedendo nella potassa od operando a temperatura anche di poco superiore ai 40° od a temperatura più alta con altre basi più deboli come p. e. la piridina, si ottengono in prevalenza polveri di color bruno

o nero). Si filtra, si lava con acqua la polvere raccolta sul filtro, sino a reazione neutra, il filtrato si acidifica con acido acetico con che si ottiene una quantità sensibile di iodo libero ed un abbondante precipitato grigio-giallo che si raccoglie sul filtro, si lava abbondantemente con acqua, si secca a 40° circa su b. m. il precipitato secco odora sensibilmente di iodoformio, si fa cristallizzare più volte dal benzolo e così si ottengono dei begli aghi argentei, che scaldati incominciano a svolgere vapori violetti a 166° per decomporsi energicamente a 173°.

Seccati in stufa per 15′ a 80° all'analisi:

I gr. 0.1672 diedero gr. 0.0576 di CO_2 e gr. 0.0058 di H_2O

II gr. 0.1023 " gr. 0.0350 " CO_2 e gr. 0.0049 di H_2O

III gr. 0.1806 " gr. 0.2926 " Ag I (Carins)

IV gr. 0.1979 " gr. 0.3217 " Ag I "

Calcolato per $C_8HN_2I_7$		Trovato			
		I	II	III	IV
C %	9.47	9.37	9.33		
H %	0.10	0.38	0.53		
I %	87.66			87.54	87.82

gr. 0.2407 di sostanza sciolti in gr. 20.00 di acido acetico glaciale diedero un abbassamento di 0°,045 a cui corrisponde un peso molecolare di 1043 mentre il calcolato è di 1013.44.

La polvere azzurro nera rimasta sul filtro, che è senza dubbio un prodotto di condensazione e di deiodurazione dell'iodolo, seccata, estratta con etere, lascia come residuo una bella sostanza contenente iodo, che dai caratteri fisici risulta simile all'indigotina ed è oggetto di ulteriori ricerche.

Devo inoltre accennare che, tanto l'iodolo, quanto l'eptaiododipirrile, reagiscono in soluzione alcalina con i sali di diazonio e con la p-bromofenilazossicarbonammide, reazioni queste che mi daranno modo di ricontrollare la costituzione dei nuovi derivati pirrolici, ed ancora che per riduzione, del iodolo e dell'eptaiodipirrile, tanto in ambiente neutro quanto alcalino, si ottiene un prodotto oleoso i cui vapori arrossano il fuscello d'abete bagnato di acido cloridrico, ma che perde iodo per trasformarsi in una polvere nera insolubile nei comuni solventi e contenente iodo.

Comunico questi dati con tutto il riserbo e allo scopo di poter proseguire indisturbato le mie ricerche.

Chimica — *Sui borati. Sistema* $(NH_4)_2O$ — B_2O_3 — H_2O (*a* 45° *e a* 90°) [1]. Nota VI di UMBERTO SBORGI e LELIO FERRI, presentata dal Socio R. NASINI [2].

Lo studio di questo sistema ci sembrò che dovesse essere esteso a varie temperature, superiori ai 30°, perchè mentre a 0°, a 10° e a 30° erano stati trovati come composti stabili solo i borati 1-5-8 e 1-2-4, a 60° era stato trovato anche un borato della composizione 1-4-6. Le ricerche eseguite precedentemente alle presenti sono state descritte in questi Rendiconti [3], e rimandiamo ad esse per quanto riguarda i metodi analitici e i dispositivi sperimentali generali. Di qualche particolare artificio che si è dovuto usare per queste ricerche a 45° e a 90° diremo nel corso di questa Nota.

Come risulta dalla seguente Tabella I, a 45° si è trovato, oltre i composti 1-5-8 e 1-2-4, il composto 1-4-6 già riscontrato a 60°. L'individuazione di questo composto, a 45°, è stata dapprima assai difficile. Pure avendosi sicuramente una curva di solubilità intermedia tra quella dell'1-5-8 e quella dell'1-2-4, il fascio delle linee di coniugazione non convergeva dapprima decisamente in un punto: si poteva pensare tanto a un composto del tipo 1-3, che ad uno del tipo 1-4. Anche preparando miscugli tali che rimanessero per il corpo di fondo quantità da dare, o l'1-3 o l'1-4, anche agitando fortemente e tenendo in termostato per tempi assai lunghi, i resultati rimanevano incerti. È noto che i borati persistono talvolta lunghissimamente in condizione di metastabilità [4]. Potremmo risolvere la questione solo scaldando prima a una temperatura più elevata (verso 60°) e poi portando il miscuglio in termostato a 45° per un tempo sufficiente. Allora il fascio delle linee convergeva nettamente nel punto 1-4-6.

I resultati ottenuti sono raccolti nella seguente Tabella I ed espressi poi nel diagramma I.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pisa.

[2] Presentata nella seduta del 5 marzo 1922.

[3] Vedi vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., pag. 189. Nella nota 3 a pie' di pagina 189 sono riportate le indicazioni di tutte le note precedenti.

[4] Confr. Van't Hoff, *Untersuchung. über die Bildungsverhältn. der Ozean. Salzablag.* Leipzig, 1912, n. XXVII, pag. 204.

TABELLA I — Temperatura 45°.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del resto			Corpi di fondo
			$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %	
		ore							
1	$H_3BO_3 + H_2O$	19	—	5.27	94.73	—	—	—	H_3BO_3
2	»	21	—	5.31	94.69	—	—	—	»
3	H_3BO_3 + 1-5-8 + H_2O	26	0.46	7.75	91.79	0.12	39.61	60.27	»
4	»	31	0.98	9 41	89.61	0.37	36.47	63.16	»
5	»	4	1.05	10.60	88.35	4.29	47.46	48.25	H_3BO_3 + (1-5-8)
6	»	4	1.04	10.59	88.37	4.29	47.46	48.25	»
7	»	50	1.05	10.60	88.35	3.42	44.75	51.83	»
8	1-5-8 + H_2O	12	1.65	11.17	87.18	—	—	—	1-5-8
9	»	8	1.64	11.10	87.26	—	—	—	»
10	1-5-8 + 1-2-4 + H_2O	16	2.46	13.15	84.39	7.03	45.50	47.47	»
11	»	10	3.39	15.82	80.79	5.42	31 96	62.62	»
12	»	14	3.40	15.84	80 76	5.01	29.00	65.99	»
13	»	15	3.57	16.38	80 05	7.03	43.29	49.68	(1-5-8) + (1-4-6)
14	»	25	3.60	16.61	79 79	8.25	40.55	51.20	»
15	»	27	3 60	16.61	79.79	8.27	40.31	51.42	»
16	»	24	4.18	17.12	78.70	6.90	34.27	58.83	1-4-6
17	»	26	4.19	17.10	78,71	6.90	34.18	58.92	»
18	»	11	4.35	17.27	78.38	7.61	34.34	58.05	»
19	»	14	4.30	17.31	78.39	7.92	41.09	50.99	»
20	»	15	4.32	17.21	78.47	—	—	—	»
21	»	18	4.18	16 99	78.83	7.68	34.91	57.41	»
22	»	24	4.57	17.59	77.84	8.29	38.44	53.27	»
23	»	19	4.60	17 80	77.60	7.41	36.51	56.08	»
24	»	23	4.59	17.81	77.60	7.35	36.48	56.17	»
25	»	27	4.59	17.85	77.56	—	—	—	»
26	»	14	4.96	18.44	76.60	8.35	36.92	54.73	»
27	»	32	4.99	18.59	76.42	7.92	34.44	58.64	»
28	»	40	4.99	18.57	76.44	7.91	34.45	57.64	»
29	»	18	5.45	19.30	75.25	7.60	35.03	57.37	»
30	»	23	5.45	19.27	75.28	7.60	35.02	57.38	»
31	»	6	5.55	19.54	74.91	9.43	39.46	60.11	»
32	»	27	5.58	19.90	74.52	10.19	37.55	52.26	»
33	»	24	5.58	19.82	74.60	10.49	39.59	49.92	1-4-6 + 1-2-4
34	»	16	5.59	19.82	74 59	9.53	37.80	52 67	»
35	»	6	5.41	19.10	75.49	14.68	41.43	43.89	1-2-4
36	»	14	5.18	16.84	77.98	15.12	41.03	43.85	»
37	1-2-4 + H_2O	17	4 98	13.43	81.59	—	—	—	»
38	1-2-4 + NH_4OH + H_2O	20	5.38	10.42	84.20	12.70	32.08	55.22	»
39	»	22	5.57	9.72	84.71	13.05	32.10	54.85	»
40	»	18	6 10	8.77	85.13	13.60	33.26	53.14	»
41	»	16	10.17	5.91	83.92	17.05	39.02	43.93	»
42	»	18	13.24	4.61	82.15	18.28	42.00	39.72	»
43	»	16	13.86	4.51	81.63	18.20	39.60	42.20	»
44	»	16	30.84	1.61	67.55	22.66	40.59	36.75	»

Per maggior chiarezza, nella figura è riportatata solo la porzione di triangolo che contiene le curve di solubilità: vi è indicata la direzione dei fasci delle linee di coniugazione che convergono rispettivamente verso i punti rappresentativi di H_3BO_3 , 1–5–8 , 1–4–6 , 1–2–4: *ab* è la curva di solubilità di H_3BO_3, *bc* quella dell' 1–5–8, *cd* quella dell' 1–4–6, *de* quella dell' 1–2–4.

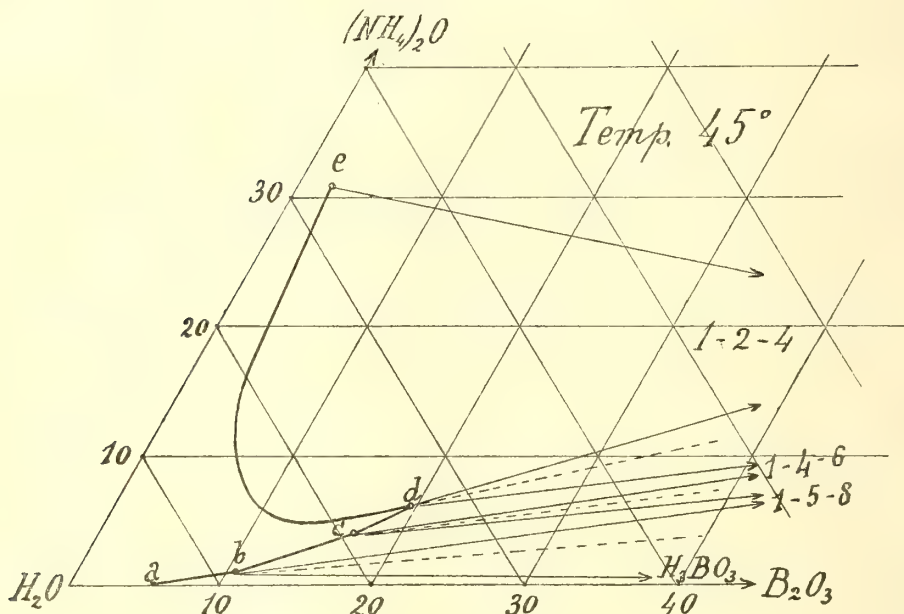



Fig. 1.

Come già si vede nella figura qui riportata e come meglio si vedrebbe dal triangolo completo, cioè là dove si avessero anche i punti rappresentativi di 1–5–8, 1–4–6 e 1–2–4, il primo e l'ultimo di questi composti esistono inalterati in presenza di acqua pura: l' 1–4–6 no, vale a dire che le soluzioni delle quali esso si trova in presenza contengono sempre un eccesso di $(NH_4)_2O$ in confronto a quello rispondente al rapporto 1-4. Questo si ricava dal diagramma coi soliti mezzi grafici. E questo dà anche la più probabile spiegazione di come sia stata da taluni affermata — con riserva — l'esistenza di questo composto e da altri senz'altro negata [1]. Come apparisce dai resul-

[1] Confr. Gmelin Kraut's Handbuch der Anorg. Chem , 7ª Aufl. (1911), Band I, Abt. 3, pag. 441.

tati da noi ottenuti, il composto 1-4-6 esiste solo a temperatura superiore a quella ambiente e per particolari concentrazioni dei componenti. È molto verosimile che il composto sia stato talvolta ottenuto da qualche sperimentatore, ma poi il lavaggio con acqua fredda abbia operato una decomposizione più o meno profonda, sicchè in ultimo si sia avuto, per l'analisi, un miscuglio di borati di composizione assai vicina a 1-4-6. Torneremo su questo punto quando discuteremo in una prossima nota i risultati complessivi ottenuti nello studio di questo sistema.

* * *

A 90° le esperienze si facevano assai più difficili. Qui si aveva, dai miscugli posti a reagire, un forte sviluppo di ammoniaca e operando in recipiente chiuso, come era necessario, si potevano avere poi nella presa del campione variazioni notevoli nel contenuto in ammoniaca della soluzione. Per questo trovammo adatto di operare così: ponevamo i miscugli delle sostanze in un palloncino piccolo e resistente, e, nel collo del palloncino, attraverso a un tappo fortemente assicurato ad esso, ponevamo un tubo munito in basso di un filtro di tela e in alto, nella parte sporgente dal tappo, un tubo di gomma chiuso da una pinza. Dopo tenuto in termostato per un tempo sufficiente, affondavamo il tubo di vetro nella soluzione: innestavamo nel tubo di gomma la pipetta preriscaldata e, aprendo la pinza, facevamo salire il liquido che quasi subito cristallizzava completamente (talvolta avevamo soprafusione per un tempo assai lungo). Così, ed usando poi anche altri artifici che l'esperienza di mano in mano ci dettava, abbiamo potuto stabilire con sicurezza le varie curve fino a quelle ad alto contenuto in ammoniaca dove le difficoltà si facevano naturalmente maggiori. Nella Tabella II e nel diagramma II si hanno i risultati ottenuti.

TABELLA II — Temperatura 90°.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del resto			Corpi di fondo
			$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$ %	B_2O_3 %	H_2O %	
		ore							
1	$H_3BO_3 + H_2O$	8	—	13.51	86.49	—	—	—	H_3BO_3
2	»	10	—	13.50	86.50	—	—	—	»
3	H_3BO_3 + 1-5-8 + H_2O	18	2.47	25.28	72.25	4.72	47.98	47.30	H_3BO_3 + 1-5-8
4	»	12	2.45	24.20	73.35	5.38	45.28	49.34	»
5	»	9	2.42	25.01	72.57	6.35	47.95	45.70	»
6	1-5-8 + H_2O	8	3.93	26.36	69.71	—	—	—	1-5-8
7	1-5-8 + 1-2-4 + H_2O	10	5.81	31.01	63 18	7.93	51.48	40 59	»
8	»	6	5.87	31.52	62 61	8.08	45.63	46.29	»
9	»	9	6.10	31.51	62 39	8.81	49.52	41.67	1-5-8 + 1-4-6
10	»	13	6.11	31.50	62.39	8.31	53.48	38.21	»
11	»	8	6.31	31.75	61.94	9.01	48.00	42.99	1-4-6
12	»	8	6.69	31.40	61.91	9.68	45.21	45.11	»
13	»	5	6.81	31.90	61.29	9 02	48.07	42.91	»
14	»	48	6.89	32.40	60.71		—	—	»
15	»	5	7.22	31.88	60.90	9.47	44.11	46.42	»
16	»	8	7.42	33.18	59.40	9.58	42.96	47.46	»
17	»	6	8.10	32 75	59.15	10.22	45 51	44.27	»
18	»	8	8.64	36.60	54.76	10.19	45.91	43.90	»
19	»	4	9 51	35 92	54.57	10.25	56.55	33.20	»
20	»	20	10.39	37.41	52.20	12.45	58.90	28 65	»
21	»	18	11.38	38.32	50 30	11.67	50.22	38.11	»
22	»	7	12.02	39 61	48.37	12.08	55.38	32.54	»
23	»	12	12.00	39.71	48.29	11.50	52.00	36.50	»
24	»	6	12.42	39 99	47 59	12.54	45.44	42.02	1-4-6 + 1-2-4
25	»	6	12.62	40.12	47.26	13.76	44.72	41.52	»
26	»	14	12.80	40.65	46.55	15.70	50.31	33 99	»
27	»	7	13.11	39.39	47 50	15.56	47.79	36.65	»
28	1-2-4 + H_2O	8	14.28	38.43	47.29	—	—	—	1-2-4
29	1-2-4 + NH_4OH + H_2O	9	14.27	34.61	51.12	17.01	44.98	38.01	»
30	»	9	14 27	—	—	17.20	48.02	34.78	»
31	»	7	15.50	30.61	53.89	17.80	42.90	39.30	»
32	»	10	16.80	26.52	56.68	18 31	44.38	37.31	»
33	»	8	17.54	25.72	56.74	19.10	46.02	34.88	»

Anche qui, oltre l' 1–5–8 e l' 1–2–4 si ha il composto 1–4–6 e anche qui i due primi borati sono stabili in presenza di acqua pura. L' 1–4–6 invece si decompone cosicchè questo borato, attraverso tutto il campo della sua esistenza, è stabile solo in presenza di soluzioni contenenti un eccesso di ammoniaca.

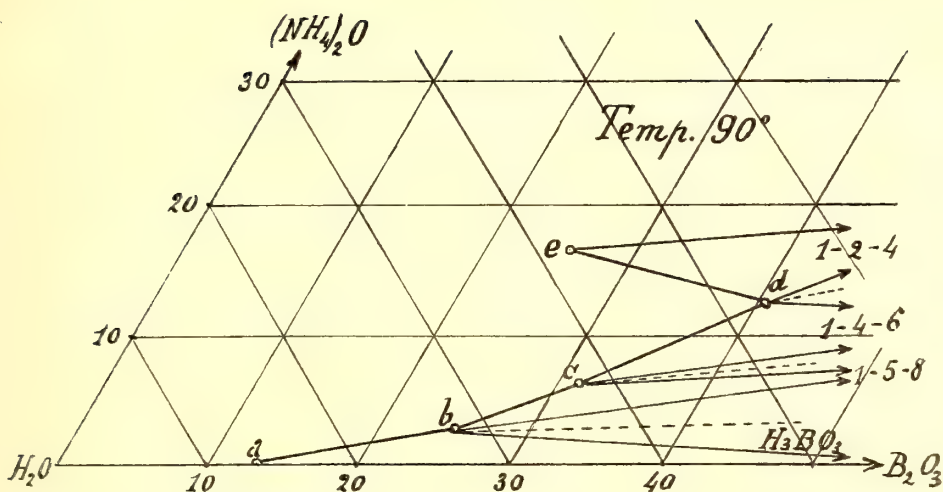



Fig. 2

Dalle Tabelle si possono ricavare facilmente le solubilità, a 45° e a 90°, dell' H_3BO_3, dell' 1-5-8 e dell' 1-2-4. Non riportiamo qui in Tabella a parte le solubilità dei suddetti composti anidri e idrati, perchè daremo le curve di solubilità di essi in una prossima Nota dove riferiremo sul diagramma completo temperatura-concentrazione di questo sistema, per tutto il campo delle temperature sperimentate.

Geologia. — *Ricerche sulle ossa fossili di orso della Grotta di Equi in Lunigiana.* Nota riassuntiva del dott. G. Fracassi, presentata dal Socio C. De Stefani.

Gli scavi iniziati nel 1911 nella Tecchia e nella caverna di Equi e proseguiti fino a tutto il 1917 sotto la direzione del prof. De Stefani e coll'assistenza quasi continua del capo tecnico del Museo di Paleontologia e di Geologia di Firenze sig. Bercigli, hanno dato grandissima copia di ossa fossili di animali diversi, compreso l'uomo, e di prodotti dell' industria umana.

Per parte mia mi sono occupato delle ossa di orso che furono rinvenute in quantità straordinariamente grande.

Le ricerche furono limitate ai crani dei quali il museo possiede 38 completi adulti, 4 completi di giovani o giovanissimi individui e molti più o meno incompleti; alla mandibola, al femore, alla tibia e perone, all'omero, cubito e radio. Soltanto le ossa di individui adulti complete furono misurate cioè 2 mandibole complete, oltre quelle unite col cranio rispettivo, 67 branche man-

dibolari destre, 47 sinistre, 80 femori, 64 omeri, 117 tibie, qualche perone, 80 cubiti, 103 radi. Fu inoltre osservata l'eventuale presenza dei primi tre premolari nelle mandibole frammentarie di individui adulti e non adulti. Per lo studio dei rapporti delle varie ossa servirono egregiamente un certo numero di arti anteriori e posteriori più o meno completi ed anche lo scheletro ricostruito (quantunque indubbiamente di ossa differenti) di un grosso speleo della caverna di Laherme (Pirenei) donato al museo da Vittorio Emanuele II. Per confronti sono serviti 4 crani e un modello di cranio e diverse ossa lunghe di orso speleo provenienti da altre grotte italiane e straniere; nessuna delle quali ossa mi è sembrato presentasse delle differenze sostanziali in confronto colle ossa di orso di Equi.

In quest'ultime ho riscontrato delle differenze di dimensioni notevolissime specialmente apprezzabili se si considerano gli estremi; ma tutti i gradi di passaggio esistevano e soltanto nei femori un intervallo di 1 cm. $^1/_2$ segna il limite fra i grandi femori e i piccoli; nelle altre ossa invece la serie appare continua. Nei crani oltre le diverse dimensioni sono da notare la maggiore o minore prominenza della fronte, cioè l'angolo che essa forma colle ossa nasali o meglio ancora col piano del palato; la presenza di bozze frontali più o meno sviluppate, la lunghezza della fronte, la lunghezza assoluta e relativa dei tre diametri bizigomatico, condilo-basale, inion-bordo incisivo. È stato trovato che l'angolo fronto-palatino poteva essere egualmente elevato nei grandi e nei piccoli crani e tanto negli uni che negli altri potevano aversi bozze frontali abbastanza sviluppate, ma che queste ultime erano in generale più evidenti nei crani di maggiori dimensioni; il diametro inion-bordo incisivo era relativamente al condilobasale un poco più lungo nei grossi crani, mentre il diametro bizigomatico era soggetto a tutte le variazioni indipendentemente dalla grandezza dei crani stessi. Di altre particolarità minori concernenti i crani non è il caso di trattare in questa breve Nota.

Per quello che riguarda la dentatura sono stati trovati presenti nella mascella tutti gli incisivi, canini e molari o gli alveoli di essi; dei premolari costante il 4° mentre gli altri tre non si riscontrarono quasi mai (una volta l'alveolo del 1° Pm. a destra, del 2° Pm. una volta d'ambo i lati in individuo assai giovane e due volte a destra e una volta a sinistra, del 3° Pm. una volta bilateralmente e una volta a destra, questo nei crani di Equi mentre negli altri 4 crani provenienti da diverse località si trovò in un cranio l'alveolo del 1° e 2° Pm. a destra e in un altro l'alveolo del 3° Pm. bilateralmente) e nei rari casi in cui invece si riscontrarono trattavasi sempre di denti rudimentali. Abbastanza frequentemente furono riscontrate vestigia di qualcuno dei primi 3 premolari nei frammenti di mandibole di individui giovanissimi.

Nella mandibola di individui adulti fu osservato il fatto importante, e per quanto so non mai finora segnalato da nessuno, che anche il quarto premolare può

talvolta mancare o essere gemmiforme e che in ogni caso cade più presto di tutti gli altri denti. Invece un poco più spesso fu osservata la presenza di qualcuno dei tre primi premolari (*a sinistra* quattro volte l'alveolo pel 1° Pm. o la sua gemma, tre del secondo Pm., mai del 3°, in due casi il 4° Pm. era gemmiforme, in tre casi l'alveolo del 4° Pm. era sostituito da una rugosità, in un certo numero di casi l'alveolo del 4° Pm. era in via di più o meno avanzata obliterazione — *a destra* due volte l'alveolo e due la gemma del 1° Pm., due volte pure l'alveolo e una volta la gemma del 2° — il 4° Pm. mancava una volta senza che esistesse alcuna traccia di una sua eventuale presenza in epoca anteriore, in tre branche mandibolari l'alveolo era completamente obliterato e sostituito da una rugosità dell'osso, in diverse altre in via di più o meno avanzata obliterazione). Le pieghe dello smalto erano alquanto più numerose nei molari dei grossi crani, negli altri denti e specialmente nel numero dei tubercoli accessori del 4° premolare inferiore furono riscontrate in serie continua numerose variazioni indipendentemente dalla grandezza dei crani medesimi. Altre differenze notevoli non ho potuto riscontrare nei crani e nelle mandibole considerati in serie; così per esempio l'apofisi coronoide varia di conformazione si può dire in ciascun esemplare.

I femori piccoli e i femori grandi hanno la stessa conformazione; le variazioni individuali sono in sostanza le stesse si negli uni che negli altri. Da notare soltanto, senza attribuirvi notevole importanza, che la fossetta per la inserzione del legamento rotondo era nei femori piccoli presente più spesso che nei grandi.

Le tibie piccole avevano le epifisi alquanto più robuste delle grandi, carattere evidente ma non molto accentuato; nessuna diversità notevole nella conformazione dei peroni, omeri, cubiti e radi piccoli in confronto coi grandi.

Per intenderci sulle parole ossa grandi e piccole dirò che per ciascun osso si è fatta la media fra l'esemplare di maggiori e quello di minori dimensioni ambedue completamente ossificati; gli esemplari al disopra della media sono stati ascritti ai grandi, ai piccoli quelli al disotto. Sempre gli esemplari al disotto della media stabilita così, resultarono in minor numero di quelli al disopra.

Da quanto sopra è stato sommariamente esposto ho trovato che non si poteva distinguere più di una specie di orsi nelle ossa degli scavi di Equi e che questa specie era identificabile coll'*U. spelaeus* Blum. Le denominazioni *U. spelaeus maior* e *minor* del De Blainville e dello Strobel possono adottarsi soltanto ad indicare due gruppi di varietà i cui limiti neppure sono nettamente tracciabili.

In confronto alle altre ossa di orso quaternario possedute dal Museo di Firenze, nessuna differenza di una qualche importanza si può apprezzare e neppure differenze essenziali sembrano esistere con ossa scavate nelle diverse regioni d'Europa e descritte e figurate dai diversi autori. Quindi nel-

l'*U. spelaeus* di Equi rientrerebbero l'*arctoideus*, il *fornicatus*, il *leodiensis* ecc. ecc.

Lo studio di alcuni crani di orsi di specie viventi, di uno scheletro di *orso bruno della Majella* e delle ossa degli arti anteriori e posteriori di *U. americanus* ha fatto rilevare che l'*arctos* attuale è l'orso che più di tutti si somiglia allo *spelaeus*; subito dopo viene l'*americanus*. Caratteri differenziali assai notevoli di queste due specie in confronto collo *spelaeus* sono la maggiore lunghezza relativa degli arti e specialmente della porzione distale in rapporto colla prossimale, e la minore robustezza delle epifisi degli arti medesimi.

Nell' *U. spelaeus* la tibia non supera mai e raramente raggiunge i $^2/_3$ della lunghezza del femore mentre raggiunge i $^4/_5$ tanto nell'*orso bruno della Majella* quanto nell'*americanus*; nello *spelaeus* il cubito è in media i $^5/_6$ e il radio i $^3/_4$ della lunghezza dell'omero mentre tanto nell'*orso della Majella* che nell'*americanus* il cubito è lungo quanto l'omero e il radio supera i $^6/_7$ della lunghezza dell'omero.

Infine fu notato che anche nell'*arctos* attuale non soltanto i tre primi premolari ma talvolta anche il 4° premolare possono mancare od essere gemmiformi; la presenza di qualcuno dei primi tre premolari è però un fatto costante nell'*arctos*, eccezionale nello *spelaeus*.

Antropologia. — *Altre forme della legge che vincola i pesi alle stature negli adulti.* Nota del prof. Fabio Frassetto, presentata dal Corrisp. A. Ruffini [1]

Avendo calcolato mediante la formula di normalità dell'indice ponderale

$$P = \frac{S - 67.60}{1,60} \tag{1}$$

i pesi normali teorico-sperimentali, corrispondenti a ciascuna statura, centimetro per centimetro, da m. 1,54 a m. 2,00 abbiamo potuto notare che la legge già esposta nella nostra precedente Nota [2] si può presentare sotto altre forme di carattere più pratico e perciò, da un certo punto di vista, più notevoli.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia generale ed applicata della Regia Università di Bologna.

[2] Frassetto F. *Delle relazioni fra il peso e la statura dell'uomo adulto.* Atti Reale Acc. Naz. dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XXX serie 5ª, fasc. 12. Roma, 1921. Vedi anche « La Medicina Italiana », vol. III, n. 1. Milano. 1922.

Indicando con S, la statura; con P, il peso corrispondente; con D, la differenza di due pesi successivi; con Δ la differenza tra i centimetri di statura oltre il metro e i pesi corrispondenti; con Δ_1 la differenza tra due delta successivi, si ottiene la tabella I, che riportiamo più avanti.

Osservando le differenze elencate nella terza colonna risulta che i pesi si seguono in progressione aritmetica, la cui ragione è 0,625. Si può, quindi, enunciare la seguente legge:

Nei giovani italiani, a partire dalla statura di m. 1,54 e dal relativo peso di kg. 54, i pesi crescono in progressione aritmetica con ragione di 0,625 per ogni centimetro di statura; ossia in simboli

$$P = \text{kg. } 54 + (0{,}625 \times x) \tag{2}$$

dove x è il numero di centimetri che la statura considerata supera la statura iniziale di m. 1,54.

Se poi osserviamo la quarta e quinta colonna riscontriamo che la differenza delta fra i centimetri di statura oltre il metro ed il peso corrispondente crescono in progressione aritmetica, la cui ragione è 0,375; il quale risultato conduce a questa regola assai semplice per determinare il peso normale teorico corrispondente ad ogni singola statura:

Nei giovani italiani, a partire dalla statura di m. 1,54, il peso corrispondente alle singole stature è uguale a tanti chilogrammi quanti sono i centimetri, oltre il metro, che misura la statura considerata, diminuiti di 0,375, prese tante volte quanti sono i centimetri di differenza fra la statura considerata e la statura iniziale di m. 1,54.

Chiamando con c i centimetri di statura oltre il metro, e con δ la differenza suddetta si ha, in simboli, la formula

$$P = c - (0{,}375 \times \delta). \tag{3}$$

Volendo ora verificare l'esattezza delle due nuove formule (2) e (3) in confronto alla prima (1), prendiamo due stature a caso, per esempio, la statura di m. 1,60 e quella di m. 1,94.

Per la statura di m. 1,60, abbiamo:

Con la formula (1) $P' = \dfrac{S' - 67{,}60}{1{,}60} = \dfrac{160 - 67{,}60}{1{,}60} = 57{,}75$

Con la formula (2) $P' = 54 + (0{,}625 \times x) = 54 + (0{,}625 \times 6) = 57{,}75$

Con la formula (3) $P' = c - (0{,}375 \times \delta) = 60 - (0{,}375 \times 6) = 57{,}75$

Per la statura di m. 1,94, abbiamo:

Con la formula (1) $P'' = \dfrac{S - 67{,}60}{1{,}60} = \dfrac{190 - 67{,}60}{1{,}60} = 79{,}0$

Con la formula (2) $P'' = 54 + (0{,}625 \times x) = 54 + (0{,}625 \times 40) = 79{,}0$

Con la formula (3) $P'' = c - (0{,}375 \times \delta) = 94 - (0{,}375 \times 40) = 79{,}0$

La verifica non poteva essere più perfetta, nè poteva essere diversamente.

Prima di por termine a questa Nota, gioverà ricordare che la ragione $\div 0,625$, con cui si seguono i pesi, potea dedursi direttamente dalla formula (1) in questo modo:

Avendosi

$$S = 1,60\ P + 67,60$$

e

$$S + 1 = 1,60\ P' + 67,60$$

sottraendo si ricava

$$1 = 1,60\ P' - 1,60\ P$$

ossia

$$\frac{1}{1,60} = P' - P$$

la quale esprime che alla differenza di 1 cm. di statura corrisponde sempre la differenza di peso $\frac{1}{1,60}$, che è precisamente uguale a 0,625.

CONSIDERAZIONI

Nel giudicare della normalità del peso di un individuo secondo la nostra tabella, giova tener presente che i valori in essa elencati rappresentano, per ciascuna statura, i valori medi centrali della normalità, la quale ha pure essa il suo campo di variabilità. Per conseguenza debbonsi giudicare come normali anche gli individui aventi pesi i cui valori cadono entro questo campo, che per altro noi non siamo ancora in grado di limitare. Esso può estendersi al di sopra e al di sotto del valore medio centrale in ragione del 7 % di questo stesso valore (come ritengono alcuni autori), oppure può oscillare fra il 5 % ed il 10 %.

Dobbiamo aggiungere, che dal punto di vista scientifico sarebbe stato molto bene, per una più esatta valutazione della efficienza nutritizia dell'organismo, stabilire la formula di normalità riferendo il peso del corpo alla sua lunghezza invece che alla statura; e probabilmente la legge si presenterebbe in una forma non del tutto identica a quella ottenuta. Mancando però il numero sufficiente di osservazioni sulle lunghezze e i pesi relativi bisogna, per ora, attenersi alla statura. Pertanto, se, praticamente, in luogo della statura si conoscesse la lunghezza corrispondente, non vi sarebbe altro da fare che togliere a questa quei due centimetri, che di solito si considerano come differenza media normale fra le due grandezze, e servirsi della tabella.

TABELLA I.

Pesi normali teorico-sperimentali corrispondenti a tutte le stature degli Italiani fra i 19 e 22 anni, misurati di centimetro in centimetro, da m. 1,54 a m. 2,00. Detti pesi sono stati calcolati con la formula di normalità del peso in funzione della statura (vedi testo).

S	P	D = P′ − P″	Δ = S − P	Δ₁ = Δ′ − Δ″	S	P	D = P′ − P″	Δ = S − P	Δ₁ = Δ′ − Δ″
m. 1,54	Kg. 54,000	÷ 0,625	0.000	÷ 0.375	m. 1,78	Kg. 68,999	÷ 0.625	9,001	÷ 0,375
1.55	54,624		0,376		1,79	69,624		9,376	
1,56	55,249		0,751		1,80	70,249		9,751	
1,57	55,874		1,126		1.81	70,874		10,126	
1,58	56,499		1,501		1,82	71,499		10,501	
1,59	57,124		1,876		1,83	72,124		10,836	
1,60	57,749		2,251		1,84	72,749		11,251	
1,61	58,374		3.626		1,85	73,374		11,626	
1,62	58,999		3.001		1.86	73,999		12,001	
1,63	59,624		3,376		1,87	74,624		12,376	
1,64	60,249		3.751		1.88	75,249		12.751	
1,65	60,874		4,126		1,89	75,874		13,126	
1,66	61,499		4,501		1.90	76,499		13 501	
1,67	62,124		4,876		1,91	77,124		13,876	
1,68	62,749		5,251		1,92	77,749		14,251	
1,69	63,374		5,626		1,93	78,374		14,626	
1,70	63,999		6,001		1,94	78,999		15,001	
1,71	64,624		6.376		1,95	79,624		15,376	
1,72	65,249		6.751		1,96	80,249		15,751	
1,73	65,874		7,126		1,97	80,874		16,126	
1,74	66,499		7,501		1,98	81,499		16,501	
1,75	67,124		7,876		1,99	82,124		16,876	
1,76	67,749		8,251		2,00	82,749		17,251	
1,77	68,374		8,626						

Patologia vegetale. — *Sulla germinazione del grano in mannelli o in covoni a seguito di pioggie che accompagnano o seguono la mietitura.* Nota di O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Da una serie di osservazioni compiute nell'estate 1920, e delle quali mi occupai in una breve Nota dell'ottobre di quello stesso anno (1), risultava tra l'altro nettamente confermato un importante rilievo di G. T. Harrington (2), e cioè che il frumento (e così dicasi per altri cereali minori a maturanza estiva) ha la facoltà di germinare in tre giorni nella proporzione (possibile) del 100 per 100, anche se appena raccolto, purchè i semi sieno collocati in un letto a bassa temperatura (12-16 centigradi).

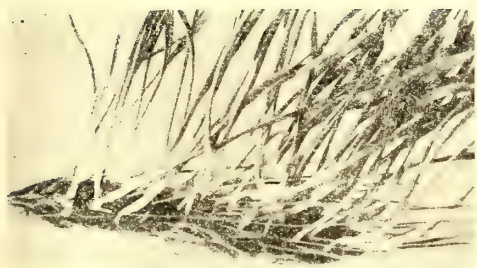
Sino dalle primissime constatazioni si intravedeva tuttavia che il problema doveva essere molto più vasto e molto meno semplice di quanto a primo aspetto potesse sembrare. Onde pensammo di riprendere il tema nell'estate testè decorsa ripetendo e allargando i saggi, dai quali si ebbe nuova e piena conferma del fatto. È apparso, in più, nettamente, che non tutte le varietà reagiscono allo stesso modo.

Tra i quesiti, a cui ci proponevamo di rispondere, offriva però, indubbiamente, la maggiore e più fondamentale importanza il seguente:

I danni più o meno gravi, che si registrano per germinazione del grano in mannelli o covoni allorchè la mietitura e l'imbicamento sono ostacolati o disturbati dalle pioggie, potrebbero, e sino a qual limite, imputarsi alle basse temperature, che accompagnano sempre le pioggie temporalesche della fine di giugno o dei primi di luglio? La concomitanza delle basse temperature è condizione assoluta o sine qua non *per la determinazione del fenomeno?*

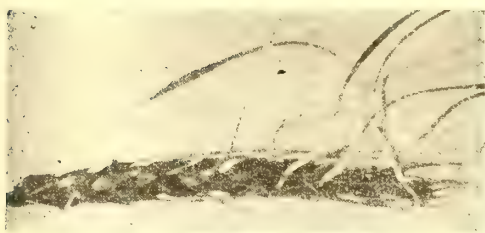
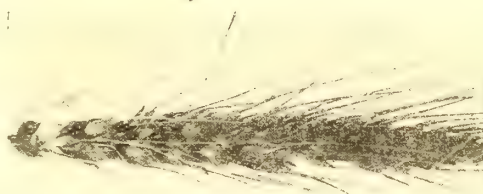
Che a noi constasse, nessuno si era specificatamente proposto di risolvere questo punto della questione: l'unico accenno, puramente occasionale, alla concomitanza delle basse temperature durante le pioggie estive nel determinare la germinazione del grano in covoni l'abbiamo trovata in una Nota

(1) Munerati O., *L'influenza delle basse temperature sulla germinazione del frumento appena raccolto e dei semi così detti freschi.* Rendiconti R. Accademia Nazionale Lincei, XXIX (1920), fasc. 7-8, pp. 273-275.

(2) Harrington G. T., *Germinating freshly harvested winter wheat.* Science, N. S. L, (1919), N. 1301, p. 528.

Segale: varietà locale.

Orzo: varietà locale.

Grano: Civitella (tipo Pétanielle).

Grano: Gentile Rosso.

Grano: Rosso Olona.

Grano: C. Strampelli.

Germinazione di granelli (di frumento, segale, orzo) entro le spiche in velo d'acqua a bassa temperatura: diverso comportamento tra distinte varietà. (N.B. In velo d'acqua ad alta temperatura i granelli di spiche corrispondenti si sono fortemente rigonfiati senza germinare).

dello svedese J. N. Wallden, ma allacciantesi a un ordine di ricerche a fini del tutto diversi [1]. Poichè le constatazioni di Harrington e nostre dovevano far apparire l'ipotesi come del tutto ammissibile, occorreva stabilire se fosse stato possibile offrirne una dimostrazione sperimentale.

Dopo alcune prove preliminari furono prescelti i due seguenti metodi:

a) le spiche vengono raccolte a piccoli fasci e su di esse si fa sgocciolare dell'acqua a temperature rispettivamente diverse (a 12-15; a 22-25; a 32-35). Facile è escogitare dispositivi per raggiungere l'intento, e non è assolutamente il caso di soffermarvisi;

b) le spiche vengono collocate framezzo a sabbia inumidita, in cassette, che si pongono rispettivamente in ambienti a temperature distinte come sopra: (in termostato; in laboratorio; in camera fredda).

Contemporaneamente vennero messi, e nelle stesse condizioni, a germinare granelli separati dalle spiche.

Oltre che di numerose varietà di grano, fu esaminato il comportamento anche di un orzo e di una segale (varietà locali).

Le principali constazioni cui, con varie e ripetute prove, si perveniva possono così raggrupparsi:

1°) I granelli separati dalle spiche germinano sempre, a parità di condizioni, più sollecitamente di quelli che rimangono racchiusi entro le glume.

2°) L'acqua a contatto dei granelli delle spiche agisce diversamente secondo la temperatura: a 32-35° i granelli si gonfiano e si mantengono lungamente rigonfi ma senza germinare; a 22-25° si verifica analogo rigonfiamento con parziale stentata germinazione; a 12-15° la percentuale di germinazione risulta tosto più o meno elevata.

3°) Portando le spiche inumidite e i granelli rigonfi, ma ancora fermi, da un ambiente ad alta temperatura ad un ambiente a bassa temperatura, i granelli germinano immediatamente (alla distanza di poche ore).

4°) Portando le spiche inumidite da un ambiente a bassa temperatura ad un ambiente ad alta temperatura, la germinazione dei granelli ancor fermi si arresta, mentre la piumetta di quelli già germinati si sviluppa con grande vigoria.

5°) Se le spiche, mantenute lungamente (sino ad oltre dieci giorni) a contatto di un velo d'acqua a temperatura sopra i 25-30 centigradi (oppure in sabbia inumidita alla stessa temperatura) e aventi quindi granelli più o meno fortemente rigonfi ma ancora ingerminati, si portano in ambiente caldo, arieggiato o ventilato, a temperatura sopra i 30-35 centigradi o più (quale si ha normalmente d'estate all'aperto), i granelli riprendono in breve

[1] Cfr. Referato in Bollettino mensile di informazioni agrarie e di patologia vegetale. VIII (1917), N. 3, p. 349.

il loro aspetto normale conservando in gran parte la loro vitalità per essere quindi capaci di germinare se posti nelle volute propizie condizioni [1].

6°) Non tutte le varietà si comportano allo stesso modo. Tra le varietà sottoposte a prova nel 1921 i grani turgidi (tipo Pétanielle e analoghi: Civitella, ecc.), hanno palesato una estrema tendenza a germinare. e allo stesso modo si sono comportate la segale e l'orzo; subito dopo seguiti dalle comuni razze di gentile rosso (mutico e semiaristato Todaro), da alcune varietà autunnali americane e da un marzuolo egualmente d'origine americana; minore sensibilità hanno manifestato le razze derivate dall'Inallettabile Vilmorin, il Rieti e il Rosso Olona; la varietà, infine, che dai primi saggi ha offerto la massima resistenza è stata il Carlotta Strampelli.

Procurate subito da altre provenienze spiche di un certo numero delle succitate varietà, esse hanno reagito pressochè alla medesima maniera.

Nella fotografia, che accompagna questa Nota, sono rappresentate spiche di alcune varietà di grano, di orzo e segale dopo permanenza in velo d'acqua a bassa temperatura. Le corrispondenti spiche sotto velo ad alta temperatura avevano, alla fine della prova, granelli rigonfi ma ancora fermi.

Non potendosi escludere che il così diverso comportamento da varietà a varietà dovesse attribuirsi alle condizioni speciali sotto cui nella ultima annata giunsero a maturanza i singoli tipi (in annata a differente decorso una determinata varietà potrebbe reagire appunto in modo diverso), e poichè la questione ha non lieve importanza dal punto di vista applicativo, il tema merita di essere ripigliato con più abbondante materiale e in regioni diverse.

*
* *

Passando ora a definire, se ciò sia consentito in base alle constatazioni qui sopra circostanziate, il meccanismo della germinazione del grano (e cereali ad analogo comportamento) allorchè la mietitura e le susseguenti operazioni, che precedono la trebbiatura, sono disturbate dalle pioggie, è del tutto logico presumere che il fenomeno debba essere appunto preminentemente legato ai repentini abbassamenti di temperature che accompagnano i temporali, quasi sempre a decorso burrascoso, occorrenti nello stesso periodo: ond'è chiaro che il fenomeno tanto più si aggravi quanto più le escursioni termometriche tardano a raggiungere o ad avvicinarsi ai massimi abituali, laddove il contrario accade se le temperature tendono rapidamente a stabilizzarsi verso il normale, nel quale caso i granelli, pur umidi e rigonfi, continuano a mantenersi ingerminabili lungo uno spazio di tempo bastevole perchè l'agricoltore giunga ad asciugare i mannelli o dar aria ai covoni.

[1] Per quanto in grado di germinare e di dare piante vitali, si tratta sempre di un materiale che conviene prudentemente escludere dalle partite di semina.

In opposizione dunque a quanto si può in ragionamento supporre basando le proprie induzioni sul comportamento usuale in letto di germinazione dei semi (non freschi), le basse temperature, che accompagnano le pioggie nel periodo estivo, non solo non costituiscono un fattore inibente della germinazione, ma ne sono anzi una causa determinante o nettamente favoritrice, ed è invece soltanto all'apparentemente deprecabile rapido rialzarsi delle temperature cui si deve se il raccolto può essere salvato dalla grave insidia. In fine, la comune credenza, che porta a ritenere diverso il comportamento delle varietà secondo che queste sieno mutiche o aristate, non trova assolutamente di che appoggiarsi sulle nostre osservazioni.

Dai fatti che siamo andati esponendo e in riferimento alla consuetudine, vigente in alcune zone, di lasciare nei campi gran parte del grano in covoni (« *crocette* ») nel tempo intercorrente tra mietitura e trebbiatura, si dovrebbe inoltre convenire sulla opportunità prudenziale di procedere a un immediato imbicamento, dopo la mietitura, almeno di quelle varietà che si dimostrano più sensibili all'azione delle pioggie, quali sarebbero apparsi i turgidi e gentili in genere tra i frumenti, e l'orzo e la segale tra i cereali minori.

Approfondendo comunque, caso per caso, codeste pur semplici indagini, si potrebbe recare un contributo di cospicua portata applicativa nella grande pratica.

Aggiunta alla Nota. — Altre prove di raffronto tra comportamento di granelli freschi (appena raccolti) e granelli dell'annata precedente portavano, per le numerose varietà sottoposte a prova, a confermare quanto era già stato registrato nel 1920: e cioè che mentre i semi freschi germinano quasi al completo a bassa temperatura, in percentuale molto ridotta a 25-28 centigradi e in proporzione estremamente ridotta a 32-35, invece il frumento dell'annata precedente non soltanto germina rapidamente al completo a 12-15 (quasi sempre, anzi, con lieve anticipo sui granelli freschi), ma ancora con percentuale cospicua a temperatura di 25-28 e con percentuale discreta a 32-35. Il contrasto è, poi, ancor più manifesto nelle avene. Da semplici saggi di germinazione è possibile frattanto distinguere in luglio, con sicurezza pressochè assoluta, un seme dell'annata da uno dell'annata precedente. Quindi è che anche il concetto dell'*optimum* di temperatura per la germinazione di determinate specie dev'essere pur riguardato alla stregua di altri elementi di fatto, quali ad es. quelli emersi dagli odierni rilievi.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 7°, Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 7°-10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. XIII, Fasc. 9°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 8°.
Notizie degli Scavi di Antichità. Vol. I-XVIII. Fasc. 12°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 9.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 9°

Seduta del 7 maggio 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 6 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 4 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1922.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Mineralogia. — *Sterry Hunt e la teoria dei plagioclasi.* Nota II del Corrispondente Ferruccio Zambonini.

Nei lavori speciali e nei trattati anche estesi, nel ricordare i successivi progressi delle nostre cognizioni intorno alla natura dei plagioclasi, il nome di Thomas Sterry Hunt o non viene menzionato affatto (¹), ovvero lo si ricorda in blocco con i più svariati « precursori » di Tschermak, quali Waltershausen, Rammelsberg, Scheerer, Delesse.

In realtà, è del tutto ingiusto trattare alla stessa stregua le idee di Waltershausen, ben diverse, come hanno giustamente rilevato Hintze e Arzruni, da quelle accettate poi per merito di Tschermak, le ipotesi insostenibili di Scheerer ed il contributo decisivo di Hunt.

Sterry Hunt, in due lavori pubblicati nel 1854 e nel 1855 (²), quindi dieci e nove anni, rispettivamente, prima della Memoria dello Tschermak, ha fatto conoscere una serie di nuove analisi di feldspati, nei quali il biossido di silicio variava fra 47,40 e 59,80 % e l'ossido di calcio da 7.73

(¹) Così fanno, per esempio, Hintze e Arzruni, tanto minuziosi nel riferire a lungo anche idee spesso in buona parte inesatte od imprecise.

(²) *Illustrations of Chemical Homology.* Amer. Journ. Scienc. 1854. (2ª) XVIII, 270. Questa nota non è che un brevissimo sunto di una Memoria presentata all'American Association di Washington nel maggio 1854, che non fu mai pubblicata. — *Examinations of some Felspatic Rocks.* Phil. Mag. 1855, IX., 354-363 (specialmente pag. 362).

a 14.24 % mentre gli alcali diminuivano al crescere del calcio (¹). In base a questi fatti (²), Hunt trovò confermata la conclusione che si poteva trarre dalle analisi precedenti di feldspati triclini, non esistere, cioè, limiti definiti per quelle specie che, come la vosgite, la labradorite, l'andesina e l'oligoclasio, sono state create tra l'albite da un lato e l'anortite dall'altro. Egli propose, perciò, di considerare tutti i feldspati intermedî come miscugli di quelle due specie, le quali, essendo omeomorfe, può supporsi cristallizzino insieme in proporzioni indefinite. Le piccole quantità di calcio trovate nelle albiti e di sodio nelle anortiti sarebbero, appunto, dovute alla presenza, rispettivamente, di anortite e di albite (³). Hunt mostrò ancora che albite ed anortite hanno volume

(¹) Non è possibile, perciò, accettare quanto scrisse Rammelsberg nel 1865: « Erst Tschermak hat das Verdienst, die factische Abhängigkeit des Säuregehaltes von dem Verhältniss der beiden Basen hervorgehoben zu haben ».

(²) A torto, quindi, Tschermak (*Die Feldspathgruppe*. Sitzungsber. Wiener Akad. der Wiss. 1864, L, 567) asserisce che Delesse e Hunt non hanno ritenuto bisognevole di una speciale dimostrazione il principio che i feldspati sono miscele di tre specie tipiche. In realtà, Hunt si è appoggiato su fatti e ragionamenti. Quanto a Delesse, egli si è limitato a scrivere: « ...je pense que tous les *feldspaths* du sixième système sont isomorphes, et que leur teneur en silice peut varier d'une manière a peu près continue entre celle de l'albite et entre celle de l'anorthite...... J'ai constaté en outre, par des nombreuses analyses, que plusieurs variétés des *feldspaths* du sixième système peuvent se trouver dans une même roche; il en resulte que dans l'étude minéralogique d'une roche, il vaut mieux définir ces *feldspaths* par les limites entre lesquelles est comprise leur teneur en silice que par les noms d'albite, d'oligoclase, d'andésite, de labrador, de vosgite, d'anorthite, qui ont été donnés à leurs principales variétés:.. » (*Mémoire sur la constitution minéralogique et chimique des roches des Vosges*. Ann. Mines. 1853 (5ª) III, 376). Non si potrebbe documentare meglio che il Delesse non ha avuto nessuna idea precisa che i plagioclasi sono cristalli misti di albite e di anortite. Non soltanto egli non ha preso in esame che le variazioni della silice, ma ha trattato alla stessa stregua di varietà i termini estremi della serie e i cristalli misti intermedî.

(³) Le parole testuali di Sterry Hunt sono le seguenti:

1854. Between anorthite and albite, may be placed vosgite, labradorite, andesine, and oligoclase, whose composition and densities are such that they all enter into the same general formula with them, and have the same equivalent volume. The results of their analysis are by no means constant, and it is probable that many, if not all of them, may be but variable mixtures of albite and anorthite.. : The small portions of lime and potash in many albites, and of soda in anorthite, petalite and orthoclase are to be ascribed to mixtures of other feldspar species.

1855. We have in the rocks which have been the subject of these examinations, a series of felspars in which the amount of silica varies from 47.40 to 59.80 per cent, and that of the lime from 7.73 to 14.24 per cent., the amount of the alcalies decreasing as that of the lime augments. These results only help to confirm the conclusion which may be drawn from all the previous analyses of triclinic felspars, that there are no defined limits for those species which, like vosgite, labradorite, andesine and oligoclase, have been created between albite on the one hand, and anorthite on the other. I therefore proposed some time since to regard all of the intermediate felspars as mixtures of the two species, which, being homoeomorphous, may be supposed to crystallize together in indefinite proportions... Hunt nel lavoro del 1855 combatte anche le idee di Scheerer.

molecolare quasi identico, e riconobbe anche la relazione esistente fra la composizione ed il peso specifico.

Non può, perciò, revocarsi in dubbio che il merito di avere per il primo sostenuto, *in base alle analisi*, che i plagioclasi vanno considerati come cristalli misti di due termini finali, l'albite e l'anortite, spetta a Sterry Hunt [1]. Non si vuole con ciò diminuire il merito di Tschermak, che con una esposizione molto più dettagliata, con le discussioni vittoriosamente sostenute, con l'impulso dato a nuove ricerche, quali quelle importantissime di Schuster, ha fatto sì che quella ipotesi venisse accettata dalla generalità degli studiosi. La dimostrazione indubbia e sicura della miscibilità completa allo stato solido dell'albite e dell'anortite non si ebbe, però, che mezzo secolo dopo Hunt, ad opera di Day e Allen.

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione*. Nota IX del Corrispondente Quirino Majorana.

L'osservazione dell'assorbimento con il metodo di cui ho cominciato a dire nella Nota precedente, permette, come si è visto, di costruire i diagrammi della fig. 5. Ed ho spiegato la ragione per cui essi sieno sensibilmente costituiti da due rette inclinate rispetto agli assi coordinati. Rimane ora da rendersi conto del secondo fatto già accennato, e cioè lo spostamento reciproco di tali due rette; in conseguenza di esso si vede che per la stessa sensibilità della bilancia si hanno due valori dell'attrazione per le due posizioni della sfera; e questi sono costantemente differenti per la stessa quantità, cioè, come si vede dalla figura, per circa 4 millesimi di milligrammo.

Questo valore è precisamente il doppio di quello constatato per l'assorbimento gravitazionale, nel caso della sfera collocata al centro del cubo di piombo. Ora, ciò rappresenta una conferma dell'esistenza del cercato fenomeno. Infatti, poichè dalla figura 5 risulta che sempre l'attrazione del cubo sulla sfera apparisce minore quando questa è al disopra di quello, è assai plausibile ammettere che questo apparente risultato dipenda dal fatto che la sfera pesa meno quando si trova in tale posizione. Tale diminuzione di peso deve dipendere dallo spessore medio di piombo traversato dai raggi gravitazionali terrestri; ma questo spessore, per quanto sia, come nel caso della sfera in centro del cubo, di difficile od indeterminata calcolazione, può, per ragioni analoghe, ritenersi circa doppio di quello traversato dagli

[1] Non va dimenticato, naturalmente, Hessel: le sue idee, però, che nel 1826 rappresentarono una vera divinazione, non sono precise come quelle di Hunt, nè potevano esserlo, data la scarsità dei dati sperimentali allora esistenti.

stessi raggi nel detto caso. Infatti ora si tratta dell'intero lato del cubo, mentre allora solo la sua metà interveniva; per cui si può valutare lo spessore in parola a circa 1 metro.

Siccome poi per la formula semplificata:

$$\varepsilon = m h \delta r\,,$$

dove ε è la constatata diminuzione di peso della sfera di massa m (se circondata dal mantello di densità δ e di spessore r), la variazione od assorbimento ε è proporzionale allo spessore r, rimane giustificato il fatto di trovare variazione doppia ($^4/_{1000}$ di mg.) per spessore doppio.

Il metodo testè descritto, quantunque possa lasciare qualche dubbio sulla sua attendibilità in conseguenza della irregolarità di distribuzione delle singole osservazioni nel diagramma della fig. 5, ha, secondo me, grande valore per la conferma che esso rappresenta di quanto ci era stato appreso dagli esperimenti con la sfera in centro del cubo. I raziocinii e le operazioni sperimentali su cui quel metodo si basa, possono apparire alquanto complessi, ed il lettore potrebbe obbiettare che al fine di eliminare gran parte di tale complicazione si sarebbe potuto procedere nell'esperienza, adottando uno dei due ripieghi seguenti, che appariscono a prima vista intuitivi.

Il primo consisterebbe nello sperimentare sempre con la stessa sensibilità della bilancia, e cioè tanto per il caso della sfera in alto che per quello della sfera in basso. Ma è facile far rilevare quasi, la impossibilità pratica di tale procedimento. Infatti, la sensibilità della bilancia oltre a mutare di giorno in giorno, e talvolta di ora in ora, cambia accidentalmente ed in maniera non prevedibile, per il sollevamento ed il successivo abbassamento del giogo (le quali operazioni sono necessarie allo scambio della tara con la sfera e viceversa), od alla manovra ancora più complessa (ché occorre aprire la custodia della bilancia, eseguire masticiature, etc.), del cambiamento di posizione della sfera, trasportandola da M_1 a M_2, o viceversa. Ho potuto così constatare che, al più, si potrebbe regolare il valore di tale sensibilità in precedenza, cioè prima di abbassare il giogo, con una approssimazione non maggiore del 20 % circa; ed i diagrammi della fig. 5 fanno vedere come anche a variazioni di tale ordine di grandezza debbano corrispondere variazioni nelle constatate attrazioni tra sfera e cubo. Risentendosi dunque (anche così ridotti i limiti di variabilità della sensibilità) l'influenza della inclinazione dei due diagrammi, è meglio rinunziare a tale artificio, sia per semplicità sperimentale, sia ancora perchè lasciando variare spontaneamente la sensibilità, i due diagrammi in parola si estendono dentro limiti più ampii ed ha maggiore attendibilità la conseguente determinazione della loro inclinazione e reciproca posizione.

Il secondo ripiego apparisce forse più plausibile e sarebbe stato quello di adoperare un cavalierino nel congegno $A_1 A_2 A_3$ (fig. 3) di peso all'in-

circa eguale al valore medio della attrazione apparente fra cubo e sfera, e cioè di mg. 0,21 circa; così operando, la determinazione di sensibilità avrebbe corrisposto esattamente a quella di ciascuna osservazione, e i due diagrammi della fig. 5 sarebbero stati paralleli alle ascisse. Ma debbo dire che ha già rappresentato uno sforzo sperimentale notevole, quello di costruire e adoperare con tutta sicurezza (cioè senza pericolo che esso venisse perduto nelle operazioni di scambio nel vuoto) un cavalierino di 1 mg. circa; come è noto i cavalierini di Berzelius delle ordinarie bilancie sono di 10 mg. E ritengo non sarebbe stato pratico, nel caso speciale di cui si tratta pensare alla costruzione di cavalierini ancora cinque volte più piccoli di quello da me adoperato. Per cui anche tale artificio non sarebbe stato realizzabile.

Il metodo ora descritto per l'osservazione della variazione di peso della sfera, permette poi di arrivare alle conclusioni riportate già nella prima di queste Note [1] circa *la sede* del fenomeno gravitazionale, sospettabile nel caso in cui si voglia negare la esistenza del messo etereo, e la cui base sperimentale è stata ora spiegata nei suoi particolari.

Conclusione.

Le delicatissime ricerche sperimentali che ho cercato di descrivere minutamente in queste ultime Note e nelle precedenti, si basano su di una concezione nuova di uno dei più grandi fenomeni naturali. Può apparire a taluno del tutto arbitraria la via da me seguita nel concepire tale piano di ricerche; ma ritengo in ogni caso che essa sia stata logica.

Le ipotesi da me avanzate, con ogni riserva, se da un canto sono certamente ardite, mi hanno dato l'occasione di intraprendere ricerche sperimentali che altrimenti non sarebbero mai state tentate. Ora la ricerca sperimentale costituisce il fondamento vero della Scienza, ed i suoi risultati rappresentano fatti che arricchiscono in ogni modo il nostro patrimonio di conoscenze scientifiche. Nel caso delle mie ricerche, si può anche prescindere dalle teorie aprioristiche da me escogitate e tener per ferma la conclusione che *una massa apparisce più leggera se circondata da altre masse.* Il programma futuro mio o di altri che vorranno ripetere le mie esperienze, deve essere anzitutto quello di ricercare una definitiva conferma di tale delicatissimo fenomeno che, come fa notare il Russell [2], rappresenta la constatazione di una variazione di peso di una o due unità su 1200 milioni. E che tale programma non sia illogico lo dimostra il proponimento di A. A. Michelson di controllare i miei risultati sperimentali. Se questi saranno definitivamente

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. XXX, pag. 78-79.

[2] H. N. Russel, *On Majorana's Theory of Gravitation*, Astroph. Journal, vol. LIV, pag. 343, 1921.

accertati si potrà con maggior cognizione di causa formulare la loro più esatta teoria.

A questo riguardo, e prima di terminare, richiamo ancora l'attenzione del lettore sulle osservazioni contenute nel lavoro citato dell'astronomo Russell.

Questi afferma dapprima che accettando l'idea dell'assorbimento della forza gravitazionale, nella misura da me proposta, è necessario altresì ammettere una corrispondente sparizione della massa inerte nella materia attirata. Solo con ciò sarebbe spiegato perchè non si osservino sensibili perturbazioni nel moto degli astri. Tale ipotesi per altro non avrebbe nulla di illogico, nello stato di ignoranza in cui ci troviamo circa la natura del fenomeno newtoniano. Ma, soggiunge il Russell, la precisione con cui si constatano i fenomeni delle maree, porterebbe ad escludere un assorbimento gravitazionale nella misura di quello da me proposto. Il detto autore, peraltro, non esclude che i fatti da me osservati possano interpretarsi come semplice diminuzione della massa per la presenza di altre masse, ed invoca la ripetizione delle mie esperienze.

Ora, io osservo, la conclusione del Russell è forse troppo assoluta; si può infatti fare qualche ipotesi complementare, come quella di una rifrazione delle linee di forza gravitazionale, o comunque di un loro andamento sinora non previsto, tale da giustificare l'idea dell'assorbimento, malgrado l'esattezza apparente del fenomeno delle maree. Ed io dico ciò non per dichiararmi a tutti i costi ligio a vedute teoriche preconcette, ma per ispirito di assoluta obbiettività, desiderando solo, come ho detto, che l'esperienza e l'osservazione ci svelino la vera natura dei fenomeni che ci circondano.

E concludo affermando anche io la necessità di ripetere ulteriormente le mie ricerche. Nel dubbio che altri accingendosi realmente a tale còmpito possa dare ad esse presto una conferma od una smentita, dò fin d'adesso il preannunzio di una terza serie di esperienze che sto allestendo nell'Istituto Fisico di Bologna ed i cui risultati comunicherò a suo tempo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie i cui spazi osculatori sono biosculatori*. Nota della dott. MARIA CASTELLANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In varî modi è stato dimostrato che se i piani tangenti ad una superficie hanno due punti distinti di contatto, ne hanno infiniti [1] e la superficie è una sviluppabile. Orbene tale proprietà relativa agli intorni del 1° ordine non ha riscontro in proprietà analoga per gli intorni di ordine superiore; mostrerò infatti in questa mia Nota che esistono classi di superficie per le quali ogni spazio 2-osculatore, $S(2)$ [2], ha due punti distinti di osculazione, cioè è biosculatore, senza averne di conseguenza infiniti.

2. Sia data una superficie F di S_r $(r > 5)$ i cui $S(2)$ osculatori siano, come accade in generale, S_5 e ciascuno di essi abbia due punti di osculazione distinti P e Q.

Cominciamo con l'osservare che l'intersezione di due S_5 infinitamente vicini, osculatori rispettivamente in P e P′ (e quindi in Q e Q′), contiene tanto il piano tangente in P, quanto quello tangente in Q.

Se questi due piani sono indipendenti il loro S_5 è lo spazio 2-osculatore sia in P che in P′, cioè lo $S(2)$ non varia, passando da un punto di F ad uno qualsiasi contenuto nell'intorno del 1° ordine di esso; questo $S(2) \equiv S_5$ conterrebbe in tal caso tutta la F, il che è da escludere.

Escludiamo pure che i piani tangenti in P e Q coincidano, perchè, per quanto si è detto, la superficie è allora rigata sviluppabile e la soluzione ha perciò scarso interesse.

Rimangono quindi da esaminare i due casi seguenti:

a) i piani tangenti in punti corrispondenti (come P e Q) stanno in S_4;

b) oppure stanno in S_3.

[1] Del Pezzo, *Sugli spazi tangenti*..... (Rend. della R. Accademia di Napoli, 1886); Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, cap. 9°, n. 13, Pisa, Spoerri, 1907.

[2] Per spazio 2-osculatore in un punto di una superficie intenderemo il minimo spazio che contiene gli S_2 osculatori alle curve per il punto; poichè tale spazio ha in comune con la superficie l'intorno del 1° e del 2° ordine è espressivo il rappresentarlo con il simbolo $S(2)$; E. Bompiani, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Atti R. Accademia d. Scienze di Torino, 1913).

3. Dimostriamo che nel caso *a*) vi sono su F ∞^1 curve lungo le quali è fisso lo S_5 2-osculatore (cioè la F ha soltanto ∞^1 di questi S_5).

Lo spazio *caratteristico* di un S_5 (spazio comune ad S_5 e a tutti quelli infinitamente vicini nell'intorno del 1° ordine) è un S_4 (1): voglio provare che si ha $S(3) = S_6$.

Consideriamo due regioni di F adiacenti a due punti P, Q e su di esse fissiamo le linee coordinate in modo che punti corrispondenti abbiano le stesse coordinate curvilinee u, v. Indichiamo con P^{rs} le derivate $\frac{\partial^{r+s} P}{\partial u^r \, \partial v^s}$ delle coordinate omogenee di P, omettendo l'indice relativo ad una coordinata generica; analogamente per Q. Poichè i piani tangenti nei punti P e Q determinano un S_4, i punti $P, Q, P^{10}, P^{01}, Q^{10}, Q^{01}$ sono linearmente dipendenti, quindi potremo prescindere da uno di essi, per esempio Q^{01}.

Lo S_5 2-osculatore in P potrà individuarsi con lo S_4 precedente e con un punto dell'intorno del 2° ordine di P, cioè, essendo le linee u, v arbitrarie, per esempio con i punti $P, Q, P^{10}, P^{01}, Q^{10}, Q^{01}, P^{20}$. A questo S_5, per definizione di S(2) osculatore e per la proprietà di F, appartengono i punti $P^{11}, P^{02}, Q^{10}, Q^{11}, Q^{02}$ dell'intorno del 2° ordine e valgono per conseguenza relazioni di questo tipo:

$$P^{11} = \alpha P^{10} + \beta P^{10} + \gamma P^{01} + \delta Q^{10} + \varepsilon P + \zeta Q$$

in cui $\alpha, \dots \zeta$ sono funzioni di u, v indipendenti dalle coordinate di P o di Q che si considerano. Oltre a queste relazioni valgono le loro conseguenze differenziali, sicchè per esempio:

$$P^{21} = \alpha P^{30} + \dots..$$

ove i puntini indicano termini contenenti derivate di P e di Q d'ordine ≤ 2 (2) che per le relazioni stesse si possono sostituire con combinazioni lineari dei 6 punti che abbiamo preso per individuare lo S(2) osculatore in P (e Q).

Consideriamo ora lo S_5 2-osculatore in $P' = P + P^{10}du + P^{01}dv$ e congiungiamolo allo S(2) osculatore in P. Lo S_6 congiungente è individuato dallo S_5 osculatore in P e dal punto (3):

$$P^{30}du + P^{21}dv = P^{30}(du + \alpha dv) + \dots..$$

(1) Si potrebbe concludere direttamente a questo punto con l'affermazione fatta, servendosi del Lemma di Bompiani [E. Bompiani, *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*, Rend. Istituto Lombardo, 1919, § 3]; la dimostrazione che segue sfrutta le particolari circostanze che si presentano in questo caso indipendentemente dal Lemma citato.

(2) Coefficienti di queste derivate sono le funzioni $\alpha, \dots \zeta$ e le derivate rapporto ad u.

(3) Si suppone, naturalmente, che P^{30} non stia nello S(2) osculatore in P; la supposizione è lecita, perchè le linee coordinate sono generiche e quindi, se ciò non accadesse, la superficie starebbe in S_6. Si può poi facilmente verificare che anche gli altri punti derivati secondi di P' stanno in quello S_6.

cioè da P^{30}, potendo sempre ritenere, per l'arbitrarietà della scelta delle linee u, v, $du/dv \neq -\alpha$. Lo $S(3)$ osculatore in P (e Q) è dunque un S_6. Proviamo ora che gli $S(2) \equiv S_5$ sono soltanto ∞^1, cioè che nell'intorno del 1° ordine di uno di essi ve ne è uno solo.

Ciò è evidente, perchè gli S_5 nell'intorno di quello fissato passano per lo S_4 caratteristico e stanno in S_6 quindi formerebbero fascio (cui appartiene lo S_5 fissato) intorno allo S_4; ma nel fascio non v'è che un S_5 infinitamente vicino a quello fissato.

Ogni S_5 è quindi 2-osculatore alla superficie in tutti i punti di una curva e, se si esclude che la superficie stessa stia in S_5, le ∞^1 curve così determinate stanno negli S_3 di una sviluppabile.

4. Veniamo ora al caso *b*): i piani tangenti in P e Q determinano un S_3.

La congruenza delle rette come PQ è quindi tale che tutte le rette di essa situate nell'intorno del 1° ordine di una generatrice generica stanno con questa in un S_3. Segue subito da ciò che su ogni generatrice della congruenza si trovano due fuochi (distinti o coincidenti); cioè la congruenza è di quelle (particolari in S_4) che ammettono superficie (o curve) focali.

Nel caso generale, in cui si hanno due superficie focali distinte si ha una *congruenza di Laplace* [1]; le sue rette sono dunque tangenti alle linee di un sistema che fa parte di un doppio sistema coniugato (di una) delle superficie focali.

Se le superficie focali coincidono in una, questa possiede *un* sistema semplice di asintotiche e le rette della congruenza sono tangenti ad esse.

Possono infine le superficie focali della congruenza essere sostituite da curve incontrate (senza contatto) dalle rette della congruenza. Diremo in ogni caso, per brevità, che si ha una *congruenza di Laplace*.

È facile constatare che una superficie incontrata in più di un punto da una generatrice generica della congruenza è una superficie del tipo voluto.

Infatti nel caso generale (e analogamente si verifica per gli altri) ogni superficie F immersa nella congruenza di Laplace ha per $S(2)$ osculatore in un suo punto P che appartenga alla tangente in un punto A, secondo una linea del sistema coniugato di una superficie focale, lo S_5 congiungente i due S_4 2-osculatori a questa in A e nel punto infinitamente vicino sulla tangente fissata. Questo S_5 non dipende da P, ma soltanto dalla generatrice per esso: se questa incontra la F in un altro punto Q gli $S(2)$ osculatori in P e Q coincidono.

[1] Segre, *Preliminari di una teoria.....* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXX, 2° semestre, 1910); E. Bompiani, *Sull'equazione di Laplace* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIV, 2° semestre, 1912); *Pour la géométrie de l'équation de Laplace* (Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 160, pag. 57).

5. Riassumendo si ha:

Esistono due classi di superficie di S_r $(r > 5)$ *tali che i loro* S_5 *2-osculatori hanno (almeno) due punti distinti di osculazione con la superficie. Esse sono*:

a) *le superficie con* ∞^1 S_5 *2-osculatori, contenenti* ∞^1 *curve in* S_3 *di cui due infinitamente vicini si segano in piani* (cioè in S_3 osculatori ad una curva e casi degeneri);

b) *le superficie con* ∞^2 S_5 *2-osculatori immerse in una congruenza di Laplace e incontrate da ogni generatrice in più di un punto.*

Geometria. — *Sur les formes différentielles de M. Fubini.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Soient les coordonnées homogènes x des points et ξ des hyperplans tangents [1] d'une hypersurface Π de l'espace linéaire à $n+1$ dimensions exprimées en fonction de n variables indépendantes quelconques $u_1, u_2, \dots, u_n$ et posons

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\,du_i\,du_k\,, \tag{1}$$

$$\Lambda_3 = S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 2\sum_{ikl} D_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{2}$$

$$\nabla = |\Delta_{ik}|\ [2]\ ,\quad \vartheta_{ik} = \frac{1}{\nabla}\frac{\partial\nabla}{\partial\Delta_{ik}}\,,$$

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2}F_2\sum_{ikl}\vartheta_{ik}\,D_{ikl}\,du_l = 2\sum_{ikl}\Delta_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{3}$$

ainsi que l'on a

$$\sum_{ik}\vartheta_{ik}\,\Delta_{ikl} = 0\,. \tag{4}$$

Soient de plus X et Ξ des solutions quelconques des équations

$$SX\xi = 1\ ,\ SX\frac{\partial\xi}{\partial u_i} = 0\ ;\ S\Xi x = 1\,,\ S\Xi\frac{\partial x}{\partial u_i} = 0\,. \tag{5}$$

On trouve que les x et les ξ vérifient des équations de la forme

$$x_{ik} = \sum_{rs}\vartheta_{rs}\,D_{ikr}\frac{\partial x}{\partial u_s} + b_{ik}\,x + \Delta_{ik}\,X\,, \tag{6}$$

$$\xi_{ik} = -\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,D_{ikr}\frac{\partial x}{\partial u_s} + \beta_{ik}\,\xi + \Delta_{ik}\,\Xi\,, \tag{6'}$$

[1] Les facteurs de proportionalité étant choisis d'une manière quelconque.
[2] On suppose $\nabla \neq 0$.

x_{ik} et ξ_{ik} étant les dérivées secondes covariantes formées par rapport à la forme F_2. Pour $(u_1 \dots u_n)$ données, une quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n}$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$$

à un contact du second ordre avec Π, et $\Lambda_3 = 0$ donne les tangentes à la variété d'intersections de Π et la quadrique. La congruence des droites xX est *conjuguée* a Π, en ce sens que, en chaque point de Π, les n directions correspondantes au développables de la congruence sont conjuguées par rapport à la quadrique $F_2 = 0$ des directions asymptotiques. Corrélativement pour la congruence $\xi\Xi$. Si l'on multiplie les x par un facteur quelconque ϱ et les ξ par le facteur σ, les formes F_2, Λ_3, F_3 se transforment comme il suit

$$F_2' = \varrho\sigma F_2 \ , \ \Lambda_3' = \varrho\,\sigma\,(\Lambda_3 + 3\,F_2\, d \log \varrho/\sigma) \ , \ F_3' = \varrho\,\sigma\, F_3 \,. \tag{7}$$

2. Le facteur des x étant toujours quelconque, je fixe maintenant les ξ à une racine $(n+2)^{\text{ième}}$ de l'unité près par la condition

$$\left| x \,, \frac{\partial x}{\partial u_1} \,, \ldots , \frac{\partial x}{\partial u_n} \,, X \right| = \left| \xi \,, \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \,, \ldots , \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \,, \Xi \right| . \tag{8}$$

Alors, on a simplement $F_3 \equiv \Lambda_3$ et on peut poser

$$X = \frac{1}{n} \Delta_2 x \ , \ \Xi = \frac{1}{n} \Delta_2 \xi \,, \tag{9}$$

où Δ_2 est le paramètre différentiel second formé par rapport à F_2. La quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu\, \Delta_2 x$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu\, \Delta_2 \xi$$

peut être appelée la *quadrique de Lie*, se réduisant à celle qui est connue sous ce nom pour $n = 2$. On a la propriété suivante: Si l'on choisit dans l'hyperplan ξ un espace E_ν a ν dimensions $(1 \leq \nu \leq n)$ passant par le point x, les quadriques de Lie (à ν dimensions) des sections de Π par tous

les espaces à $\nu+1$ dimensions contenant E_ν sont situées sur une quadrique à n dimensions.

3. On achève la détermination des facteurs de proportionalité ([1]) soit en choisissant le facteur de la forme F_2, soit le facteur des ξ, par exemple. Ce dernier choix est d'ailleurs (à un facteur *numérique* des ξ près) équivalent au choix de la congruence xX, liée à la condition unique d'être *conjuguée* à Π au sens expliqué plus haut. On peut appeler la droite xX la *normale* de la métrique définie par la forme F_2 ([2]). En général, par chaque point de Π passent 2^n-1 géodésiques de cette métrique, dont les plans osculateurs contiennent la normale. Les tangentes de ces géodésiques forment la généralisation des trois *tangentes de Segre* du cas $n=2$. Elles sont d'ailleurs indépendantes du facteur de F_2 et peuvent être définies comme les directions ayant la même polaire linéaire par rapport aux deux cônes apolaires $F_2=0$ et $F_3=0$.

4. Supposons maintenant que les x, ξ, toujours fonctions de n paramètres $u_1 \dots u_n$, satisfaisant aux conditions

$$S\xi x = S\xi\, dx = 0,$$

sont les coordonnées dans un espace linéaire à *plus* de $n+1$ dimensions. On a alors une *variété d'élements* à n dimensions. On peut, comme précédemment, former les formes F_2, Λ_3, F_3. Mais ici, on ne peut plus, en général, déterminer les facteurs de proportionnalité de manière d'avoir $F_3 = \Lambda_3$. Pour $(u_1, \dots, u_n)$ données, projetons les plans osculateurs des courbes tracées sur la variété des points x, le centre de projection étant l'espace d'intersection de ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$. Si une correspondance entre deux variétés d'éléments est telle que, pour chaque couple d'éléments correspondantes, les deux ensembles d'espaces projetants que je viens de définir sont *homographiques*, on peut dire, en généralisant la locution de M. Fubini, que les deux variétés d'éléments sont *projectivement applicables*. Or la condition analytique pour l'applicabilité projective des variétés d'éléments est l'invariance de la forme différentielle fractionnaire $\frac{F_3}{F_2}$, tout au moins quand cette expression a un sens, c'est-à-dire si $\nabla \neq 0$.

5. Pour les détails, voir le Mémoire *I fondamenti di geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo del Fubini* qui paraîtra dans les Annali di Matematica.

([1]) Je suppose toujours vérifiée la condition (8).

([2]) On voit que si l'on prend pour ξ les coordonnées cartésiennes normales (les cosinus directeurs et la distance de l'origine), on a la normale ordinaire.

Matematica. — *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque.* Nota di JOSEPH LIPKA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il parallelismo di Levi-Civita annunziato la prima volta nel 1917 (¹) ha avuto molte applicazioni notevoli e ci ha condotto a risultati importanti. Lo scopo di questa Nota è di mostrare come la curvatura geodetica in un punto qualsiasi di una curva in una varietà qualunque può essere definita intrinsecamente per mezzo della nozione di parallelismo; questa definizione è un'estensione semplice di quella della curvatura ordinaria in uno spazio euclideo.

Consideriamo una curva γ in una varietà qualunque, dove il quadrato dell'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = \sum_{rt}^{n} a_{rt}\, dx_r\, dx_s . \tag{1}$$

Sia s l'arco di γ contato a partire da un'origine arbitraria.

Siano P e Q due punti di γ infinitamente vicini corrispondenti a s e $s + ds$. In Q, costruiamo la tangente a γ e la parallela (secondo Levi-Civita) alla tangente in P. Se si designa con $d\omega$ l'angolo di queste direzioni, si definisce la curvatura geodetica di γ in P, mediante la

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{ds \to 0} \frac{d\omega}{ds} . \tag{2}$$

Ora, in una varietà euclidea, il parallelismo di Levi-Civita coincide col parallelismo ordinario, sicchè l'angolo $d\omega$ si identifica col cosidetto angolo di contingenza, e per conseguenza la nostra definizione della curvatura geodetica coincide con quella della curvatura ordinaria.

La definizione usuale della curvatura geodetica in un punto P di una curva in una varietà qualunque, data dal Bianchi (²), è la seguente: Sia g la geodetica in P nella direzione di γ; sulle γ e g si prendano uguali ele-

(¹) *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana* [Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tomo 42, 1917].

(²) *Geometria differenziale*, 2ª edizione, vol. I, pag. 363.

menti lineari PQ e PR; allora, la curvatura geodetica di γ in P si definisce come

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{Q \to P} \frac{2QR}{(PQ)^2},$$

la cui espressione analitica si trova essere

$$(3)\quad \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{1}^{n}{}_{rt}\, a_{rt} \left[\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \right] \left[\frac{d^2 x_t}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \right].$$

Vogliamo costruire l'espressione analitica di $1/\varrho$ data dalla nostra definizione, e mostriamo che questa è d'accordo con quella data dal Bianchi.

Designiamo con $\overline{a}_{rt}$ i valori in Q dei coefficienti della forma fondamentale (1), cioè

$$(4)\qquad \overline{a}_{rt} = a_{rt} + \frac{da_{rt}}{ds} ds + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 a_{rt}}{ds^2} ds^2 \;(^1).$$

Sia $\xi^{(r)}$ il sistema contravariante (parametri) di una direzione generica uscente da P, con che

$$(5)\qquad \sum_{rt} a_{rt}\, \xi^{(r)} \xi^{(t)} = 1\,;$$

e sia $\xi^{(r)} + \frac{d\xi^{(r)}}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2 \xi^{(r)}}{ds^2} ds^2$ il sistema contravariante (parametri) di una direzione corrispondente uscente da Q; avremo analogamente

$$(6)\qquad \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(\xi^{(r)} + \frac{d\xi^{(r)}}{ds} ds + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \xi^{(r)}}{ds^2} ds^2 \right) \times$$

$$\times \left(\xi^{(t)} + \frac{d\xi^{(t)}}{ds} ds + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \xi^{(t)}}{ds^2} ds^2 \right) = 1.$$

La condizione che la direzione in Q sia parallela alla direzione in P è [2]

$$(7)\qquad \frac{d\xi^{(r)}}{ds} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} x'_i\, \xi^{(k)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $x'_r = \frac{dx_r}{ds}$ individua la direzione di trasporto PQ o la tangente in P.

Ora, se $\xi^{(r)}$ coincide con x'_r, la parallela in Q alla tangente in P ha i parametri

$$x'_r + \frac{d_L x'_r}{ds} ds + \tfrac{1}{2} \frac{d_L^2 x'_r}{ds^2} ds^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

(1) Per il nostro scopo, non è necessario di prendere lo sviluppo dei valori delle funzioni in Q al di là di termini del 2° ordine in ds.

(2) Cfr. nota (1), pag. 7

colle condizioni

$$(6') \qquad \sum_{rt} \bar{a}_{rt} \left(x'_r + \frac{d_L x'_r}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d_L^2 x'_r}{ds^2} ds^2 \right) \times \left(x'_t + \frac{d_L x'_t}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d_L^2 x'_t}{ds^2} ds^2 \right) = 1 ,$$

$$(7') \qquad \frac{d_L x'_r}{ds} + \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} x'_i x'_k = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Inoltre, se si designano con

$$x'_r + \frac{d_T x'_r}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d_T^2 x'_r}{ds^2} ds^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

i parametri della direzione tangente in Q, questi sono legati dalla condizione

$$(6'') \qquad \sum_{rt} \bar{a}_{rt} \left(x'_r + \frac{d_T x'_r}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d_T^2 x'_r}{ds^2} ds^2 \right) \times \left(x'_t + \frac{d_T x'_t}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d_T^2 x'_t}{ds^2} ds^2 \right) = 1 .$$

È comodo di scrivere

$$(8) \qquad \frac{d_T x'_r}{ds} + \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} x'_i x'_k = \beta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le β_r sono funzioni di s, cioè dipendono dalle equazioni della curva γ. Introduciamo anche le abbreviazioni

$$(9) \qquad \alpha_r = \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} x'_i x'_k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha, finalmente, in Q, la parallela alla direzione tangente in P coi parametri $x'_r - \alpha_r ds - \frac{1}{2} \frac{d\alpha_r}{ds} ds^2$, e la direzione tangente in Q coi parametri $x'_r + (\beta_r - \alpha_r) ds + \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_r}{ds} - \frac{d\alpha_r}{ds} \right) ds^2$; questi parametri essendo legati dalle identità

$$(10) \qquad \begin{cases} \sum_{rt} \bar{a}_{rt} \left\{ x'_r - \alpha_r ds - \frac{1}{2} \frac{d\alpha_r}{ds} ds^2 \right\} \left\{ x'_t - \alpha_t ds - \frac{1}{2} \frac{d\alpha_t}{ds} ds^2 \right\} = 1 , \\ \sum_{rt} \bar{a}_{rt} \left\{ x'_r + (\beta_r - \alpha_r) ds + \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_r}{ds} - \frac{d\alpha_r}{ds} \right) ds^2 \right\} \times \\ \qquad \times \left\{ x'_t + (\beta_t - \alpha_t) ds + \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_t}{ds} - \frac{d\alpha_t}{ds} \right) ds^2 \right\} . \end{cases}$$

L'angolo $d\omega$ di queste due direzioni è dato da

$$(11)\quad \cos d\omega = \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left\{ x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2} \frac{d\alpha_r}{ds} ds^2 \right\} \times$$
$$\times \left\{ x'_t + (\beta_t - \alpha_t)\, ds + \tfrac{1}{2} \left(\frac{d\beta_t}{ds} - \frac{d\alpha_t}{ds} \right) ds^2 \right\}.$$

Per la prima identità (10), la (11) diviene

$$(12)\quad \cos d\omega = 1 + \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2} \frac{d\alpha_r}{ds} ds^2 \right) \left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_t}{ds} ds^2 \right).$$

Sottraendo le due identità (10) membro a membro, si ha

$$(13)\quad 2 \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2} \frac{d\alpha_r}{ds} ds^2 \right) \left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_t}{ds} \right) +$$
$$+ \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(\beta_r\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_r}{ds} ds^2 \right) \left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_t}{ds} ds^2 \right) = 0 ,$$

e sostituendo in (12), risulta

$$(14)\quad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2} \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(\beta_r\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_r}{ds} ds^2 \right) \left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_t}{ds} ds^2 \right).$$

Coll'espressione di $\overline{a}_{rt}$ fornita dalla (4), e sviluppando, si ha subito

$$(15)\qquad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2} \sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t\, ds^2 + (\text{termini in } ds^3,\ \text{ecc.}).$$

Ma

$$(16)\qquad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2} (d\omega)^2 + \cdots .$$

Perciò

$$(d\omega)^2 + \cdots = \sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t\, ds^2 + \cdots ,$$

e quindi

$$(17)\qquad \lim_{ds \to 0} \left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 = \sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t .$$

Finalmente, sostituendo i valori di β_r da (8), e scrivendo $x'_r = \frac{dx_r}{ds}$, si ricava

$$(18)\ \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{rt} a_{rt} \left[\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \right] \left[\frac{d^2 x_t}{ds^2} + \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ t \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \right],$$

che coincide con l'espressione analitica (3) trovata dal Bianchi.

Matematica. — *Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet.* Nota di M. Picone, presentata dal Socio R. Marcolongo.

Fin dallo scorso agosto sono in possesso di alcuni nuovi risultati concernenti l'integrazione approssimata delle equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine totalmente ellittiche della fisica-matematica. Dietro l'autorevole incitamento del Prof. Marcolongo mi decido a comunicare alla Accademia dei Lincei, in forma molto riassuntiva, taluni di quei risultati dai quali scaturisce un nuovo metodo di calcolo approssimato per la soluzione del problema di Dirichlet, metodo che, a mio modo di vedere, *può veramente proporsi al fisico.* La sistematica esposizione di questi miei studî è in corso di pubblicazione nel *Journal de mathématiques pures et appliquées.*

1. Le funzioni $f_0(s), f_1(s), \dots, f_n(s), \dots$, costituenti una successione illimitata, siano definite nell'intervallo $(0, l)$, esse si diranno *linearmente indipendenti in* $(0, l)$ se, per ogni valore di n, sono tali le $n+1$ funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$. Se le funzioni del considerato sistema illimitato $[f_k(s)]$ sono, ciascuna, di quadrato sommabile in $(0, l)$, il sistema si dirà *completo in* $(0, l)$, quando per ogni funzione $f(s)$, definita in $(0, l)$ ed ivi di quadrato sommabile, per la quale si ha simultaneamente

$$\int_0^l f_k(s)\, f(s)\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

si deduce

$$\int_0^l [f(s)]^2\, ds = 0 .$$

2. Metodo d'approssimazione dei minimi quadrati. — Dato, in $(0, l)$, il sistema completo $[f_k]$ di funzioni linearmente indipendenti, volendo, per combinazioni lineari di queste funzioni, approssimare in tutto $(0, l)$, un'assegnata funzione $f(s)$, ivi di quadrato sommabile, si determinino per ogni valore di n, le costanti $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ in modo da rendere minimo l'integrale:

$$\int_0^l (f - a_0^{(n)} f_0 - a_1^{(n)} f_1 - \cdots - a_n^{(n)} f_n)^2\, ds ,$$

si determinino cioè quelle costanti in modo da soddisfare al seguente sistema

di equazioni lineari

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_0^l f_i f_k \, ds = \int_0^l f f_i \, ds \qquad (i = 0, 1, \dots, n),$$

si dimostra allora che:

La combinazione lineare $F_n(s) = a_0^{(n)} f_0(s) + a_1^{(n)} f_1(s) + \cdots + a_n^{(n)} f_n(s)$, *al divergere di* n, *converge in media, su* $(0, l)$, *verso la funzione* $f(s)$.

3. Completezza dei polinomii armonici sopra una qualunque curva regolare. — Sia z la variabile complessa sul piano (x, y) e si ponga:

$$u_0(x, y) = 1 \ , \ u_{2\nu-1}(x, y) = -R[i z^\nu] \ , \ u_{2\nu}(x, y) = R[z^\nu],$$
$$(\nu = 1, 2, \dots),$$

si dimostra il seguente:

Teorema fondamentale. — *Comunque si assegni nel piano* (x, y) *una curva regolare* Γ *di arco* s — *chiusa o aperta, priva di punti multipli* — *supposto che i punti di* Γ *si abbiano tutti al variare di* s *fra* 0 *e* l, *posto*:

$$(2)\qquad u_k(x, y) \text{ su } \Gamma = f_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

il sistema $[f_k(s)]$ *è sempre completo in* $(0, l)$, *ed è di funzioni ivi linearmente indipendenti.*

Se, in particolare, la curva Γ è un cerchio o un arco di cerchio, di raggio *uno*, si ha la nota completezza del sistema $[\cos ks, \operatorname{sen} ks]$; se la curva Γ è un segmento rettilineo, dell'asse delle x, si ha la nota completezza del sistema $[x^k]$.

4. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet. — Sia Ω un assegnato dominio regolare (semplicemente connesso) — affatto arbitrario — del piano (x, y), sussiste il seguente

Teorema. — *Comunque si assegni sul contorno* Γ *di* Ω *una funzione* $f(s)$ *del suo arco* s, *di quadrato sommabile, considerate le funzioni* $f_k(s)$ *definite dalle* (2), *si risolva, per ogni valore di* n, *il sistema lineare* (1) *e si ponga*

$$U_n(x, y) = a_0^{(n)} u_0(x, y) + a_1^{(n)} u_1(x, y) + \cdots + a_n^{(n)} u_n(x, y),$$

si ha allora che: I) *Il polinomio armonico* $U_n(x, y)$, *al divergere di* n, *converge su* Γ, *in media, verso la funzione* $f(s)$. II) *In ogni dominio completamente interno ad* Ω, *il polinomio armonico* $U_n(x, y)$, *al divergere di* n, *converge uniformemente verso una funzione armonica* $u(x, y)$. III) *Se esiste in* Ω *una funzione armonica che, su* Γ, *prende i valori rappresentati da* $f(s)$, *essa non può essere che la funzione* $u(x, y)$ *testè indicata.*

5. Identici risultati si hanno per il calcolo approssimato della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u = 0$, in tre variabili.

È per me motivo di compiacimento l'essermi incontrato, nel proporre questi nuovi metodi di calcolo per la soluzione del problema di Dirichlet, con l'eminente fisico Marcel Brillouin del Collegio di Francia. Devo alla cortesia di Henri Villat — il nuovo direttore del *Journal de Mathématiques* — la conoscenza, a ricerca compiuta, della memoria del Brillouin: *La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique*, pubblicata, durante la guerra, nel fascicolo settembre-ottobre 1916 degli *Annales de Physique* (tome VI, pp. 137-223). In questa memoria, per taluni casi particolari, supponendo sempre di rotazione il dominio per il quale si vuol risolvere il problema di Dirichlet, il Brillouin propone e raccomanda metodi di calcolo d'approssimazione per la soluzione del problema indicato, che rientrano appunto nei miei. Il Brillouin non dimostra però la convergenza dei proposti metodi d'approssimazione, anzi conclude testualmente così:

« Les séries ainsi construites ne sont pas sans défaut. D'abord, il faudrait « savoir quelles sont les conditions de convergence certaine dans l'espace « compris entre les frontières. J'espère que quelques mathématiciens atta- « queront cette question délicate. . . . .

. . . .

« Bien que ce travail soit uniquement théorique, l'absence (que je re- « grette) de démonstrations de convergence ne permet guère de le classer « sous la rubrique « Physique mathématique ». Ce n'est qu'une méthode « universelle d'organisation des calculs numériques rélatifs aux équations aux « dérivées partielles linéaires ».

Astronomia. — *Sugli indici di colore e sugli spettri delle stelle doppie.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio A. Di Legge.

I principali osservatori di stelle doppie, come W. Struve e Dembowski, oltre alla stima delle grandezze delle componenti, dànno il loro colore espresso in varî gradi di una scala cromatica dal violetto al rosso. Benchè su questa scala possono avere influenza fenomeni fisiologici [1], la grandezza e gli errori dei mezzi ottici adoperati tuttavia, come è stato più volte discusso da varî autori, tali stime di colore concordano in massima fra di loro e con le determinazioni posteriori dei tipi spettrali almeno per le stelle più lucenti.

[1] L. Bell, *Star colors*. Astrophys. Journ., 31, p. 234. 1910.

Struve notava che la differenza di colore assoluta fra le componenti di una stella doppia cresce con la loro differenza di grandezza e recentemente ciò veniva confermato da Wirtz prendendo in esame le stime di colore da lui eseguite e quelle di Dembowski ([1]).

Un altro fatto notevole fu recentemente scoperto da Lau ([2]) il quale separando i sistemi giganti dai sistemi nani per mezzo dei loro moti proprî trova, in base alle stime di colore di Wirtz, che per i tipi spettrali *K* ed *M* vi è una dipendenza fra i moti proprî ridotti all'unità di distanza e le differenze di colore delle componenti (A e B) nel senso che per le coppie con piccolo moto proprio la differenza è negativa, cioè la componente minore è più rossa della principale, mentre il contrario accade per le coppie con notevole moto proprio. La differenza fra le luminosità assolute dei sistemi giganti e nani considerati da Lau è di sei classi di grandezza.

Wirtz riprendendo in esame l'argomento col discutere dettagliatamente le stime di Dembowski giunge ad un risultato analogo a quello di Lau ([3]), però egli osserva come una considerazione statistica, che dipende dal modo come sono ordinati i colori delle componenti A rispetto alle componenti B, basti a spiegare l'andamento notato da Lau. A prova di questo Wirtz, dopo aver preso in considerazione le doppie fisiche tratta anche quelle ottiche e giunge appunto allo stesso risultato provando che questo è una conseguenza necessaria della distribuzione accidentale dei tipi spettrali nelle coppie fisiche ed ottiche. Ma una maggiore conoscenza delle caratteristiche fisiche dei sistemi giganti e nani permette ora una migliore indagine sul fatto avvertito da Lau e di separarlo dalla considerazione statistica che tende a mascherarlo.

Fino a questo momento sono relativamente pochi i sistemi di cui si conoscono gli spettri per ambedue le componenti, la parallasse e quindi la grandezza assoluta; tuttavia nel catalogo di parallassi spettroscopiche di Monte Wilson ([4]) e nel Catalogo Henry Draper di Harvard si trova un certo numero di sistemi fisici per i quali sono dati gli spettri di ambedue le componenti. Quelli determinati a Monte Wilson col riflettore di 60 pollici ed uno spettrografo a fenditura con disposizione Cassegrain, e quindi notevole distanza focale, sono generalmente separati l'uno dall'altro, quelli di Harvard determinati con un prisma obiettivo e distanza focale relativamente breve, sono distinti soltanto per coppie che hanno notevole separazione angolare mentre in parecchi casi si ha uno spettro composto. La stima dei colori delle due componenti data da Struve o da Dembowski serve in questo secondo caso a decidere a quale delle componenti spetti l'uno o l'altro spettro. Nel ca-

([1]) Astr. Nachr., 5034-35. 1920.
([2]) Astr. Nachr., 4898 e 4980. 1917-18.
([3]) Loc. cit., pag. 309.
([4]) *Contributions Mt. Wilson.* Nr. 199. 1921.

talogo di Monte Wilson è data anche la grandezza assoluta dedotta dalla parallasse spettroscopica e per le coppie che si trovano nel catalogo di Draper una conoscenza approssimata della grandezza assoluta si può avere calcolando, con la formula di Kapteyn e van Rhijn:

$$\log p_m, \mu = -0.690 - 0.0713\, m + 0.645 \log \mu ,$$

la parallasse p in funzione della grandezza visuale apparente m, e del moto proprio del sistema μ il quale, per un numero sufficiente di sistemi, è bene determinato. Per un primo esame del problema e per indicare quale via si debba seguire in seguito per una ricerca più esauriente, questi primi dati possono intanto bastare.

Nel catalogo di Monte Wilson si trovano 47 sistemi in maggioranza nani, in quello di Draper, dalle ore 0 alle 14 di ascensione retta finora pubblicate, si trovano 28 sistemi in maggioranza giganti. Separando questi dai nani ed ordinandoli nei due rami dell'evoluzione stellare secondo la classe spettrale a cui appartiene la componente A, ciò che equivale ad ordinarli secondo la loro grandezza assoluta crescente (¹), si ha la tabella:

Sistemi	Spettro Comp. A	Spettro Comp. B	Gr. ass. Comp. A	$i_A - i_B$	Gr. vis. B—A	Massa ☉ = 1	Densità ☉ = 1	Nr. sistemi
			m	m	m			
Giganti . . .	K 2	F 0	— 0.5	+ 0.80 ± 0.10	+ 2.2 ± 0.2	15	< 0.1	9
	G 3	F 7	— 0.1	+ 0.22 ± 0.13	+ 1.7 ± 0 4	14	< 0.1	7
Intermedi . .	A 2	A 4	+ 0 9	— 0.06 ± 0.04	+ 0.8 ± 0 2	9	0 2	14
	F 3	F 8	+ 2.5	— 0.14 ± 0.07	+ 1 1 ± 0.4	4.4	0.3	10
Nani	F 7	G 4	+ 3.9	— 0.24 ± 0.09	+ 1.3 ± 0.4	2.2	0 4	12
	G 3	G 5	+ 4.8	— 0.07 ± 0.04	+ 0.4 ± 0 2	1.5	0.5	7
	G 7	K 1	+ 5.5	— 0 18 ± 0 05	+ 1.0 ± 0.3	1.2	0 6	7
	K 4	K 6	+ 7 7	— 0.06 ± 0.03	+ 0.8 ± 0.3	1.1	0.8	9

In base alla relazione che passa fra la classe spettrale e l'indice di colore (grandezza fotografica — grandezza visuale), come è data nel Catalogo Draper (²), si deducono le differenze fra gli indici di colore (i_A-i_B) delle due componenti paragonabili alle differenze fra i colori visuali calcolate da Lau e da Wirtz sulle scale cromatiche di Dembowski e di Wirtz stesso. Si vede subito dalla tabella che il fatto notato da Lau, in linea generale, veramente esiste e dipende dalle condizioni fisiche dei sistemi considerati.

(¹) Pubbl. del R. Osservatorio di Arcetri, fasc. 39, pag. 31. 1922.
(²) Harvard Annals, vol. 91, pag. 13. 1918.

In quelli giganti la componente principale di classe K è preceduta di due classi dal compagno secondario quando si consideri l'evoluzione stellare nell'ipotesi di Russell. Avanzando la stella principale nel suo stadio di sviluppo, la differenza fra essa ed il compagno tende a diminuire e si annulla per le classi *A* ed *F* nelle quali, come è noto, non vi è distinzione fra sistemi giganti e nani. Procedendo ancora, nella categoria dei sistemi nani la differenza di classe spettrale fra le due componenti sembra divenire costante e tale, che la componente minore precede di circa una mezza classe quella principale. Come caso estremo, che conferma questi risultati, può essere citato quello di α Scorpii, che con una grandezza assoluta di -2.7 e lo spettro di classe *Ma* ha un compagno di grandezza assoluta $+3.2$ e di classe *B* 3 (1) e quindi una differenza fra gli indici di colore delle due stelle di $+1.52$ grandezze.

La differenza di grandezza delle componenti è data nella sesta colonna della tabella e non appare che abbia una relazione definita con la differenza di classe spettrale o dell'indice di colore, per quanto vi sia un accenno di una maggior differenza di grandezza per i sistemi giganti al confronto di quelli nani. Si deve però notare che per i sistemi considerati la differenza di grandezza delle componenti non supera in generale due classi di grandezza, e ciò per la difficoltà di ottenere lo spettro delle componenti deboli in vicinanza a quello del compagno più luminoso; si può quindi dire che manchi ancora ogni notizia sui sistemi le cui componenti differiscono notevolmente in spendore.

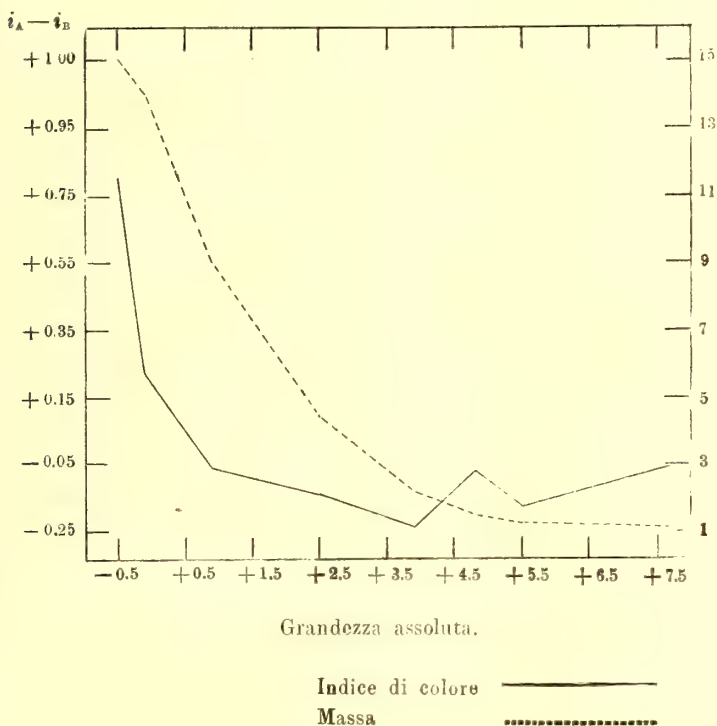
È noto che i sistemi giganti hanno una massa totale considerevolmente maggiore di quella del sole e piccola densità. La massa diminuisce al progredire della classe spettrale ed all'aumentare della grandezza assoluta, fino a ridursi circa uguale a quella del sole per i sistemi nani, mentre la densità aumenta. Nella tabella sono date le masse e le densità che spettano, in base alla loro grandezza assoluta, ai tipi medi dei sistemi considerati per ciascuna riga orizzontale secondo i risultati recentemente ottenuti da Seares (2) e da me (3).

Se si traccia l'andamento della differenza di indice di colore (i_A-i_B) delle due componenti e delle masse dei sistemi stessi in funzione della grandezza assoluta si vede nel grafico, che alla diminuzione della luminosità del sistema corrisponde diminuzione di massa ed una analoga diminuzione nella differenza di indice di colore. Si dovrebbe quindi ammettere che tale differenza, o l'equivalente differenza di classe spettrale delle componenti, dipendano dallo stato di evoluzione del sistema forse in relazione alla sua

(1) Publ. Astr. Soc. Pacific., vol. 33, pag. 206. 1921.

(2) Annual Report Mount Wilson for 1921, p. 277. Carnegie Institution of Washington.

(3) Pubbl. Arcetri, fasc. 39, pag. 31, 1922.

origine, che secondo le teorie più rispondenti ai fatti osservati, sembra si debba ascrivere, o alla scissione, o a nuclei adiacenti e indipendenti di una nebulosa, i quali sono rimasti in permanenza nel loro reciproco campo di gravitazione.

Appunto per giungere ad una più completa conoscenza degli indici di colore delle stelle doppie, estendendola a quelle con componenti di splendore molto diverso, si presenta ovvio il procedimento della determinazione delle grandezze fotografiche e fotovisuali con strumenti di distanza focale sufficientemente grande per poter separare le componenti. Una tale ricerca ho iniziato con l'equatoriale di Amici, il quale, come ho recentemente esperimentato, dà buone immagini sia fotografiche che fotovisuali.

Fisica. — *Le proprietà elettriche dell'argento in rapporto alla cristallizzazione* [1]. Nota II della dott. MARYA KAHANOWICZ, presentata dal Socio M. CANTONE.

La cristallizzazione, riscontrata per mezzo del potere emissivo alle alte temperature [2], ha un'influenza rilevante anche sulle proprietà elettriche del metallo.

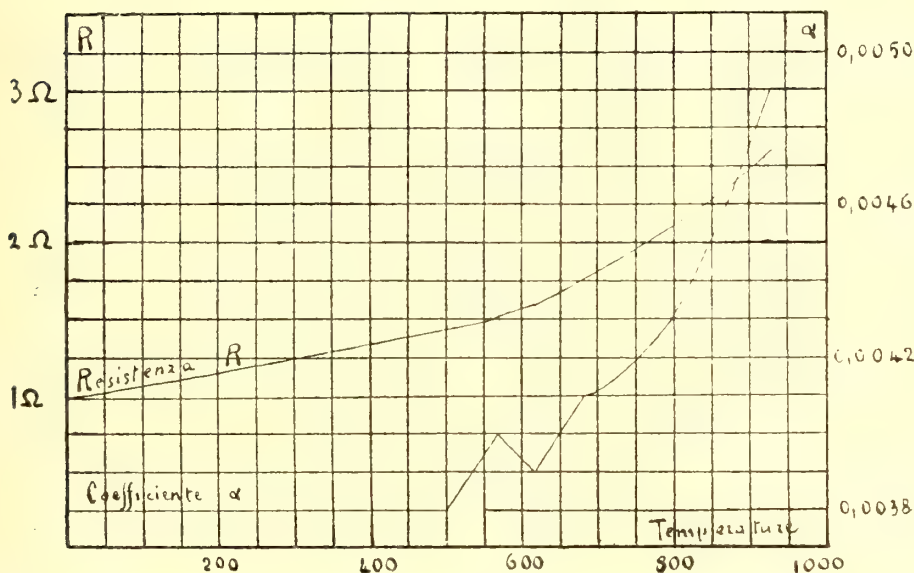
Per la *resistenza* elettrica di un filo di 0,25 mm. di diametro ho ottenuto:

t	R	α	t	R	α
0	0.4690	—	497.3	1.3650	0.0038
61.3	0.5787	0.0038	567.0	1.5223	0.0040
98.3	0.6407	0.0037	616.0	1.5973	0.0039
163.6	0.7568	0.0038	652.1	1.7043	0.0040
224.5	0.8678	0.0039	681.7	1.7773	0.0041
294.4	0.9893	0.0038	797.6	2.0913	0.0043
355.2	1.0986	0.0038	849.3	2.2758	0.0045
440.3	1.2563	0.0038	927.0	2.5803	0.0049

avendo indicato con R la resistenza espressa in ohm, con t la temperatura centigrada e con α il coefficiente medio di variazione della resistenza colla temperatura. Il confronto delle curve qui annesse con quella di emissione ci porta a concludere che il coefficiente α fornisce un elemento molto sensibile per rilevare le modificazioni di struttura che subisce il metallo sottoposto a processi termici, avendosi in corrispondenza della zona di trasformazione un passaggio brusco da una legge di proporzionalità ad una legge crescente. Dall'andamento del detto coefficente si deduce che l'argento fino a 570° C. ca. si comporta secondo le vedute teoriche, avendosi in media per α un valore costante, molto vicino a quello teorico, e precisamente 0,0038; da 500° a 800° C. subisce una trasformazione, in seguito alla quale acquista

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

[2] M. Kahanowicz, *Potere emissivo dell'argento in rapporto alla cristallizzazione*. Questi Rendiconti, pag. 313.

una struttura complicata, ed α diventa rapidamente crescente secondo una funzione di 2° grado.

Nel modo identico il metallo si comporta rispetto al *potere termoelettrico*. Dai valori ottenuti

t	94.7	203.4	296.2	395.5	502.1	600.5	670.7	703.0	795.1	861.8	943.7
e	218	672	1192	1935	2908	4100	5114	5634	7196	8459	10192,

dove e indica la f. e. m. rispetto al platino espressa in mikrovolta e t la temperatura centigrada, si deducono le funzioni:

$$e = 68 + 0{,}8934\, t + 0{,}009643\, t^2 \text{ fino a } 600^\circ$$
$$e = 1500 - 3{,}837\, t + 0\,01382\, t^2 \text{ da } 795^\circ \text{ fino alla fusione.}$$

Si vede quindi che, analogamente al coefficiente α, anche il potere termoelettrico subisce un rapido incremento colla cristallizzazione, avendosi per $\frac{d^2e}{dt^2}$ un salto dal valore 0.0193 al valore 0,0276. Inoltre è da notare che per il metallo cristallizzato i parametri della funzione (e, t) diventano maggiori.

Noto un particolare già rilevato da me nel caso delle leghe, e cioè che l'incrudimento anticipa ed estende la zona di trasformazione [1]. Infatti, secondo

[1] Kahanowicz. *Punti di trasformazione di alcuni metalli e leghe in rapporto al potere emissivo*. Raale Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 5°-6°. pag. 180.

le indicazioni del potere emissivo la cristallizzazione avviene da 700 a 900° C.; invece dalle manifestazioni delle proprietà elettriche bisogna giudicare che il fenomeno viene spostato, iniziandosi verso 570° e terminando a 800°, e ciò perchè il filo cimentato è stato incrudito col passaggio per la filiera, essendo ridotto in parecchie riprese dal diametro di 5 mm. a 0.25 mm.

Lo studio della resistenza è stato eseguito per mezzo di una spirale avvolta in due strati su di un tubo di quarzo. La spirale, alta 10 cm. ca, veniva collocata assieme alla saldatura dell'elemento Le Chatelier nella regione centrale del forno, dove la temperatura si mantiene sufficientemente uniforme. Per lo studio della f. e. m. si ebbe ricorso alla coppia argento-platino, collocando la saldatura Ag — Pt nel centro del forno in immediata vicinanza di quella dell'elemento Le Chatelier.

Riassumendo, valgono per *l'argento non cristallizzato* le seguenti caratteristiche:

Temperatura centigrada	100	200	300	400	500	550
Potere emissivo relativo [1]	0,056	0,071	0,086	0,101	0,116	0,124
Coeff. medio termico della resist.	0.0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038
F. e. m. rispetto al platino	253.8	632.4	1203.9	1968.3	2925.5	3476.5

Per l'argento cristallizzato le relazioni diventano complicate e riesce difficile precisare i parametri, poichè difficilmente si raggiungono valori costanti. Si ha così un indizio che la struttura cristallina è instabile, e ciò è dovuto al fatto che la cristallizzazione iniziatasi una volta si ripete con ogni riscaldamento, e solo dopo parecchi ricuocimenti l'assetto cristallino diventa definitivo.

Geofisica. — *Sulle correnti aeree concomitanti a determinate disposizioni barometriche secondo le osservazioni aerologiche di Catania.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Corrispondente Luigi Palazzo.

In una precedente nota esaminai i lanci di palloni piloti eseguiti a Catania in quasi un triennio e che raggiunsero per la massima parte altitudini prossime ai 4500 metri; e risultò la prevalenza dei venti del quarto quadrante con l'aumentare dell'altitudine. Il numero dei lanci per quote superiori fu piuttosto scarso; tra 5500 e 7500 metri se ne ebbero soltanto 16 e tutte eseguite alle 9 ore. In alcuni di questi appaiono correnti meridionali con grande costanza alle diverse quote, e se si volesse dedurre la fre-

[1] Questi Rendiconti, pag 313.

quenza dei venti basandosi su detti lanci, verrebbero a modificarsi le conclusioni avanti enunciate. Nasce quindi l'idea che detti lanci siano stati eseguiti durante lo svolgimento di alcune determinate disposizioni barometriche, e pertanto è utile rivolgere la nostra attenzione ai singoli lanci al fine di ricavare la concomitante variazione delle correnti aeree alle diverse quote; e poichè ad alcune perturbazioni atmosferiche si attribuisce una zona di azione che interessa i più bassi strati dell'atmosfera, può anche risultare la possibile influenza esplicata dal massiccio dell'Etna.

Possiamo ordinare i lanci eseguiti a seconda della direzione dei venti in essi ottenuta. In un primo gruppo riuniamo i seguenti lanci nei quali fu quasi costantemente osservata la direzione di NW o NNW: 7 febbraio 1914 fino a 6000 m.; 17 aprile 1913 fino a 6900 m.; 22 novembre 1913 fino a 7500 m.; 6 maggio 1913 fino a 6300 metri; 11 ottobre 1913 fino a 7200 m.; 12 ottobre 1913 fino a 7200 m.; 18 ottobre 1913 fino a 7500 m. La distribuzione barometrica concomitante risulta formata da un anticiclone sui Carpazi, da un secondario anticiclone sulla Spagna, e talora detti anticicloni si distendono sul Mediterraneo, mentre un minimo piuttosto profondo giace sulla Lapponia.

In un secondo gruppo riuniamo i lanci nei quali fu quasi costantemente osservata la direzione di NE o NNE o ENE: 13 dicembre 1912; 17 febbraio 1914, 8 marzo 1913. fino a 6600 m. La disposizione barometrica concomitante è quasi identica a quella notata precedentemente e solo va rilevata la distensione dell'anticiclone dei Carpazi sull'Italia meridionale e talora fino al mare Jonio.

Nei due anzidetti gruppi di lanci ci troviamo quindi sotto l'influenza di due aree di elevata pressione prodotte rispettivamente dallo spostamento degli anticicloni siberiano e atlantico sull'Europa centrale e sul Mediterraneo; e in tali circostanze il minimo del nord d'Europa non esercita azione alcuna su tutto il bacino del Mediterraneo.

Già il Fabris aveva notato che in tali circostanze l'afflusso dell'aria dell'anticiclone verso il minimo avviene sino ad alta quota; e i lanci sopra riportati confermano siffatta interpretazione estendendola fino al mare Jonio, dove sin dai primi strati dell'atmosfera l'afflusso di aria si manifesta con i medesimi caratteri e il monte Etna non produce alcuna modificazione.

In un terzo gruppo di nove lanci si mostrarono predominanti, specialmente a grandi altitudini, correnti meridionali: e questa sensibile prevalenza dei lanci con correnti meridionali va attribuita al fatto che, essendo essi accompagnati da una maggiore trasparenza dell'aria si ebbe la possibilità di spingere le osservazioni delle correnti aeree fino ad alta quota.

Però seguendo le direzioni dei venti osservati in ciascuno dei detti lanci e riportate qui appresso, appaiono caratteri particolari a seconda della direzione del vento dominante.

Altitudine in metri	19-IX 1912	30-X 1912	16-XII 1912	27-X 1913	28-X 1913	15-II 1913	27-XII 1913	27-I 1914	18-II 1914
0	SW	NW	W	NW	SE	NE	NE	WNW	SE
300	WSW	W	N	NW	N	NNE	ESE	WNW	SW
600	E	SW	NW	NE	S	NE	ENE	WNW	WSW
900	NE	ENE	NW	NE	SE	NE	NE	WNW	W
1200	SE	SE	NW	NE	ESE	ENE	NNW	WNW	W
1500	ENE	SE	W	NNE	SSE	ENE	SSE	W	W
1800	SE	SSE	W	N	SSE	ENE	NE	NW	W
2100	WSW	SSW	W	NNW	E	NE	NE	NW	SW
2400	WNW	SW	SW	NNE	ENE	NE	ESE	ESE	WNW
2700	SSE	WSW	W	NE	NE	NNE	S	SSE	SW
3000	S	W	W	NE	E	WNW	SSW	ESE	SSW
3300	SSW	NNW	W	ENE	E	NW	WSW	ESE	SSW
3600	SSW	W	W	ENE	E	W	SSW	E	SSW
3900	S	S	SW	NE	SE	W	S	E	WSW
4200	SSW	S	WSW	NE	SSE	WSW	SSE	ESE	SSW
4500	SSE	S	WSW	WNW	SSW	SW	SSE	SE	SSW
4800	SE	SSE	WSW	W	SSW	WSW	SSE	S	SW
5100	SE	SSE	WSW	W	S	WSW	SSE	SSE	SSW
5400	SE	SSE	SW	W	S	WSW	ESE	SSE	S
5700	SE	SSE	SW	SW	S	WSW	ESE	SSE	SSW
6000	SE	SSE	SW	S	SSW	WSW	SSE	SSE	WSW
6300	SE	SSE	SW	SW	SW	WSW	WSW	S	WSW
6600	SE	SSE	WSW	SW	SSW	SW	SW	S	SSW
6900	SSE	SSE	W	SW	SSW	SW	SW	S	—
7200	SSE	SSE	W	SW	SSW	SW	SW	S	—
7500	SSE	SSE	W	SW	S	SW	SW	SSE	—

Difatti nel lancio del 30 ottobre 1912 a cominciare dalla quota 1200 m., e in quello del 27 gennaio 1914 a cominciare dalla quota 2400 m., si stabiliscono definitivamente le correnti di SE, mentre sappiamo che a tali quote predominano venti del quarto quadrante. Siffatta irregolarità va interpretata con la concomitante distribuzione barometrica.

Il giorno 30 ottobre 1912 si hanno due aree di elevata pressione l'una a 771 su i Carpazi, l'altra a 765 sulla Spagna, mentre un minimo a 736 giace sull'Irlanda; la sera di detto giorno ove al mattino notavasi una lieve diminuzione di pressione rispetto alle regioni circostanti, appare una depressione che il giorno successivo si allarga invadendo anche la valle padana.

Il giorno 27 gennaio 1914 due aree di elevata pressione rispettivamente a 779 e a 770 giacevano sui Carpazi e sulla Spagna, mentre un minimo profondo a 730 si distende sulla Lapponia. Sulla Liguria vi è una

area con pressione di 762 minore della circostante distribuzione barica e il mattino del giorno successivo la troviamo intensificata e dotata di una grande velocità di spostamento, tanto è vero che al mattino del giorno 29 si trova sulle Puglie. I due anzidetti casi mostrano come l'apparizione delle depressioni sul Tirreno viene a manifestarsi con predominanza di correnti meridionali fino ad alta quota. Abbiamo così una conferma all'ipotesi emessa in altra occasione, che cioè le depressioni secondarie del mare ligure appaiono talora intimamente legate a profondi minimi apparsi sull'Europa settentrionale

Il lancio del 19 settembre 1912 è particolarmente interessante perchè indica lo stabilimento decisivo della corrente di SE o SSE a cominciare dall'altitudine di m. 2700. Contemporaneamente si aveva una elevata pressione intorno a 770 che copriva l'Europa settentrionale fino a 775 sull'Inghilterra; siffatta elevata pressione si protendeva anche sulla Rumania ove si aveva pressione vicino a 768 e in Italia si aveva quasi un livellamento intorno a 766, mentre una minore pressione risiedeva sulla Spagna, e sulla Algeria si delinea la più bassa pressione di quel giorno intorno a 761. È la disposizione caratteristica che apporta lo scirocco, e le osservazioni aerologiche di tale giorno ci confermano l'ipotesi da tempo formulata, che cioè la corrente di scirocco è una corrente superiore e su di essa il monte Etna non esercita alcuna azione perturbatrice.

Nei rimanenti lanci compresi nel 3° gruppo e cioè in quelli dei giorni: 18 febbraio 1914; 28 ottobre 1913; 27 ottobre 1913; 15 febbraio 1913; 16 dicembre 1912 e 27 dicembre 1913, si hanno sensibili prevalenze dei venti di SW o SSW o WSW. Nei primi tre di essi le contemporanee disposizioni bariche mostrano come l'approssimarsi delle condizioni favorevoli alla trasformazione delle saccature in depressioni si delinea ad alta quota nelle regioni meridionali.

E difatti il giorno 18 febbraio 1914 il massimo a 765 è sulla Spagna e sui Carpazi e da quivi si distende sull'Italia meridionale e insulare, ove si ha 770 mm.: e il minimo a 736 giace sulla Lapponia con distensione sulla Russia. Sulla rimanente parte della penisola italica la pressione è quasi livellata a 765 e una lieve saccatura si individua sulla Valle Padana attraverso il Veneto, ed appare più distinta il giorno successivo. Il giorno 27 ottobre 1913 si ha il massimo a 770 sui Carpazi, minimo 741 sulle Ebridi e minore pressione a 761 sulla Spagna con tendenza delle isolare basse a distendersi sul Mediterraneo attraverso la Francia; e il giorno successivo 28 una depressione si forma sull'alto Tirreno.

Nel lancio del giorno 15 febbraio 1913 si ha estesa area a 774 sulla Germania e minimo a 744 sulla Irlanda; una lieve depressione a 754 permane sull'Egeo e quantunque una minore pressione a 760 occupi l'Algeria, la depressione si colma.

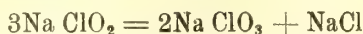
E infine in quello del giorno 16 dicembre 1912 il massimo a 775 occupa la Spagna, il minimo a 732 si distende sul Baltico protendendosi attraverso la Russia sull'alto Veneto, ma la depressione non viene a formarsi. Le osservazioni aerologiche contemporanee dànno venti di SW o WSW tra 3900 m. e 6900 m. e poi riappaiono i venti di W che predominavano a bassa quota. Questo limitato spessore in cui si ha il predominio di SW prova la poca entità della saccatura, che non trova condizioni favorevoli per manifestarsi.

Da quanto abbiamo esposto risulta come i lanci di palloni piloti eseguiti a Catania hanno indicato le condizioni favorevoli alla formazione di depressioni secondarie o di stabilimento di saccature nelle regioni settentrionali, e siccome nei giorni prossimi a tali speciali depressioni barometriche il cielo si mantiene piuttosto nuvoloso o nebbioso sulle predette regioni, emerge l'importanza dei lanci di palloni piloti nelle regioni meridionali, ove può anche contarsi su di una maggiore serenità e quindi sulla possibilità di scandagliare l'atmosfera fino ad alta quota.

Chimica. — *Reazioni di ossidazione e di riduzione coi cloriti* [1]. Nota di Giorgio Renato Levi, presentata dal Corrisp. G. Bruni [2].

In una Nota precedente [3] ho descritto la preparazione del clorito sodico anidro e del clorito sodico triidrato. I cloriti alcalini, e perciò il clorito sodico, si prestano particolarmente bene allo studio delle proprietà dei cloriti stessi, che possono comportarsi da ossidanti riducendosi a cloruri, o da riducenti ossidandosi a clorati, a seconda delle sostanze con cui reagiscono.

Decomposizione del clorito sodico col riscaldamento. — In questa reazione una parte del clorito sodico si riduce a cloruro mentre l'ossigeno che si forma ossida il rimanente clorito a clorato. Questa reazione può considerarsi parallela a quella, ben nota, di decomposizione del clorato in cloruro e perclorato e può essere realizzata rapidamente a temperature fra 180-200°; in condizioni cioè nelle quali il clorato non può ancora decomporsi. La reazione avviene secondo lo schema:

$$3NaClO_2 = 2NaClO_3 + NaCl$$

e cioè un terzo del clorito presente viene trasformato in cloruro e due terzi in clorato. Il clorito sodico secco non perde sensibilmente di peso per riscal-

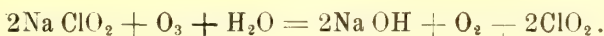
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 7 maggio 1922.

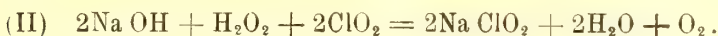
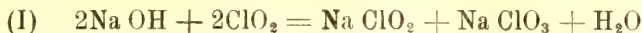
(3) Rendiconti dei Lincei, vol. XXXI, pag. 212 (1° sem. 1922).

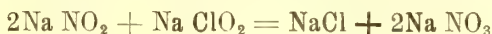
damento a 180-200°; le diminuzioni avute furono 0,3-0,4 % del peso della sostanza: le quantità di cloruro sodico formate furono controllate precipitando in soluzione neutra con nitrato d'argento e raccogliendo rapidamente in Gooch il cloruro d'argento ottenuto. Il percento di cloro calcolato per la reazione sopra scritta è 13,06 mentre sperimentalmente ottenni 12,78 (media di tre prove di riscaldamento perfettamente concordanti). Intorno ai 200° la massa di cloruro e clorato formata appare quasi completamente fusa.

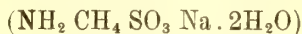
Decomposizione del clorito sodico in soluzione per azione dello ozono. — Con ossigeno ozonizzato ottenuto da un comune ozonizzatore Siemens e a temperatura ambiente, le soluzioni di clorato sodico non subiscono alcuna alterazione; le soluzioni di clorito vengono invece rapidamente ossidate e il prodotto di ossidazione è biossido di cloro:

$$2Na\,ClO_2 + O_3 + H_2O = 2Na\,OH + O_2 + 2ClO_2 .$$

Se la corrente di ossigeno ozonizzato è abbastanza rapida, il biossido di cloro viene trascinato, almeno in parte, da questa e perciò il liquido assume rapidamente forte reazione alcalina; se il biossido di cloro resta nella soluzione reagisce nuovamente con questa dando clorito e clorato sodico secondo (I) e se l'ozono in eccesso ha formato dell'acqua ossigenata, secondo (II) nel modo generale di reazione trovato da Reychler fra perossidi e biossido di cloro: in ogni caso non si forma cloruro.

$$\text{(I)} \quad 2Na\,OH + 2ClO_2 = Na\,ClO_2 + Na\,ClO_3 + H_2O$$

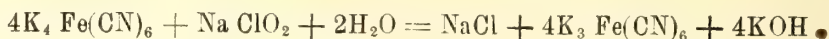
$$\text{(II)} \quad 2Na\,OH + H_2O_2 + 2ClO_2 = 2Na\,ClO_2 + 2H_2O + O_2 .$$

Reazione fra nitriti e cloriti in soluzioni neutre. — Mescolando soluzioni neutre e sufficientemente concentrate di cloriti e nitriti alcalini si ha un notevole sviluppo di calore mentre avviene la reazione:

$$2Na\,NO_2 + Na\,ClO_2 = NaCl + 2Na\,NO_3$$

e perciò la soluzione rimane neutra. In soluzioni diluite occorre riscaldare qualche tempo per completare la reazione; l'andamento di questa venne controllato quantitativamente mescolando soluzioni di clorito e nitrito sodico, quest'ultimo in quantità doppia del teorico, scaldando 15-20 minuti all'ebollizione: la soluzione avuta si porta a volume e si titola facendola cadere da una buretta in una quantità pesata di solfanilato sodico puro

$$(NH_2\,CH_4\,SO_3\,Na\,.\,2H_2O)$$

fino a reazione persistente alla carta d'amido iodurata.

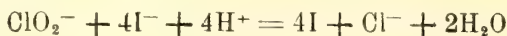
Reazione fra ferrocianuri e cloriti. — Scaldando soluzioni neutre di ferrocianuri e di cloriti il liquido assume forte reazione alcalina mentre il

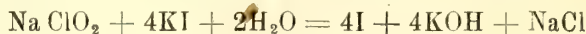
ferrocianuro si ossida a ferricianuro: la reazione avviene secondo lo schema:

$$4K_4\,Fe(CN)_6 + Na\,ClO_2 + 2H_2O = NaCl + 4K_3\,Fe(CN)_6 + 4KOH\,.$$

e può essere condotta a termine neutralizzando l'alcali caustico che si forma con precauzione con acido solforico diluito o aggiungendo un sale, che neutralizza l'alcalinità man mano che si forma, come il solfato di magnesio: in questo secondo caso si forma dell'ossido idrato di magnesio che rimane sospeso nella soluzione.

I clorati in soluzione neutra non ossidano i ferrocianuri.

Reazione fra cloriti e ioduri in soluzione neutra. — La reazione

$$ClO_2^- + 4I^- + 4H^+ = 4I + Cl^- + 2H_2O$$

è stata data da W. Bray [1] in uno studio sistematico sul biossido di cloro. Mi sono preoccupato di stabilire l'andamento della reazione con soluzioni neutre di cloriti puri. I cloriti liberano, a caldo, dalle soluzioni di ioduri dello iodio e la reazione può essere completata aggiungendo una sostanza capace di neutralizzare l'alcalinità prodotta dalla reazione:

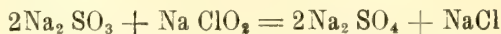
$$Na\,ClO_2 + 4KI + 2H_2O = 4I + 4KOH + NaCl$$

per esempio acido borico. La reazione va condotta a bagno maria con apposito dispositivo per evitare la sublimazione dello iodio.

Si può in tal modo determinare i cloriti accanto ai clorati che in queste condizioni non liberano iodio dagli ioduri. Ho in corso una serie di titolazioni di diverse miscele di composti ossigenati del cloro e particolarmente di cloriti e clorati, per stabilire con precisione le migliori condizioni di titolazione dei varî composti ossigenati del cloro anche se sono presenti tutti e quattro contemporaneamente. Questo problema, pur essendo stato precedentemente trattato da altri, non è mai stato condotto in modo completo per la mancanza di cloriti puri.

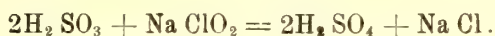
Le soluzioni neutre dei cloriti non alterano le soluzioni dei bromuri alcalini; in soluzione acida per acido solforico si libera bromo; in modo analogo si comportano i bromati.

In modo diverso si comportano le soluzioni acide di iodati e periodati perchè non si libera iodio in nessuno dei due casi, ma soltanto composti ossigenati di cloro prodotti dalla decomposizione dell'acido cloroso.

Reazione fra solfiti e cloriti. — Le soluzioni neutre reagiscono lentamente secondo l'equazione:

$$2Na_2\,SO_3 + Na\,ClO_2 = 2Na_2\,SO_4 + NaCl$$

(1) Z. f. Phys. Chem., *54* (1906), 563, 569, 731.

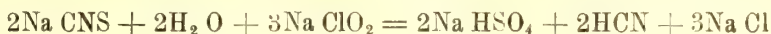
e perciò non si altera la neutralità del liquido; con soluzioni di acido solforoso libero la reazione è immediata:

$$2H_2SO_3 + NaClO_2 = 2H_2SO_4 + NaCl.$$

Reazione fra tiosolfati e cloriti. — Mescolando soluzioni neutre di cloriti e tiosolfati si ha uno sviluppo di calore assai notevole mentre la soluzione diventa fortemente acida. Impiegando le quantità stechiometriche la reazione procede principalmente secondo lo schema:

$$Na_2S_2O_3 + 2NaClO_2 + H_2O = 2NaCl + 2NaHSO_4\,;$$

l'acidità formatasi è però sempre un po' inferiore al calcolato e si forma anche un poco di acido solforoso. L'ossidazione completa di tutto lo zolfo ad acido solforico si ottiene soltanto impiegando un leggero eccesso di clorito. La reazione si compie facilmente, e perciò con forte riscaldamento, anche se la soluzione viene mantenuta neutra con ossido di magnesio sospeso.

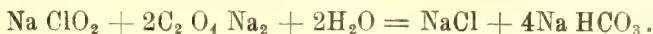
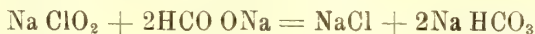
Reazione fra solfocianati e cloriti. — Per riscaldamento le soluzioni neutre diventano acide mentre si svolge acido cianidrico. La reazione avviene principalmente secondo lo schema:

$$2NaCNS + 2H_2O + 3NaClO_2 = 2NaHSO_4 + 2HCN + 3NaCl$$

e può essere condotta anche in presenza di ossido di magnesio sospeso nel liquido. Come nella precedente ossidazione dei tiosolfati, si richiede un leggero eccesso di clorito perchè tutto lo zolfo del solfocianato sia ossidato ad acido solforico.

L'*idrogeno solforato* viene ossidato dalle soluzioni neutre dei cloriti che diventano acide per formazione di acido solforico: la reazione si compie a temperatura ordinaria. Anche le soluzioni rese alcaline con alcali caustico vengono ridotte dall'idrogeno solforato.

I *formiati* e gli *ossalati* riducono lentamente a caldo le soluzioni dei cloriti ed il liquido assume reazione alcalina:

$$NaClO_2 + 2HCOONa = NaCl + 2NaHCO_3$$

$$NaClO_2 + 2C_2O_4Na_2 + 2H_2O = NaCl + 4NaHCO_3.$$

Acidificando con acido solforico diluito la reazione si compie rapidamente mentre si svolge anidride carbonica.

Riassumendo, da quanto è stato sopra esposto, risulta che i cloriti si comportano come ossidanti verso tutti i reattivi studiati e come riducenti soltanto verso l'ozono.

Chimica. — *Amiroli isomeri* (1). Nota del dott. V. Paolini, presentata dal Corrisp. A. Peratoner.

Col nome di Amirolo si indica il composto terpenico di natura alcoolica, isolato da Duliere (2) dall'olio essenziale dell'*Amyris balsamifera* L., della famiglia delle Rutacee.

Tale olio in commercio viene comunemente ricordato col nome di essenza di Sandalo delle Indie Occidentali, per distinguerlo dall'essenza di Sandalo delle Indie Orientali, proveniente da una vera e propria Santalacea.

La differenza più marcata fra le due essenze risiede nel potere rotatorio; l'essenza di *Amyris* è destrogira, mentre l'essenza di Sandalo è sempre sinistrogira. Soden (3) per primo ha dimostrato che l'Amirolo è un miscuglio di due alcooli terpenici, in massima parte liberi, e in minor misura sotto forma di eteri acetici; di questi uno, $C_{15}H_{25}OH$, destrogiro, con $\alpha_D = +36°,00'$ ha punto di ebollizione 299°, l'altro $C_{15}H_{23}OH$, non ancora isolato allo stato puro, bolle a temperatura più bassa ed è inattivo rispetto alla luce polarizzata. La separazione di questi due alcooli, come fu ottenuta dal Soden per mezzo di un procedimento assai elementare quale è la distillazione frazionata dell'essenza, previamente saponificata, è pertanto incompleta, e non si può affermare fino a qual punto i due Amiroli siano composti unici, e non piuttosto miscugli di antipodi ottici.

Il metodo particolarmente adatto alla depurazione degli alcooli terpenici, come è noto, è quello che si basa sulla loro eterificazione con anidride ftalica, e che ripetutamente ho applicato nel passato ad altri termini di questa serie. Dagli ftalati acidi, poi, per saponificazione, si ricavano gli alcooli puri.

Intanto riguardo al caso in ispecie, lo stesso Soden ha potuto osservare che gli eteri composti, ftalico ed acetico, dell'Amirolo non si possono ottenere in modo così semplice come quelli di altri alcooli terpenici, cioè per riscaldamento dell'alcool con le anidridi; quando si riscalda a 100° l'amirolo con anidride ftalica o con anidride acetica, si verificano reazioni secondarie, in quanto che gli agenti acidi provocano la rottura del nucleo terpenico, con eliminazione di acqua e formazione di idrocarburi sesquiterpenici.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

(2) Journ. Pharm. Chim., VI. 7, 533.

(3) Pharm. Ztg., 45 (1900), 878.

Tuttavia anche in questo caso io sono riuscito, non senza difficoltà, alla soluzione del problema, traendo profitto dei buoni risultati conseguiti nello studio precedente di altri alcooli terpenici, tanacetilico, linalolico, santalolo, sabinolo, carvomentoli ecc. ecc.

La modificazione introdotta nel metodo (di Haller) consiste nel far reagire *a freddo* l'anidride ftalica con una soluzione in benzina (petrolica) del derivato (alcoolato) sodico o potassico dell'alcool da eterificare. Escludendo ogni riscaldamento, l'eterificazione procede quantitativamente, ed i prodotti che si ottengono sono privi si sostanze resinose o di idrocarburi, provenienti dai processi di disidratazione ricordati.

Anche questa volta, constatando che lo ftalato acido grezzo è una massa molle, appiccicaticcia, sono ricorso alla formazione di ftalati doppî, scegliendo opportunamente la stricnina o l'argento, per preparare dallo ftalato acido sali ben cristallizzabili, e che si possono facilmente purificare.

La stricnina si presta particolarmente bene, oltre che per le modalità operative, anche perchè, con ciascuno degli stereoisomeri, i quali effettivamente sono contenuti nello ftalato acido grezzo, fornisce (per sdoppiamento del miscuglio) sali di solubilità marcatamente diversa in una mescolanza alcoolica-eterea. Dal sale di stricnina meno solubile, fusibile a 201°, con $[\alpha]_D = +18° 26'$, per azione dell'acido cloridrico al 20 % in presenza di alcool assoluto, misi in libertà lo ftalato acido di amirolo, sempre molle appiccicaticcio, che per saponificazione per potassa alcoolica, fornì un amirolo fortemente destrogiro, con $[\alpha]_D = +74° 16'$ (di fronte a $+36° 00'$ dell'amirolo di partenza), e che possiede i caratteri di una sostanza unica, perchè salificato con anidride ftalica e susseguentemente con stricnina, presenta lo stesso punto di fusione, lo stesso potere rotatorio specifico del prodotto puro sopra descritto.

Il liquido alcoolico etereo, proveniente dalla separazione del superiore sale di stricnina meno solubile, dopo un riposo di 15 giorni, non ne lasciava depositare più cristallo alcuno. Indi per evaporazione del solvente rimase un sale sciropposo derivato da un alcool sinistrogiro. Per isolare quest'ultimo si trasformò tale sale doppio di stricnina, sciropposo, solubile, in sale doppio di argento, insolubile in acqua, e facilmente cristallizzabile dall'alcool.

Dal sale di argento puro, fusibile a 145°, messo in libertà lo ftalato acido, molle, sciropposo, questo in fine per saponificazione con potassa alcoolica, diede amirolo sinistrogiro con $[\alpha]_D = -1° 59'$.

Materiale di partenza. — L'amirolo, fornitomi dalla casa Schimmel e C. di Lipsia, presentava i seguenti caratteri: liquido molto denso, oleoso; $\delta^{15} = 0,981 : \alpha_D = +29° 30'$: p. eb. 170° a 16 mm. di pressione.

Fu sottoposto ad una serie sistematica di frazionamenti nel vuoto, e le frazioni con punto di ebollizione più elevato, e più ricche in amirolo de-

strogiro, che mostravano $\alpha_D = +36^\circ 00'$, venivano adoperate per la preparazione dello

Ftalato di Amirolo e stricnina. — Gr. 10 di amirolo sciolti in 100 cc. di benzina di petrolio (70-80°) si pongono a reagire con un leggero eccesso (gr. 3 invece di 1,75) di *potassio* metallico [1], e si favorisce la reazione riscaldando a 40°-50°. Dopo 5, 6 ore la soluzione limpida del sale potassico dell'amirolo, decantata dall'eccesso di metallo, si fa gocciolare nella quantità teorica di anidride ftalica (gr. 6,66) sospesa in 250-300 cc. di etere di petrolio. Si agita continuamente lasciando il tutto a sè per 7 giorni, dopo di che si depone il composto potassico in un magma. Allora si riprende il prodotto della reazione con 300-400 cc. di acqua leggermente alcalina per idrato potassico, ed in tal modo l'etere ftalico acido passa in soluzione nell'acqua sotto forma di sale potassico. Questo liquido acquoso alcalino viene ora acidificato con acido solforico diluito, con che si separa rapidamente una sostanza oleosa, appiccicosa, gialliccia, che nemmeno dopo prolungato riposo sott'acqua, tende a rapprendersi. Viene dapprima purificata sciogliendola in soluzione diluita di carbonato sodico; tale soluzione viene agitata con etere di petrolio che asporta qualche traccia di alcool inalterato; quindi per aggiunta di acido solforico diluito si torna a precipitare l'etere acido, sempre molle, sciropposo.

Lavato e disseccato nel vuoto, viene disciolto in alcool assoluto, ed alla soluzione alcoolica si aggiunge la quantità equivalente di stricnina finamente polverizzata, che subito si discioglie. Il sale di stricnina molto solubile in alcool, per aggiunta di un doppio volume di etere etilico, si separa rapidamente in forma di precipitato bianco cristallino, che viene raccolto su filtro e lavato con etere. Questo sale di stricnina meno solubile deriva da uno stereoisomero destrogiro. Purificato per successive cristallizzazioni dall'etere acetico, fonde costantemente a 201°; cristalli aghiformi, incolori.

0,201 gr. sostanza; 0,550 CO_2; 0,1329 H_2O

$C_6H_4 \begin{cases} COOC_{15}H_{25} \\ COOHC_{21}H_{22}N_2O_2 \end{cases}$			
Calcolato	C 75,00	H 7,38
Trovato	74,62	» 7,34

Una soluzione contenente gr. 6,3792 di sale in 100 cc. di cloroformio, dà in tubo lungo 2 dcm. $\alpha_D = +2^\circ 20'$ onde $[\alpha]_D = +18^\circ 26'$.

Ftalato acido di d-Amirolo. — Gr. 40 di sale di stricnina, vengono disciolti in 300-400 cc. di alcool assoluto, ed alla soluzione alcoolica si aggiunge acido cloridrico al 20 % in eccesso, in modo da salificare tutta la stricnina; dopo qualche ora per aggiunta di molta acqua si separa lo ftalato acido molle, sciropposo, che non si riesce in nessun modo ad avere sotto

[1] Il sodio metallico è quasi senza azione, anche all'ebollizione del solvente.

altra forma. Raccolto su filtro e lavato con acqua, viene saponificato a caldo con potassa alcoolica; dopo diluizione con acqua, si estrae con etere. Per distillazione dell'etere rimane indietro il

d-Amirolo. — Bolle a 302° senza decomposizione. Liquido denso, oleoso, limpido, di odore poco gradevole:

$$\delta^{15} = 0{,}982 : \alpha_D = +72°\,50' \quad \text{(tubo lungo 1 dcm.)}$$

onde

$$[\alpha]_D = +74°16'.$$

Questo potere rotatorio specifico venne controllato anche con dati ottenuti mediante le soluzioni alcooliche.

Ftalato di l-Amirolo e di argento. — Dal liquido alcoolico-etereo, che dopo lunghissimo riposo non lascia più separare sale cristallizzato di stricnina e d-amirolo, si ricava per evaporazione un residuo denso, sciropposo, dal quale si rimette in libertà uno ftalato acido nel modo detto sopra a proposito del sale di stricnina cristallizzabile. Lo ftalato acido risultante, oleoso, viene disciolto nella quantità calcolata di ammoniaca, ed alla soluzione acquosa del sale ammoniacale si aggiunge lieve eccesso di nitrato di argento: si forma subito un precipitato bianco voluminoso, che lavato con acqua e disseccato accuratamente al buio, viene ricristallizzato dall'alcool assoluto sino a punto di fusione costante.

Fonde allora a 145°.

Gr. 0,502 di sale secco diedero 0,1136 di Ag metallico.

	Trovato	Calcolato
Ag%	22,62	22,73

Ftalato acido di l-Amirolo. — Dal sale di argento puro, per riscaldamento a b. maria con soluzione di cloruro di sodio, si prepara lo ftalato di sodio e di amirolo facilmente solubile nell'acqua, mentre tutto l'argento precipita sotto forma di cloruro insolubile.

Dalla soluzione di ftalato di sodio e di amirolo, per aggiunta di acido solforico diluito, precipita lo ftalato acido, oleoso, che viene saponificato a caldo con potassa alcoolica; dopo diluizione con acqua si separa l'amirolo, che viene estratto con etere e distillato.

l-Amirolo. — Liquido limpido, molto denso, incolore, di odore poco gradevole: sinistrogiro.

Bolle a 295°:

$$d^{15} = 0{,}980 : \alpha_D = -1°\,30' \quad \text{(tubo lungo 1 dcm.)}$$

onde

$$[\alpha]_D = -1°\,59'.$$

Chimica. — *Ricerche sui polisalicilidi* [1]. Nota di V. Paolini e S. Scelba, presentata dal Corrisp. A. Peratoner.

L'azione dei cloruri di fosforo sull'acido salicilico conduce alla formazione di un cloruro acido, prodotto intermedio, che poi si trasforma in anidride polimolecolare $\left(C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\\ |\\ O\end{matrix}\right.\right)_n$. Rappresenta questo prodotto un miscuglio complesso, nel quale si contiene con sicurezza un tetrasalicilide $\left(C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\\ |\\ O\end{matrix}\right.\right)_4$, che può isolarsene sotto forma di combinazione cristallina col cloroformio corrispondente alla formula $\left(C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\\ |\\ O\end{matrix}\right.\right)_4 . 2CHCl_3$ [2].

Invece, sotto condizioni sperimentali alquanto differenti dalle sopraccennate, o specialmente sostituendo all'azione dei cloruri acidi quella di disidratanti diversi, quali l'anidride fosforica, la disidratazione avviene in altro modo, cioè fra carbossile salicilico di una molecola e ossidrile fenico di una seconda, originandosi un prodotto di condensazione che appartiene alla classe dei cosidetti depsidi. Il di-depside salicilico più semplice finora ottenuto è il cosidetto Diplosal, prodotto brevettato della casa C. F. Boehringer & Soehne di Mannheim [3], e che va considerato come l'etere salicilico dell'acido salicilico $C_6H_4 <\begin{matrix}OH\\ CO.O.C_6H_4.COOH\end{matrix}$. L'acido p-ossibenzoico, invece, per semplice riscaldamento fornisce tanto un di-depside, quanto un tri-depside [4].

Purtuttavia tali esempi di sintesi per disidratazione di acidi monoossibenzoici liberi costituiscono casi isolati, ed il metodo, tutt'altro che generale, si riferisce solo a pochi derivati di acidi fenol-carbonici.

Recentemente [5] uno di noi ha dimostrato che l'azione del calore sull'acido acetil-salicilico (aspirina) conduce alla formazione di salicilide, pro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

(2) Anschütz, Annalen, *273*, 76 (1893).

(3) D. R. P. 211403 (Centr. Blatt 1909, II, 319) e 214044 (C. 1909, II, 1285).

(4) Klepl, J. f. prakt. Chem. [2], *28*, 208 (1883).

(5) Paolini, Giornale di chimica industriale ed applicata, *3*, 403 (1921).

dotto polimolecolare, che prende origine dalla eliminazione di acido acetico e da un conseguente processo di condensazione. Tale depside salicilico, con peso molecolare variabile da 6 ad 8 molecole di salicilide, è un miscuglio a composizione non costante, straordinariamente solubile nel cloroformio, soluzione dalla quale, quand'anche sia molto concentrata, non si separa alcuna combinazione cristallina.

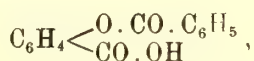
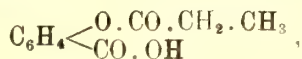
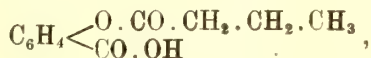
Una simile decomposizione, operata esclusivamente dal calore, abbiamo ora potuto constatare per tutti gli eteri dell'acido salicilico presi in esame e costituiti analogamente all'aspirina; e cioè per l'acido benzoil-salicilico

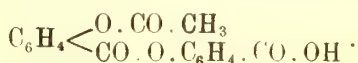
$$C_6H_4<^{O.CO.C_6H_5}_{CO.OH},$$

per l'acido propionil-salicilico

$$C_6H_4<^{O.CO.CH_2.CH_3}_{CO.OH},$$

per l'acido n-butirril-salicilico

$$C_6H_4<^{O.CO.CH_2.CH_2.CH_3}_{CO.OH},$$

e finalmente anche per l'acetil-derivato del Diplosal di Boehringer

$$C_6H_4<^{O.CO.CH_3}_{CO.O.C_6H_4.CO.OH}.$$

Tutti questi eteri, riscaldati vicino al punto di fusione, si decompongono, svolgendo subito vapori abbondanti rispettivamente di acido benzoico, propionico, butirrico, acetico, che si possono condensare e riconoscere facilmente dai loro caratteri fisici e chimici. Rimane indietro in tutti i casi una sostanza vetrosa, incolore o appena giallina, che è anidride dell'acido salicilico, cioè salicilide e più propriamente un salicilide polimerizzato $\left(C_6H_4<^{CO}_{O}\right)_n$. Avviene cioè un concatenamento di più molecole di acido salicilico, un processo di condensazione con formazione del depside salicilico, o per essere più precisi, di un'anidride di depside salicilico.

Possiamo quindi considerare come generale la reazione di formazione di questi polisalicilidi, i quali si ottengono costantemente per eliminazione di acido dagli eteri salicilici tipo aspirina.

Il materiale di ricerca fu da noi preparato in laboratorio, in uno stato di grande purezza, per azione dei cloruri acidi sul salicilato sodico. In pratica si fa gocciolare lentamente il cloruro di benzoile, il cloruro di propionile, il cloruro di butirrile normale sul salicilato sodico finamente polverizzato, ben disseccato e sospeso nel tetracloruro di carbonio. La reazione segue con svolgimento di calore, e qualche volta è bene raffreddare. Dopo 24 ore di riposo, la poltiglia densa formata si estrae con etere in presenza di acqua, aggiunta in quantità sufficiente per portare in soluzione il cloruro di sodio formatosi. Per distillazione dei solventi rimangono: l'acido benzoil-salicilico, l'acido propionil-salicilico, l'acido n-butirril-salicilico. Il primo viene purificato cristallizzandolo dall'acido acetico al 50 %; costituisce croste cristalline formate da aghi minuti, fusibili a 133°. L'acido propionil-salicilico, e l'acido n-butirril-salicilico si cristallizzano con grande facilità dalla benzina di petrolio (70°-80°): laminette brillanti, setacee. Fondono: a 95° il derivato propionilico ed a 85° quello butirrilico. Nessuno di questi eteri si colora in violetto col cloruro ferrico, ciò che dimostra la loro purezza.

L'acetil-derivato del Diplosal, invece che con cloruro acido, fu preparato, seguendo le indicazioni del brevetto [1], per riscaldamento a bagno maria (90°) del diplosale con anidride acetica in eccesso. A reazione finita si scaccia l'eccesso di anidride e si cristallizza il prodotto dall'acido acetico a 95 %. Aghi bianchi, splendenti, fusibili a 161°-162°.

Come nel caso dell'acido acetil-salicilico, se si riscaldano tutti questi eteri ad una temperatura, che superi di 20-30 gradi il rispettivo punto di fusione, la decomposizione procede rapida, sino a raggiungimento di peso costante, e si perviene ad un prodotto vetroso che per raffreddamento si screpola finamente.

Questo prodotto vetroso è costituito costantemente da un polisalicilide, miscuglio di diversi polimeri, molto solubili in acetone e cloroformio, poco solubili in alcool e benzolo. Questi solventi ci hanno appunto permesso le determinazioni dei pesi molecolari, le quali furono controllate con saggi alcalimetrici. I pesi molecolari oscillano fra 6 ed 8 complessi di salicilide; anzi, nel caso del depside ottenuto dall'acido propionil- e dal butirril-salicilico, tale peso molecolare varia fra 8 e 10 complessi di salicilide. Tali differenze devono attribuirsi alle temperature diverse a cui si opera la decomposizione degli eteri, temperatura che è più bassa per gli ultimi due succennati. In tutti i casi, per saponificazione a caldo con potassa alcoolica, si arriva per scissione del legame etereo —CO.O— unicamente ed integralmente ad acido salicilico.

[1] D. R. P. 236196 (C. 1911, II. 318).

Chimica. — *Sopra la costituzione di alcuni polipirroli* [1]. Nota di ANTONIO PIERONI e di ALDO MOGGI, presentata dal Socio A. ANGELI.

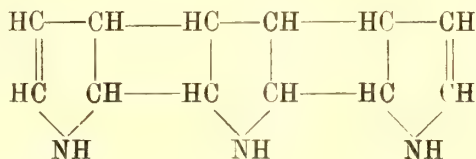
I metodi di formazione dei neri di pirrolo ed i loro caratteri inducono ad ammettere che questi prodotti risultano dall'unione di anelli pirrolici saldamente uniti fra loro; da quando A. Angeli mise in evidenza le sorprendenti analogie esistenti fra questi neri e le melanine naturali, assunse grande importanza lo studio sulla capacità dei nuclei pirrolici a legarsi fra loro e sulla natura dei legami che conseguentemente vengono a stabilirsi.

A. Angeli, con alcuni collaboratori, riuscì nel corso delle sue ricerche, ad isolare accanto al nero che si ottiene per ossidazione del pirrolo, in soluzione acetica con peridrol, i due prodotti $C_8H_{10}N_2O$ [2] e $C_{12}H_{17}O_3N_3$ [3].

Il primo, per le sue proprietà e più specialmente per la sua grande tendenza a dare dei neri, deve logicamente ritenersi il primo termine stabile di ossidazione che il pirrolo dà nelle accennate condizioni.

Cosicchè è presumibile che la determinazione della sua costituzione debba portare una prima luce sul modo che i nuclei pirrolici ossidandosi si legano sino alla formazione di sostanze brune e nere.

In una Nota precedente, uno di noi [4] dimostrò che il prodotto in parola è formato da un anello pirrolico intatto legato in α probabilmente con un anello ossipirrolico; riprendendo queste ricerche abbiamo creduto opportuno estenderle al tripirrolo che è fra i polipirroli il più noto specialmente per gli studî interessanti di Dennstedt. Questo autore [5] attribuì al tripirrolo la formula

```
HC——CH———HC——CH———HC——CH
||   |     |   |     |   ||
HC   CH———HC   CH———HC   CH
  \ /        \ /       \ /
  NH         NH        NH
```

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica dell'Istituto di Studî Superiori di Firenze.

[2] G. C., 46, II, 288.

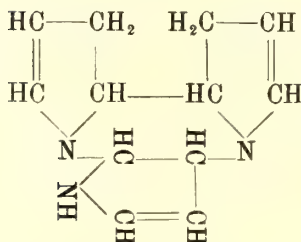
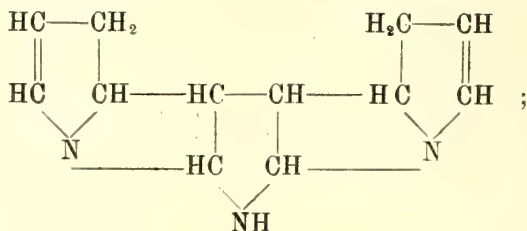
[3] G. C., 50, I, 128.

[4] Q. R., XXX, 316.

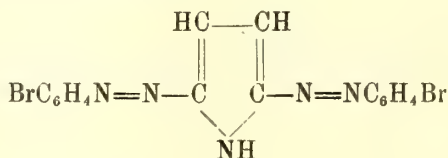
[5] B. 20, 856; 21, 1478.

mentre W. Tschelinzew ed i suoi collaboratori (1) fondando le loro deduzioni sulla capacità di reagire dei gruppi imminici col magnesio alchile, secondo il metodo di Tschugajew, ammisero come probabili, le formule:

```
HC——CH2                                H2C——CH
||    |                                  |    ||
HC    CH——————HC——————CH——————HC    CH  ;
  \  /           |        |           \  /
   N             |        |            N
    ———————————HC        CH———————————
                   \    /
                     NH
```

```
HC——CH2  H2C——CH
||    |    |    ||
HC    CH————HC    CH
  \  /           \  /
   N—— HC———CH——N
    \    |        |
    NH   |        |
      \ CH=====CH
```

poichè una sola molecola di magnesio alchile reagisce col tripirrolo (vi sarebbe da osservare a questo proposito che non è ancora provato se due o più gruppi imminici nella stessa molecola sono tutti in grado di reagire col magnesio alchile).

Dalle ricerche compiute da uno di noi sulle « azossiammidi e derivati pirrolici » (2) risulta che la p. bromofenilazossicarbonammide reagisce in opportune condizioni con il pirrolo, l'acido α pirrolcarbonico, l'acetilpirrolo, l'ossidipirrolo, ecc. per dare il composto:

```
                     HC——CH
                     ||    ||
BrC6H4N==N—C    C—N==NC6H4Br
                       \  /
                        NH
```

cosicchè quell'azossiammide non solo è un reattivo molto sensibile del pirrolo, ma può servire altresì a scoprire il nucleo pirrolico in molti suoi derivati.

Questa proprietà ci fece intravedere la possibilità di decidere sulla formula da attribuirsi al tripirrolo. Infatti seguendo quantitativamente la reazione fra la p. bromofenilazossicarbonammide, e tripirrolo, si doveva riuscire a determinare quanti nuclei pirrolici sono contenuti come tali nella mole-

(1) C. 1915, I, 1246.
(2) Q. R., XXX, 374.

cola del tripirrolo; evidentemente da prima fu necessario intraprendere lo studio quantitativo della reazione fra l'ammide ed il pirrolo. I risultati sono qui riassunti:

Gr. 0,010 di pirrolo si trattano con gr. 0.10 di p. bromofenilazossicarbonammide sciolta in poco alcool, si aggiungono alcune goccie di una soluzione satura di potassa caustica in alcool metilico; si ha subito intensa colorazione rosso-violetto. Dopo alcune ore di riposo si lascia evaporare spontaneamente l'alcool, si lava con acqua sino a reazione neutra, si secca; per cristallizzazione del residuo dal benzolo, si separano dei magnifici aghi rossi; si raccolgono filtrando alla pompa, si lavano con poche goccie di benzolo; il filtrato evaporato, lascia un residuo costituito dagli stessi aghi frammisti ad una resina bruna; si purificano lavandoli con alcool freddo, dove gli aghi sono praticamente insolubili, mentre si sciolgono bene le impurità che li accompagnano, si aggiungono agli altri aghi e si secca a 80°. Rendimento gr. 0,050 di bis $\alpha\ \alpha'$ p. bromofenilazopirrolo; calcolato gr. 0,064.

Gr. 0,0266 di tripirrolo trattati nell'identico modo, detto sopra, diedero gr. 0,070 di bis $\alpha\ \alpha'$ p. bromofenilazopirrolo, calcolato rispetto al rendimento pratico ottenuto nella determinazione precedente per

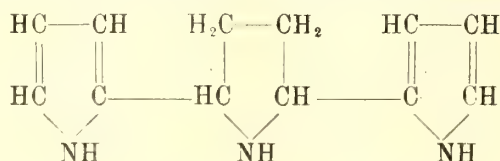
1 nucleo pirrolico	gr. 0,040	di $\alpha\ \alpha'$	p. bromofenilazopirrolo
2 nuclei pirrolici	gr. 0,080	»	»
3 » »	gr. 0,120	»	»

(occorre notare che la presenza di resina aumenta la solubilità in alcool dell'$\alpha\ \alpha'$ bis azopirrolo e a ciò si deve attribuire almeno in parte la differenza fra il trovato e il calcolato, per due nuclei pirrolici). Così con queste semplici determinazioni si venne a stabilire che nella molecola del tripirrolo sono contenuti almeno due nuclei pirrolici, legati in α od in α' con un terzo nucleo e quindi ad escludere le formule che sino ad ora furono attribuite al tripirrolo. Inoltre, tenuto conto della sua facile scomposizione in indolo, pirrolo ed ammoniaca per effetto del riscaldamento, si doveva logicamente supporre che i due gruppi pirrolici fossero legati ad un altro pirrolidinico. Per avvalorare questa supposizione non rimaneva dunque che dimostrare la presenza del nucleo pirrolidinico, ciò che ci è riuscito ossidando il tripirrolo a caldo con bicromato di potassio ed acido solforico. Gr. 0,065 di tripirrolo, preparato secondo il metodo di Dennstedt, vennero sciolti in poca acqua, acidificati con acido solforico in eccesso ed addizionati di gr. 1 di bicromato potassico, sciolto in cc. 12 di acqua, la miscela venne scaldata a fiamma diretta per qualche ora, l'eccesso di bicromato venne distrutto con poche goccie di alcool etilico e la soluzione raffreddata fu estratta più volte con etere. Distillato l'etere si ottenne come residuo un bel prodotto cristallino, che fuse a 184°, mescolato in parti uguali con acido succinico (p. f. 184°) fuse pure a 184°, per cui nessun dubbio può rimanere sull'identità di questo

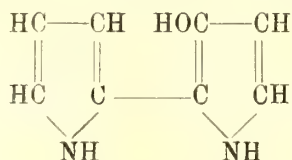
acido, con il prodotto di ossidazione che il tripirrolo dà con bicromato ed acido solforico.

L'aver ottenuto acido succinico, nelle condizioni suesposte, dimostra la preesistenza nel tripirrolo, del nucleo pirrolidinico, il quale per ossidazione, dà notoriamente la succinimmide e quindi l'acido corrispondente, mentre i nuclei pirrolici con bicromato ed acido solforico, danno maleinimmide (¹).

Per cui la formula del tripirrolo di Dennstedt è rappresentata da:

```
HC——CH      H₂C——CH₂      HC——CH
‖    ‖       |    |        ‖    ‖
HC   C———————HC   CH———————C    CH
  \ /          \ /          \  /
  NH           NH            NH
```

Costituzione dell'ossidipirrolo.

Nella Nota (²) più sopra citata a proposito di questo composto è detto che esso deve essere rappresentato probabilmente dalla formula:

```
HC——CH  HOC——CH
‖    ‖   ‖    ‖
HC   C———C    CH
  \ /     \  /
  NH       NH
```

o da altra a questa tautomera. Se non che il prodotto in questione per ossidazione con bicromato potassico ed acido solforico dà acido succinico. Gr. 0,25 di ossidipirrolo sciolti in poca acqua vennero addizionati di cc. 38 di una soluzione di gr. 12 di bicromato potassico in 150 di acqua ed acidificati con acido solforico diluito. La soluzione perfettamente limpida venne scaldata lungamente all'ebollizione. Dopo riduzione completa del bicromato per l'aggiunta di due o tre goccie di alcool, fu estratta con etere. L'etere evaporato lasciò un residuo che ricristallizzato dall'etere, fuse a 184°, e pure a 184° fuse la miscela in parti eguali con acido succinico.

All'analisi:

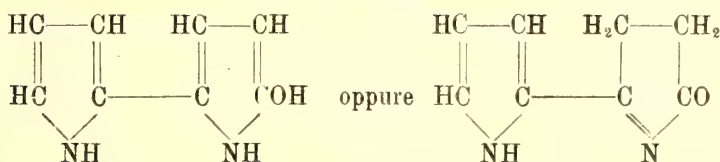
Gr. 0,1325 di sostanza diedero gr. 0,1988 di CO_2 e gr. 0,0621 di H_2O

	Calcolato per acido succinico	Trovato
C %	40,67	40,91
H %	5,12	5,24

ma tenendo conto anche delle reazioni descritte nella Nota citata, per le quali il composto in parola opportunamente ossidato con permanganato dà

(¹) Plancher e Cattadori C. 1904, II, 305.
(²) Q. R., XXX, 316.

acido α pirrolcarbonico e trattato con p. bromofenilazossicarbonammide dà il bis α α' p. bromofenilazopirrolo, se ne deduce che la formula di costituzione dell'ossidipirrolo, o meglio dell'ossidipirrile è

```
HC——CH    HC——CH                HC——CH    H₂C——CH₂
||  ||    ||  ||                ||  ||    |     |
HC  C—————C   COH    oppure     HC  C—————C     CO
 \ /       \ /                   \ /       \   /
 NH        NH                    NH          N
```

Riguardo all'altro prodotto $C_{12}H_{17}O_3N_3$, dobbiamo aggiungere che esso pure reagisce con la p. bromofenilazossicarbonammide. Gr. 0,0308 di sostanza trattati al solito modo con gr. 0,25 di p. bromofenilazossicarbonammide diedero gr. 0,025 di α α' bis p. bromofenilazopirrolo (p. f. 207°) valore che corrisponde alla presenza di un solo nucleo pirrolico nella molecola del composto. Quest'ultimo risultato mette in evidenza ancora una volta l'importanza che va assumendo in questo genere di ricerche la p. bromofenilazossicarbonammide, la quale con una reazione tanto semplice permette di scoprire e determinare qualitativamente e quantitativamente il nucleo pirrolico.

In una prossima Nota si cercherà di chiarire la costituzione anche di questo secondo prodotto di ossidazione del pirrolo.

Biologia. — *Simbiosi e biofotogenesi.* Nota di U. Pierantoni, presentata dal Socio B. Grassi.

In una sua Nota apparsa in questi Rendiconti (vol. XXXI, fasc. 5°) la sig.na Mortara espone i risultati negativi da lei ottenuti ricercando batterî fotogeni negli organi luminosi di esemplari di *Heteroteuthis dispar* venuti da Messina.

In detta Nota l'A. prende occasione dalle sue esperienze per concludere che « non è assolutamente possibile di ritener dimostrata la necessità di una simbiosi batterica per la produzione della luce nei cefalopodi ». Ora io posso subito dimostrare che le esperienze della sig.na Mortara nulla dimostrano contro i miei studî e contro la mia teoria.

Innanzitutto io non mi sono mai sognato di dire che per aversi la luminescenza sia *necessaria* la simbiosi batterica. Ho dimostrato che in molti casi il fatto è evidente e specialmente fra i cefalopodi di superficie e di piccola profondità dei generi *Sepiola* e *Rondeletia*, nei quali è così chiaro, che può dimostrarsi in dieci minuti a chiunque abbia un po' di pratica di microscopia ed in 24 ore a chiunque voglia seguire gli innesti su terreni di coltura, perchè i batterî fotogeni si rinvengono in masse evidentissime e gli innesti per striscio di dette masse riescono totalmente luminosi in 24

ore e su tutta la superficie strisciata, non per punti isolati come avviene quando si tratta di semplici inquinamenti.

Ho poi espressa la mia modesta opinione (fondata del resto su varî indizî morfologici ed embriologici) che anche in quei casi nei quali batterî veri e proprî non si rinvengono e gli innesti non riescono, ma si trova la nota massa granulosa (la cosiddetta sostanza luminosa), possa essere questa interpretata come di origine batterica: e ciò accade specialmente negli animali di profondità, mentre in quelli di superficie la presenza dei batterî è indiscutibile ([1]) come io ho dimostrato per *Sepiola* e *Rondeletia*, come nei Pirosomi studiati da Buchner e da me e come nei pesci luminosi di superficie *Anomalops* e *Photoblepharon* studiati da E. N. Harvey.

Ora l'*Heteroteuthis dispar*, studiata per questo riguardo dalla Mortara, è un cefalopodo abissale: si pesca a 1200-1500 m. di profondità. Se si trovasse quindi nelle condizioni degli altri cefalopodi abissali e cioè con sostanza luminosa granulare e senza veri batterî, in nulla contrasterebbe la mia teoria. E che sia tale sembra verosimile per gli studî di W. T. Meyer (Zool. Anz., Bd. 32, pag. 505), dai quali risulta che l'organo luminoso di *Heteroteuthis* è provvisto di ben tre strati ottici e che la tasca del nero è rudimentale, come io ritengo sia da ritenersi rudimentale anche la comunicazione degli organi fotogeni con l'esterno.

Ma dagli studî della sig.na Mortara a me non sembra definitivamente provata neppure la non esistenza dei batterî negli organi fotogeni di *Heteroteuthis.* Oltre a non risultare che cosa vi sia nella parte fotogena dell'organo in luogo dei batterî o della sostanza fotogena, la prova delle colture non è convincente. In essa infatti da una parte si dice che vi è un grande sviluppo di batterî fotogeni *nella muscolatura* e sulla pelle di animali morti da poco, prima che si iniziino i processi di putrefazione e che quasi tutti gli esemplari diedero fenomeni di luminosità *post mortem*, ed altrove che « un organo intero pestato nel mortaio per avere la certezza di provarne tutto il contenuto non diede alcun batterio fotogeno ».

Ora poichè, come ha dimostrato il Meyer, alla costituzione dell'organo concorrono largamente i muscoli, come mai nelle colture non apparve almeno qualche puntino luminoso, come avviene sempre che non si innesta tutta una massa fotogena ma vi sono semplici inquinamenti? E sì che gli esemplari usati dalla sig.na Mortara per le sue esperienze non v'era pericolo che non fossero morti da parecchio, visto che erano stati raccolti a Messina spiaggiati ed avevano viaggiato poi da Messina a Roma.

Infine neppure le allusioni critiche che si intravedono nella affermazione della A., che il batterio fotogeno che si sviluppa su *Heteroteuthis* sembra

([1]) Ved. a tal proposito il mio lavoro dal titolo: *Organi luminosi batterici nei pesci*. Rivista di Biologia. vol. III, 1921.

si avvicini molto a quelli ottenuti dagli organi fotogeni di *Sepiola* può toccar in alcun modo i miei studî e la mia teoria.

Chiunque abbia pratica di batterî fotogeni sa bene che essi per una quantità di caratteri e pel loro comportamento si somigliano tutti; tanto più potranno somigliarsi poi quelli che vivono nel medesimo ambiente. In ogni modo anche se la sig.na Mortara dimostrasse (ciò che mi sembra poco probabile) che i due batterî sono la stessa cosa. neanche ciò potrebbe avere alcun valore contro i miei studî e contro la mia teoria, visto che io stesso ho ammesso l'ipotesi che i batterî costituenti la parte fotogena degli organi luminosi possano talora aver origine dall'esterno, e lo ho dimostrato nel caso della glandola nidamentale accessoria di *Loligo forbesi*, che dai miei studî risulta omologa degli organi luminosi (Pubbl. Staz. Zool., Napoli. vol. II, 1918, pp. 110-111).

Vulcanologia. — *Raccolta dei gas esalanti dalle lave fluide col metodo della inalazione.* Nota di G. Ponte, presentata dal Socio F. Millosevich.

In una nota pubblicata nel 1914 [1] dimostrai che le esperienze sui gas vulcanici fatte al Kilauea nel 1912 dal Day e Shepherd, non potevano essere una prova sufficiente contro la teoria del Brun sull'anidrità dei gas magmatici. Il vapor d'acqua riscontrato nei gas raccolti al Kilauea era il prodotto di una reazione extramagmatica, cioè della combustione dei gas idrogenati in presenza dell'ossigeno dell'aria e gli esperimenti del Day e Shepherd non potevano che confermarlo, perchè non era possibile che i gas aspirati con una pompa da una bolla lavica, dalla quale uscivano delle fiamme, non fossero influenzati dall'ossigeno dell'aria.

Recentemente il Dr. T. A. Jaggar, Direttore del « Havaiian Volcano Observatory » ha manifestato al Shepherd il sospetto che il vapor d'acqua raccolto al Kilauea assieme ai gas vulcanici, con il solito metodo della pompa aspirante, possa provenire dalla combustione dei gas idrogenati esalanti dalla lava [2]. Se il dott. Jaggar avesse letto la critica da me mossa al Day e Shepherd si sarebbe accorto di ciò parecchi anni prima.

La vecchia teoria delle esalazioni magmatiche umide, generalizzata anche ai magma basici, sul punto di naufragare aveva trovato nelle esperienze del Day e Shepherd uno scoglio su cui sostenersi, ma ora, anche questo, è calato a fondo.

[1] G. Ponte, *Ricerche sulle esalazioni dell'Etna.* Rendiconti R. Accademia Lincei, vol. XXIII, ser. 5, pag. 405, 1914.

[2] E. S. Shepherd: Kilauea Gase, 1919. *Bulletin of the Havaiian Volcano Observatory.* Vol. IX, N. 5, May 1921.

Gli studiosi cercano un metodo sicuro che possa permettere la raccolta dei gas esalanti dalla lava prima che vengano in contatto con l'aria; allora soltanto potrà dirsi decisamente se siano umidi i gas esalanti dai magma acidi ed anidri quelli esalanti dai magma basici.

Dopo una serie di esperimenti su rocce vulcaniche rifuse in un grande crogiuolo da fonderia, ho trovato un metodo che permette di raccogliere i gas disciolti nelle lave.

Il metodo consiste nell'iniettare nella lava fluente, per mezzo di uno speciale apparecchio, dell'elio, gas perfettamente inerte [1] e nel ritornarlo a raccogliere assieme ai gas magmatici, che esso trascina dalla bolla artificialmente formata nella massa lavica.

L'apparecchio è rappresentato schematicamente nella figura a pag. seg.

Una canna di ferro C racchiude due tubi di quarzo *a* e *b* ed un pirometro termoelettrico P. La punta della canna ha un piccolo rigonfiamento con due camere separate l'una dall'altra, ove sboccano i due tubi di quarzo ed ove son praticati due fori laterali *f* ed *f'*, che comunicano con l'esterno e che, all'inizio dell'esperimento, sono chiusi con una lega (argento 95 p., rame 50 p.), che fonde a 900°.

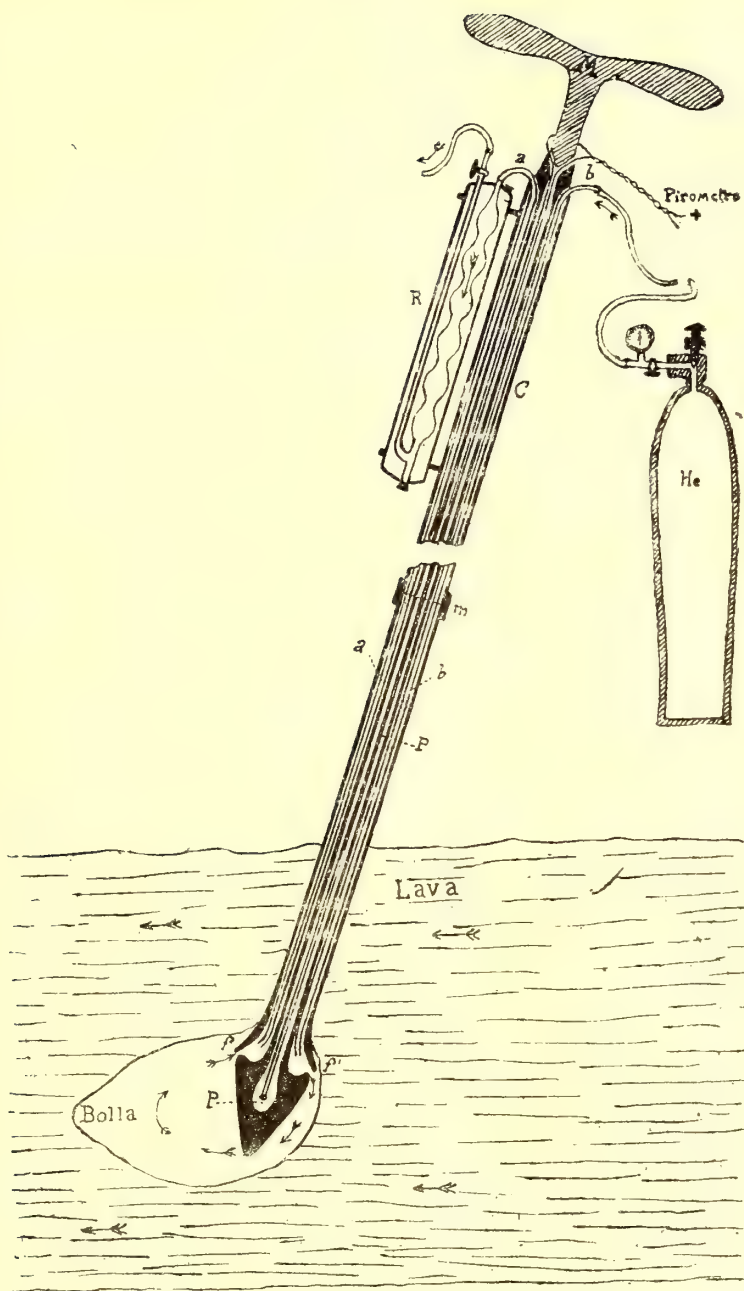
La parte superiore della canna può allungarsi con pezzi aggiunti per mezzo di manicotti *m* e termina con un manico M alla cui base sboccano i due tubi di quarzo ed i fili conduttori del pirometro. Al tubo *a* è innestato un refrigerante *R* di quarzo, protetto da una montatura metallica attaccata alla parte superiore della canna. Dal refrigerante per mezzo di tubi di accordo, la conduttura si prolunga fino all'apparecchio d'assorbimento e di raccolta dei gas.

Il tubo *b* di quarzo comunica con una bombola piena di elio compresso e provvista di manometro.

L'apparecchio si mette in funzione nel modo seguente:

L'operatore, provvisto di maschera contro i gas vulcanici, introduce la punta dell'inalatore nella colata per una profondità di circa 50 cm. ed apre il rubinetto della bombola con l'elio. Dopo breve tempo fondono i tappi metallici dei fori *f* ed *f'* delle due camere dell'inalatore e l'elio penetra nella lava. La pressione viene regolata per mezzo del manometro. Nella lava, attorno alla punta dell'inalatore, si formerà una bolla dentro cui circolando l'elio trascinerà i gas magmatici, che verranno fissati e raccolti nell'apparecchio d'assorbimento.

Se la colata avrà un rapido movimento, potrà avvenire che la bolla sia trascinata dalla corrente; in tal caso il manometro segnerà una depressione e nei tubi d'assorbimento non si vedranno più gorgogliare i gas.

[1] W. Ostwald u. C. Drucker. *Handbuch der algemeinem Chemie.* Die Edelgas von Sir W. Ramsay u. G. Rudolf. Leipzig, 1918, p. 162.

Io credo che per mezzo dell'inalatore, già sperimentato nella lava rifusa in crogiuolo, potranno raccogliersi i gas esalanti dalle lave fluenti, prima che possano stabilirsi nuovi equilibrî chimici extramagmatici.

Il Vesuvio, che attualmente dà dei tranquilli rivi di lava intercraterici, si presterebbe ottimamente a questi importantissimi esperimenti. Ma oltre a quelli sul terreno altri non meno importanti se ne condurranno in laboratorio.

Fisiologia. — *Ricerche sperimentali sull'azione del polline sul cuore degli animali.* Nota preventiva del prof. CARLO FEDELI, presentata dal Corrisp. B. LONGO.

Dopo lo studio e le ricerche, sul secreto interno, di alcune glandule e principalmente dell'ovario, ebbi in animo di studiare il prodotto fecondante dei vegetali nei suoi possibili effetti sugli organismi animali; e fino dal 1912, presi di mira gli effetti del polline sul cuore. Scelsi, anche per consiglio del mio illustre compianto maestro prof. G. Arcangeli, il polline di Pino (Pinus Pinea), ne feci degli estratti acquosi ed alcoolici e volli iniziare le mie ricerche sul cuore di animale a sangue freddo. Preferii il cuore del rospo (Bufo vulgaris) perchè resistente ed adatto alle ricerche sperimentali.

Usava il rospo decapitato, col midollo spinale distrutto; il cuore era accolto fra le due estremità della pinza cardiografica Marey-Bufalini; facendo scrivere direttamente la penna connessa alla pinza, sopra ad un cilindro girante del chimografo Ludwig; di talchè dei tracciati raccolti, la prima curva corrisponde alla diastole e la seconda alla sistole. Il cilindro faceva un giro completo, in un minuto primo. Sul cuore faceva gocciolare una soluzione di estratto di polline sciolto all'1-2 %; in siero di Ringer.

I fatti più rilevanti che osservai sono tradotti nei tracciati, che pubblicherò per esteso nella prima Memoria, che consacro a questo studio; intanto riassumendo qui le osservazioni suddette, il primo fatto costante, che ebbi a constatare, fu la *graduale diminuzione* dei moti cardiaci, che si determina ora rapidamente ora con relativa lunghezza. E ciò tanto relativamente alle diastoli, che alle sistoli, poichè tanto le une che le altre, si fanno sempre più piccole finchè il cardiogramma si estingue, assumendo la forma della coda di topo.

Quando il miocardio non era profondamente intossicato, un lavacro generoso con siero fisiologico, era capace di riportare le escursioni cardiache, alla condizione normale di frequenza ed ampiezza; soltanto in qualche caso la sistole è più difficoltata, si compie con maggior lentezza.

Con una soluzione concentrata di estratto pollinico, si ha un arresto diastolico del cuore; la linea di arresto, ha un andamento obliquo dal basso all'alto, più o meno accentuato, ciò che depone, come il cuore non sia completamente fermo. Questa linea mostra dei piccoli sollevamenti ritmici, che probabilmente rappresentano pulsazioni atriali. In varie esperienze si avrebbe ragione di ciò. Ad esempio in una ricerca si ebbe un primo arresto per

sgocciolamento di 10 goccie di soluzione all'1 %; quindi un secondo arresto dopo 152 secondi, di *60 secondi*; e dopo 160 secondi di curva normale, un'altro breve arresto di *16 secondi*; successivamente funzione normale di 154 secondi, di poi nuovo arresto di *80 secondi*; funzione di nuovo per 168 secondi, e arresto per 100 secondi; funzione nuovamente per *170 secondi*, quindi arresto di 128 secondi, in ultimo funzione per *96 secondi*.

Dal che si può rilevare, la scarsa elettività del principio pollinico sul miocardio e sui gangli cardiaci, non certo colpiti primitivamente; sembrerebbe che l'arresto diastolico fosse in rapporto con eccitazione del vago.

Nei tracciati si verificano delle irregolarità che son sempre prediastoliche; non trattandosi certamente di una sistole prolungata. La sistole si compie bene e ritmicamente; prima che il ventricolo entri in diastole, si ha una linea discendente dall'alto al basso, generalmente ondulata, dopo la quale, l'espansione diastolica, si verifica come normalmente.

In alcuni tracciati si hanno dei « *gruppi* » evidenti; costituiscono però un fenomeno transitorio.

Queste ricerche, non possono avere che un carattere di orientamento, poichè son condotte sul solo ventricolo; ciò nonostante, permettono di escludere che il polline eserciti sul cuore un'azione digitalica, e invece dànno luogo a sospetto, che nell'insieme per la sua azione il polline si avvicini al gruppo della caffeina, provocando in ultima analisi, un rimpiccolimento dell'area cardiaca.

Ogni più ampio ragguaglio, riserbo alla Memoria, che corredata dei tracciati sono per pubblicare.

Chimica fisiologica. — *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia*[1]. Nota IV di Sabato Visco, *presentata dal* Corrispondente D. Lo Monaco[2].

Nella terza Nota[3] pubblicata su questo argomento, in base ai risultati ottenuti studiando il ricambio dell'azoto nei ratti alimentati con farina di semi di *Ervum Ervilia*, e con farina di cariossidi di *Triticum Sativum*, ed alle considerazioni che si potevano fare paragonando fra di loro le due specie di alimentazione, formulammo l'ipotesi che l'impossibilità di poter mantenere a lungo in vita i ratti alimentati esclusivamente con semi di *Ervum Ervilia* dovesse attribuirsi al fatto che, nelle proteine dei semi

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Domenico Lo Monaco.

[2] Presentato nella seduta del 7 maggio 1922.

[3] S. Visco, *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia*. Nota III. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XXX, fascicolo 9°, 1921.

stessi mancasse o fosse contenuto in minima quantità qualcuno degli amino-acidi indispensabili all'economia del ratto.

Per verificare questa ipotesi abbiamo istituito una serie di indagini delle quali riferiamo qui una parte dei risultati ottenuti.

Per l'esperimento avevamo a nostra disposizione due metodi: quello chimico, e quello biologico.

Il primo, con l'esatta determinazione dei prodotti dell'idrolisi delle singole proteine contenute nell'Ervo, ci avrebbe permesso in modo indubbio di risolvere la questione; noi però, sfortunatamente, non abbiamo potuto avere i mezzi per adottarlo: e perciò abbiamo dovuto attenerci a quello biologico, il quale, pur non essendo preciso come il primo, può, ciò non ostante, se bene usato, portarci per via indiretta a risultati molto vicini al vero.

Attenendoci a questo metodo, abbiamo aggiunto alla farina di Ervo una certa quantità di una proteina certamente completa per i ratti: la caseina del latte di vacca, previamente purificata per otto volte col metodo indicato dall' Hammarstern [1] e con questo miscuglio, reso omogeneo più che ci è stato possibile, ed impastato con una piccola quantità di acqua bollente, abbiamo alimentati parecchi animali seguendone quotidianamente le variazioni del peso.

Riportiamo i protocolli di qualcuna delle esperiente fatte.

Ratto *A*, bianco, maschio. Si mette in esperimento il 15 dicembre del 1921. Pesa grammi 169. Almeno apparentemente è in ottime condizioni di salute. Si alimenta per tutta la durata della ricerca col seguente miscuglio: farina di semi di *Ervum Ervilia* (90 %) e caseina purissima (10 %). Nei giorni di osservazione il peso si comporta come segue: dicembre 16 = gr. 162; 17 = gr. 160; 18 = gr. 165; 19 = gr. 167; 20 = gr. 167; 21 = gr. 168; 22 = gr. 169; 23 = gr. 169; 24 = gr. 173; 25 = gr. 174; 26 = gr. 175; 27 = gr. 173; 28 = gr. 174; 29 = gr. 174; 30 = gr. 179; 31 = gr. 182 Gennaio 1° = gr. 185; 2 = gr. 189; 3 = gr. 191; 4 = gr. 190; 5 = gr. 191; 6 = gr. 193; 7 = gr. 190; 8 = gr. 192; 9 = gr. 198; 10 = gr. 190; 11 = gr. 190; 12 = gr. 190; 13 = gr. 188; 14 = gr. 191; 15 = gr. 193; 16 = gr. 192.

In 31 giorni l'animale ha guadagnato 23 grammi di peso, ed alla fine dell'osservazione continua a mostrarsi in ottime condizioni di salute.

Ratto *B*, bianco, femmina, si mette in esperimento il 3 gennaio del 1922, pesa grammi 195. Almeno apparentemente è in ottime condizioni di salute. Si alimenta con un miscuglio di farina di semi di *Ervum Ervilia* (90 %) e caseina purissima (10 %). Nei giorni di osservazione il peso si comporta come appresso è indicato: Gennaio 4 = gr. 186; 5 = gr. 182; 6 = gr. 183; 7 = gr. 181; 8 = gr. 184; 9 = gr. 182; 10 = gr. 185; 11 = gr. 188; 12 = gr. 190; 13 = gr. 187; 14 = gr. 194; 15 = gr. 193; 16 = gr. 193; 17 = gr. 198; 18 = gr. 201; 19 = gr. 196; 20 = gr. 198 (l'animale tossisce); 21 = gr. 191 (tosse); 22 = gr. 190; 23 = gr. 189; 24 = gr. 191; 25 = gr. 191 (tossisce di meno); 26 = gr. 194; 27 = gr. 196; 28 = gr. 196; 29 = gr. 192; 30 = gr. 188; 31 = gr. 194. Febbraio 1° = gr. 198; 2 = gr. 195; 3 = gr. 194; 4 = gr. 191; (*Alimentazione: farina di semi di Ervum Ervilia 93 %. Caseina purissima 7 %*). 5 = gr. 194; 6 = gr. 200;

---

[1] Hammarstern, riportato in « Précis de Technique Chimique » di A. Morel, Paris 1909, O. Doin et fils, éditeurs.

7 = gr. 202; 8 = gr. 205; 9 = gr. 204; 10 = gr. 209; 11 = gr. 208; 12 = 202; 13 = gr. 206; 14 = gr 208; 15 = gr. 205; 16 = gr. 205; 17 = gr. 205; 18 = gr. 204; 19 = gr. 200; 20 = gr. 203; 21 = gr. 201; 22 = gr. 198; 23 = gr 198; 24 = gr. 202; 25 = gr. 202; 26 = gr. 202; 27 = gr. 201; 28 = gr. 203. Marzo 1° = gr. 200; 2 = gr. 201; 3 = gr. 199; 4 = gr. 201. (*Alimentazione: farina di semi di Ervum Ervilia 95 %. Caseina purissima 5 %*) 5 = gr. 198; 6 = gr. 198; 7 = gr. 197; 8 = gr. 199; 9 = gr. 201; 10 = gr. 204; 11 = gr. 202; 12 = gr. 202; 13 = gr. 203; 14 = gr. 205; 15 = gr. 204; 16 = gr. 199; 17 = gr. 201; 18 = gr. 200; 19 = gr. 203; 20 = gr. 199; 21 = gr. 200; 22 = gr. 205; 23 = gr. 205; 24 = gr. 205; 25 = gr. 200; 26 = gr. 198; 27 = gr. 200; 28 = gr. 200; 29 — gr 201; 30 = gr. 200; 31 = gr. 196. Aprile 1° = gr. 198; 2 = gr. 198; 3 = gr. 197; 4 = gr 199.

In 90 giorni l'animale ha guadagnato 4 grammi di peso, ed alla fine dell'osservazione continua a mostrarsi in ottime condizioni di salute.

Ratto *C*. femina, pezzato, si mette in esperimento il 13 gennaio del 1922. Pesa grammi 165. Almeno apparentemente è in ottime condizioni di salute. Si alimenta col seguente miscuglio: farina di semi di *Ervum Ervilia* (90 %) e caseina purissima (10 %). Nei giorni di osservazione il peso si comporta come è appresso indicato: Gennaio 14 = gr. 164; 15 = gr. 158; 16 = gr. 155; 17 = gr. 151; 18 = gr. 148; 19 = gr. 152; 20 = gr. 157; 21 = gr. 161; 22 = gr. 163; 23 = gr. 166; 24 = gr. 170; 25 = gr. 172; 26 = gr. 171; 27 = gr. 171; 28 = gr. 171; 29 = gr. 173; 30 = gr. 174; 31 = gr. 172. Febbraio 1° = gr. 173 · 2 = gr. 170; 3 = gr. 172; 4 = gr. 170; 5 = gr. 172; 6 = gr. 173; 7 = gr. 172; 8 = gr. 172; 9 = gr. 173; 10 = gr. 174; 11 = gr. 172; 13 = gr. 174; 13 = gr. 175; 14 = gr. 174; 15 = gr. 173; 16 = gr. 174; 17 = gr. 175; 18 = gr. 171; 19 = gr. 172; 20 = gr. 176; 21 = gr. 171; 22 = gr. 170; 23 = gr. 173; 24 = gr. 175; 25 = gr. 171; 26 = gr 173; 27 = gr. 173; 28 = gr. 174. Marzo 1° gr. 170; (*Alimentazione: farina di semi di Ervum Ervilia* (*95 %*). *Caseina purissima* (*5 %*). 2 = gr 165; 3 = gr. 164; 4 = gr. 164; 5 = gr. 164; 6 = gr. 163; 7 = gr. 165; 8 = gr. 164; 9 = gr. 166; 10 = gr. 165; 11 = gr. 165; 12 = gr. 166; 13 = gr. 168; 14 = gr. 169; 15 = gr. 171; 16 = gr. 174; 17 = gr. 173; 18 = gr. 173; 19 = gr. 173; 20 = gr. 174; 21 = gr. 172; 22 = gr. 172; 23 = gr. 174; 24 = gr. ; 25 = gr. 171; 26 = gr. 172; 27 = gr. 176; 28 = gr. 175; 29 = gr. 168; 30 = gr. 170; 31 = gr. 170. Aprile 1° = gr. 170; 2 = gr. 169; 3 = gr. 169; 4 = gr. 170.

In 80 giorni l'animale ha guadagnato 5 grammi di peso, ed alla fine dell'osservafione continua a mostrarsi in ottime condizioni di salute.

Ratto *D*. bianco, maschio, si mette in esperimento il 6 febbraio del 1922. Pesa gr. 230, almeno apparentemente è in ottime condizioni di salute. Si alimenta col seguente miscuglio: farina di semi di *Ervum Ervilia* (90 % e caseina purissima 10 %. Nei giorni di osservazione il peso si comporta come è appresso indicato: Febbraio 7 = gr. 224; 8 = gr. 220; 9 = gr. 221; 10 = gr. 225; 11 = gr. 224; 12 = gr. 220; 13 = gr. 221; 14 = gr. 225; 15 = gr. 224; 16 = gr. 226; 17 = gr. 223; 18 = gr. 224; 19 = gr. 224; 20 = gr. 224; 21 = gr. 224; 22 = gr. 222; 23 = gr. 224; 24 = gr. 25 = gr. 223; 26 = gr. 222; 27 = gr. 223; 28 = gr. 222. Marzo 1° = gr. 222; 2 = gr. 223; 3 = gr. 225; 4 = gr. 225; 5 = gr. 225; 6 = gr. 228; 7 = gr. 226; 8 = gr. 226; 9 = gr. 227; 10 = gr. 226; 11 = gr. 228; 12 = gr. 230; 13 = gr. 231; 14 = gr. 230; 15 = gr. 227. (*Alimentazione: farina di semi di Ervum Ervilia 95 % e caseina purissima 5 %*). 16 = gr. 221; 17 = gr. 220; 18 = gr. 224; 19 = gr. 223; 20 = gr. 225; 21 = gr. 222; 22 = gr. 225; 23 = gr. 24 = gr. 25 = gr. 26 = gr. 227; 27 = gr. 225; 28 = gr. 228; 29 = gr. 228; 30 = gr. 229; 31 = gr. 229. Aprile 1° = gr. 230; 2 = gr. 229; 3 = gr. 227; 4 = gr. 225; 5 = gr. 227; 6 = gr. 228; 7 = gr. 225; 8 = gr. 225.

In 62 giorni l'animale ha perduto 5 grammi di peso. Alla fine dell'osservazione continua a mostrarsi in ottime condizioni di salute.

Dai dati sopra riportati possiamo rilevare:

1° Che, i ratti, i quali rifiutano in genere la farina di *Ervum Ervilia* (¹), la mangiano invece ed in quantità tali da sopperire ai loro fabbisogni energetici quando ad essa si aggiunge della caseina.

2° Che, con un miscuglio di farina di ervo e caseina nelle proporzioni rispettive variabili dal 90 al 95 % e dal 10 al 5 %, è possibile mantenere in equilibrio di peso i ratti per un periodo di tempo certamente superiore ai tre mesi.

3° Che, nessun fatto morboso apparente si manifesta nei ratti alimentati esclusivamente, e per un periodo di tempo di almeno tre mesi, con miscugli di farina di ervo e di caseina nelle proporzioni sopra indicate.

Zoologia. — *Lo stomaco della larva di Anopheles claviger Fabr. e la dualità delle cellule mesointestinali degli Insetti* (²). Nota II preliminare del dott. ENRICO FEDERICI, presentata dal Socio B. GRASSI (³).

Altri caratteri istologici, differenziali e costanti, tra le due metà dello stomaco dell'anofele, sono posti in evidenza dall'esame delle sezioni che passano attraverso la cavità e quindi interessano le pareti dello stomaco, tagliandone le cellule secondo l'asse apico-basale.

In corrispondenza col predominio delle cellule grandi nella metà anteriore, questa regione si colora molto meno intensamente della posteriore. Complessivamente, l'epitelio a cellule grandi è più basso di quello a cellule piccole, onde i suoi elementi appaiono molto larghi: effettivamente, il loro diametro trasverso è sempre maggiore del diametro apico-basale (mentre nelle cellule piccole avviene il contrario). I limiti tra cellula e cellula sono poco evidenti; i nuclei distanziati, ovali o tondeggianti, con la cromatina avvolta in uno spirema a maglie piuttosto rade (e quindi a struttura evidentemente filamentosa), occupano posizioni variabili nell'interno della cavità cellulare. Nella maggior parte dei casi non ho potuto mettere in evidenza una strut-

(¹) S. Visco, *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia*. Nota I. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei vol XXX fascicolo 5° e 6° 1921.

(²) Lavoro compiuto nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

(³) Presentata, insieme alla Nota precedente, nella seduta del 5 marzo 1922.

tura identificabile col rabdorio (che, invece, si presenta distintamente nelle cellule piccole); in alcuni altri esistono elementi con un margine, striato trasversalmente, che potrebbe essere interpretato come un rabdorio molto basso.

A seconda dei diversi individui esaminati, le cellule grandi possono presentare differenti aspetti: talvolta hanno un citoplasma di apparenza uniforme o a struttura finissimamente granulare; in altri casi invece si possono notare alcune gocciole di secreto, perfettamente jaline, che si trovano soprattutto nella parte apicale dell'elemento; infine, in altri casi ancora, le gocciole jaline sono grandemente aumentate di numero e un po' anche di grandezza, addensandosi nel lume cellulare, di cui occupano spesso una parte ragguardevole. Talvolta il nucleo appare trascinato verso l'apice della cellula dall'abbondanza del secreto. Molto probabilmente le suddette gocciole perdono la loro individualità nel filtrare attraverso la membrana o appena fuoruscite nel lume intestinale, giacchè non le ho mai trovate nello spazio interposto fra l'epitelio e la peritrofica.

Mi sembra ovvio interpretare gli aspetti, precedentemente descritti, delle cellule grandi, come successivi stadii di un processo di secrezione di succhi digestivi.

Malgrado il numero degli individui attentamente esaminati, non ho potuto sorprendere il momento della rinnovazione dell'epitelio a cellule grandi, mediante la sostituzione di nuovi elementi ai vecchi, e perciò inclino a credere ch'esso si verifichi più raramente, rispetto alla metà posteriore dello stomaco.

Le cellule piccole, che (come ho detto) predominano in quest'ultima regione, si distinguono sempre dalle cellule grandi proprie della metà anteriore, sia per la loro più intensa colorabilità, sia per le minori dimensioni, sia per la presenza di un rabdorio più o meno sviluppato. Pur conservando costantemente questi caratteri generali, il loro aspetto può presentarsi in modo alquanto diverso, a seconda degli individui esaminati, e le loro variazioni possono ricondursi a due disposizioni fondamentali, tra cui si rinvengono tutti i gradi di passaggio:

A) In certi casi le cellule piccole hanno forma cilindrica e sono piuttosto alte; la loro larghezza è variabile, ma l'asse trasverso massimo è sempre minore dell'altezza apico-basale (nelle cellule grandi avviene il contrario). Il rabdorio è molto evidente e i suoi bastoncelli s'impiantano direttamente sul margine interno della cellula; essi non presentano (almeno coi metodi ordinarii di colorazione) quella linea di punti nodali, che è stata riscontrata in altri casi alla base dei bastoncelli e che indica il confine tra questi e il citoplasma propriamente detto. I nuclei delle cellule che si trovano in questo stadio hanno una posizione variabile, ma più spesso si trovano nella metà basale della cellula; il citoplasma è finissimamente granulare, e in certi

casi (che io giudico rappresentare, cronologicamente, lo stadio più anteriore del processo secretorio) non ha gocciole o vacuoli di sorta. A fianco di queste cellule (nello stesso individuo) si possono trovarne altre, con qualche rara gocciolina di secreto, sia nella cavità cellulare, sia impigliata nei bastoncelli del rabdorio, sia infine nello spazio della cavità intestinale, interposto fra l'epitelio e la peritrofica. Le dette gocciole sono tondeggianti, jaline (cioè non granulose) e non assumono i coloranti adoperati.

In questo stadio le zone di rigenerazione dell'epitelio sono pochissimo evidenti ed hanno la forma di punti, intensamente colorati (corrispondenti ai nuclei degli elementi futuri), intercalati qua e là tra le basi delle cellule adulte.

B) In altri casi, l'epitelio costituito da cellule piccole si trova in una diversa condizione (che considero come rappresentante uno stadio della vita delle singole cellule, nonchè una fase del processo secretorio, cronologicamente posteriori a quelle sopradescritte). In essa tutto l'epitelio è notevolmente più basso, i nuclei meno vivamente colorati, le gocciole sul margine della cellula e nel lume intestinale più numerose. Nella parte basale dell'epitelio (in tali condizioni di evidente involuzione) si notano, con evidenza maggiore o minore, a seconda dei casi, una fila di nuclei per lo più circondati da un piccolo alone di citoplasma intensamente colorato. Mi sembra ovvia l'identificazione di tali nuclei con quelli di elementi giovani, destinati ad accrescersi rapidamente e a sostituire quelli in disfacimento, non appena questo sia compiuto.

Uno stesso individuo non presenta mai, nella metà posteriore dello stomaco, contemporaneamente ambedue gli stadii descritti in A) e in B), bensì l'uno o l'altro dei due. Tanto negli individui che si trovano nella condizione A), quanto negli individui della condizione B), tutta la parte dello stomaco occupata dalle cellule piccole presenta lo stesso aspetto, oppure ha soltanto piccole variazioni. Queste ultime si verificano ordinariamente nel senso, che le cellule più vicine alla valvola pilorica si trovano in istadii alquanto posteriori a quelli in cui contemporaneamente si trovano le cellule situate più anteriormente.

La costanza di tali reperti e il numero considerevole degli individui esaminati mi autorizzano a formulare due conclusioni:

a) la produzione e il disfacimento degli elementi piccoli non avvengono isolatamente, ma presso a poco simultaneamente, in tutta la zona da essi occupata;

b) la loro attività è presso a poco sincrona e si svolge iniziandosi dall'avanti e proseguendo verso l'indietro.

Da tutto il complesso dei fatti suesposti, si può dedurre una conclusione, che mi sembra assolutamente ovvia: *nell'intestino medio della larva di anofele esistono e rimangono separatamente individuate, almeno nell'in-*

tervallo fra una muta e la sua successiva, due sorta di cellule, distinguibili per molteplici caratteri strutturali (¹).

Una dimostrazione della diversa natura ed ufficio delle cellule grandi e delle cellule piccole si può anche raggiungere, da un punto di vista fisiologico: *a*) esaminandone il comportamento in presenza delle così dette « colorazioni vitali »; *b*) provocando sperimentalmente, nelle une e nelle altre, la localizzazione specifica di certe sostanze, tali da potersi somministrare mescolate col cibo e da potersi facilmente identificare. Ho eseguito alcuni esperimenti appunto con le colorazioni vitali, adoperando successivamente il bleu di metilene, il rosso neutro, il violetto di genziana e (per consiglio della prof. Foà [²]) il liquido di Giemsa; in complesso, i risultati ottenuti con queste sostanze (pur offrendo qualche incertezza, perchè non tutti i coloranti usati si sono dimostrati veramente innocui) confermano i reperti ottenuti coi metodi istologici. Per es. lo stomaco delle larve mantenute in soluzione acquosa di rosso neutro si presenta nella metà anteriore colorato in rosso-bruno o rosso-marrone, mentre la metà posteriore è di un bel rosso-vermiglio. Analogamente, il violetto di genziana colora la metà anteriore in rosso-violaceo e la posteriore in giallo-ranciato (v'è talvolta una zona intermedia, di un violetto non molto intenso) (³).

(¹) È opportuno notare che queste due sorta di cellule non hanno la stessa forma in tutte le specie di Insetti, presso le quali sono state riscontrate, e appunto nell'anofele le cellule fisiologicamente equivalenti ai calicociti del Deegener sono cubiche o subcilindriche allargate e le cellule fisiologicamente equivalenti agli sferociti sono cilindriche e piuttosto allungate. D'altra parte, il vocabolo « calicociti » si riferisce alla forma dell'elemento, mentre l'altro vuole indicare la caratteristica forma di sferule assunta dalle gocciole di secreto delle rispettive cellule: per evitare l'ambiguità provocata da questa nomenclatura e considerando altresì che la differenza essenziale sta nella funzione (la cui espressione morfologica può essere diversa a seconda dei casi), propongo di chiamare *crinociti* le cellule esclusivamente secernenti e *rofeocrinociti* le cellule secernenti-assorbenti.

(²) La prof. Foà mi ha comunicato i risultati sommarii di due esperimenti, da lei compiuti con liquido di Giemsa su larve piccole e grandi. È per me doveroso render noto questo contributo portato alla soluzione del problema dalla prof. Foà, cui rinnovo i miei ringraziamenti.

(³) Le ricerche compiute dalla Genna (*Ricerche sulla nutrizione dell'Anopheles claviger*, Arch. zool. ital., vol. X, 1921, pp. 15-34) sull'anofele alato, confermano le mie conclusioni: in complesso (nonostante alcune divergenze secondarie) lo stomaco dell'anofele alato risulta diviso in due parti, i cui caratteri strutturali e funzionali sono diversi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA annuncia che sono presenti vari Soci e numerosi scienziati stranieri, convenuti in Roma per le assemblee generali dell' Unione Internazionale astronomica e geodetico-geofisica. Dà a tutti il benvenuto a nome dell'Accademia, la quale è lieta di raccogliere nella propria sede, secondo l'ideale perseguito da Quintino Sella, i rappresentanti della Scienza qui giunti da ogni parte per i loro lavori.

Lo stesso PRESIDENTE dà poi il triste annuncio della perdita che l'Accademia ha fatto nelle persone del Corrispondente prof. ORAZIO TEDONE, tragicamente scomparso per un disgraziato accidente, e del Socio straniero prof. A. GUYE; e di entrambi ricorda i meriti scientifici e i principali lavori.

* * *

Commemorazione del Socio straniero prof. C. JORDAN, letta dal Socio L. BIANCHI [1]:

Al lutto della scienza francese per la morte di CAMILLO JORDAN, avvenuta a Parigi il 21 gennaio scorso, si associa questa Accademia, che già fino dal 1895 annoverava l' insigne matematico fra i suoi Soci stranieri.

Nella eletta schiera degli scienziati che hanno onorato ed onorano la Francia, Egli ha occupato un posto cospicuo per l' importanza delle sue scoperte, e per l' impulso che il suo insegnamento ed i suoi libri, diffusi in tutto il mondo matematico, hanno dato allo sviluppo della scienza.

Camille (Marie Ennemond) Jordan nacque, il 5 gennaio 1838, à la Croix Rousse (comune ora incorporato a Lione) da Alessandro Jordan ingegnere, che fu poi deputato all'assemblea nazionale. Compiuti gli studî secondarî nel Liceo di Lione, entrò nel 1855 nella celebre Scuola Politecnica, nel corpo degli ingegneri delle miniere, e quivi conseguì il diploma, esercitando poi la professione d' ingegnere à Châlons sur Saône fino al 1867, indi a Parigi.

Conseguito nel 1861 a Parigi il grado di *Docteur de Sciences mathématiques*, cominciò la carriera dell' insegnamento nel 1873 quale esaminatore nella Scuola Politecnica, dove nel 1876 divenne professore. Al Collegio di Francia, dopo avere per qualche tempo supplito al Serret, venne nomi-

[1] Debbo ringraziare per le indicazioni biografiche il professore EDOARDO JORDAN, figlio del defunto, e per altre indicazioni e per l'elenco dei lavori il professore H. VILLAT dell'Università di Strasburgo, organizzatore del Congresso e redattore del *Journal de Jordan.*

nato professore nel 1883, e conservò i due uffici fino al 1912, anno nel quale si ritrasse a riposo e venne nominato professore onorario in ambedue gli Istituti. All'Accademia delle Scienze apparteneva dal 1881, e fin dal 1885 dirigeva il *Journal de mathématiques*.

Basta uno sguardo all'elenco delle sue pubblicazioni per riconoscere in quanti e svariati campi della ricerca matematica si è esercitata la sua attività. E ben grande diventa l'ammirazione ove più profondamente si esamini la sua opera che di molti nuovi veri ha arricchito la scienza, con genialità di nuove vedute e con rara potenza di penetrazione. Sono ricerche di geometria, d'algebra, di aritmetica e d'analisi che si alternano in questi studî originali, primeggiandovi quelle questioni sulla *teoria dell'ordine* che esercitavano su di lui la maggiore attrazione.

Tale predilezione vediamo già affermarsi nei primi lavori di C. Jordan; così nella Memoria sui poliedri classificati, dal punto di vista della geometria di situazione, a seconda dei loro aspetti, in modo estremamente semplice ed ingegnoso. Questa Memoria, dietro un bel rapporto di Bertrand inserito nel T. 67 dei Comptes Rendus, venne accolta nel Recueil des Savants étrangers. Allo stesso campo appartengono le ricerche sulla deformazione delle superficie considerate, nel senso della Analysis situs di Riemann, come perfettamente flessibili ed estendibili. Ivi si determinano le condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità biunivoca continua di una superficie sopra un'altra, e si dimostra che gli *invarianti* di deformazione sono dati dal numero dei contorni e dal genere. Ancora alla geometria, in un indirizzo più elementare, appartiene l'Essai sur la géometrie à *n* dimensions, che è uno studio metrico delle formole di geometria analitica per le varietà lineari negli iperspazî.

Ma il campo maggiore, nel quale si esercitarono, col più fortunato successo, le eminenti qualità inventive di C. Jordan, lasciandovi tracce durevoli e profonde, è il campo schiuso dal genio di Galois nella teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche. Per quest'opera di lunga lena, compiuta con singolare penetrazione e perseveranti studî, ben a ragione C. Jordan venne riguardato come continuatore di Galois.

È noto come la scoperta fondamentale di Galois, che ad ogni equazione algebrica, fissato il campo di razionalità, associava un determinato gruppo di sostituzioni sulle radici, gruppo dalla cui struttura dipendono le proprietà dell'equazione, e tutta la serie di proposizioni enunciate da Galois senza dimostrazione nella celebre lettera a Chevalier, solo dopo qualche tempo apparvero in tutta la loro importanza ai matematici.

È al nostro Betti che appartiene il merito di avere, per il primo, penetrate le geniali idee di Galois e di aver dato, nel 1852, la dimostrazione completa della serie di quei teoremi, che accolti poi nel trattato d'algebra del Serret divennero ben presto patrimonio comune dei matematici.

Ma, per tal modo, erano posti soltanto i fondamenti dell'edificio che doveva sorgere sotto l'impulso delle nuove idee, di meravigliosa potenza e fecondità. Innanzi tutto era la teoria dei gruppi di sostituzioni, fino allora appena abbozzata, e nella quale cominciavano a delinearsi le tre nozioni fondamentali della transitività, della primitività e sopra tutto della composizione del gruppo, che domandava un maggiore e completo sviluppo; e nelle applicazioni alla teoria delle equazioni il primitivo problema della risolubilità per radicali appariva ora come un primo anello soltanto nella serie di ricerche che concernono la classificazione degli irrazionali algebrici e lo studio della loro mutua dipendenza.

Le perseveranti ricerche di Jordan si volsero appunto all'attuazione dell'importante disegno, e dopo una serie di Memorie nelle quali si trattavano i problemi fondamentali delle due teorie, Egli pubblicava nel 1870 il celebre: *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Quest'opera, che l'autore volle nella prefazione indicare come un commento a Galois, venne giustamente riguardata quale un monumento elevato alla sua memoria, dove nella costruzione delle varie parti, e nel suo compimento, grande è il merito che spetta a C. Jordan.

Difficilmente potrebbe un'analisi succinta descrivere tutta la ricchezza delle conquiste contenute in quest'opera, e per la parte che riguarda la teoria pura dei gruppi e per quella che ne tratta le applicazioni alle equazioni algebriche, le quali due parti del resto, conforme appunto ai concetti fondamentali di Galois, vengono qui ad unirsi e a compenetrarsi intimamente fra loro.

Nella teoria dei gruppi, fra i principali risultati delle ricerche di C. Jordan, basti ricordare la nozione dei fattori di composizione, numeri essenzialmente legati al gruppo, i molteplici teoremi sui gruppi transitivi e sul limite del grado di transitività, i teoremi sui gruppi primitivi ed imprimitivi, in fine lo studio dei gruppi particolari più importanti e della loro rappresentazione analitica.

Nelle applicazioni alla teoria delle equazioni, abbiamo lo studio approfondito dell'effetto che produce sul gruppo di Galois di un'equazione l'ampliamento del campo di razionalità, poi le ricerche sul gruppo di monodromia delle equazioni con uno o più parametri, e la dimostrazione del fatto importante che il gruppo di monodromia è sempre un sottogruppo invariante del gruppo algebrico.

Gli interessanti problemi che provengono dalla geometria, come il problema di Hesse pei nove flessi di una cubica piana, quello delle sedici rette della superficie del 4° ordine con conica doppia, dei punti e piani singolari della superficie di Kummer, il problema delle 27 rette della superficie generale del 3° ordine offrono a Jordan un bellissimo campo per le applicazioni della teoria, dove le proprietà delle relative configurazioni geometriche vengono utilizzate per lo studio del gruppo corrispondente, per la determi-

nazione dei suoi fattori di composizione e la formazione delle diverse risolventi, nel loro significato geometrico.

Le equazioni che si presentano nella teoria delle funzioni ellittiche, nei problemi di divisione e di trasformazione, e i problemi analoghi per le funzioni iperellittiche, trovano ampia trattazione; così i metodi di Hermite, Kronecker e Brioschi per la risoluzione dell'equazione generale di 5° grado per trascendenti ellittiche. Il problema della trisezione dei periodi nelle funzioni iperellittiche con $p = 2$ porta ad una risolvente del 27° grado il cui gruppo si identifica con quello per la equazione da cui dipende il problema delle 27 rette della superficie del 3° ordine.

L'ultima parte dell'opera, il Libro 4°, che occupa più della terza parte del volume, è tutta dedicata all'importante studio della risolubilità per radicali. Movendo dalle prime ricerche di Galois, che risolvevano il problema per le equazioni di grado *primo*, e dalle brevi indicazioni da lui lasciate pei gradi composti, il Jordan ha potuto erigere una teoria completa della risolubilità per radicali risolvendo gradatamente i varî problemi che si presentavano e sviluppando così fino alle ultime conseguenze le idee di Galois.

Posteriormente alla pubblicazione del trattato, Jordan è ritornato su varî punti della teoria, semplificandone i procedimenti e risolvendo nuove questioni. Ad una seconda edizione del libro, da molti desiderata, non ha mai voluto risolversi, chè gli studî ulteriori da lui compiuti, e insieme lo sviluppo preso dalla teoria per le ricerche di altri matematici, avrebbero domandato una rifusione completa del trattato colla conseguente temporanea rinuncia ad altre sue ricerche originali.

Fra le Memorie attinenti alla teoria dei gruppi rileviamo ancora quella sua antica del 1869 sui gruppi di movimenti, che interessano anche la cristallografia. Ivi Jordan considera insieme i gruppi discontinui e quelli continui, prevenendo in questo campo le teorie di Sophus Lie, senza introdurre la nozione delle trasformazioni infinitesime generatrici fondamentali nelle teorie di Lie.

In un'altra importante Memoria, pubblicata nel tomo 84 del Giornale di Crelle, il Jordan, per lo studio delle equazioni differenziali lineari integrabili algebricamente, tratta il problema generale della costruzione dei gruppi finiti di sostituzioni lineari in un numero qualunque di variabili. Ingegnose considerazioni delle sostituzioni affini nel gruppo e dei sottogruppi con queste permutabili, gli permettono di costruire un'equazione d'analisi indeterminata che lega l'ordine del gruppo cogli ordini dei detti sottogruppi, equazione fondamentale dalla cui discussione completa dipende la risoluzione del problema e la classificazione dei varî tipi possibili, in ogni caso in numero finito.

Oltre a questi lavori sistematici sulla teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche, la produzione scientifica di C. Jordan contiene una serie di belle ricerche algebriche ed aritmetiche sulla teoria delle forme quadra-

tiche e superiori, concernenti i fondamentali problemi dell'equivalenza algebrica ed aritmetica e la riduzione delle sostituzioni lineari. Nell'indirizzo aritmetico ricorderemo il risultato capitale e di grande generalità, per le forme di qualunque grado, che assicura essere finito il numero delle classi.

Non meno notevoli sono le ricerche di Jordan nel campo dell'analisi. Qui le sue cure maggiori si volsero alla redazione del suo celebre *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* in 3 volumi, che riassumono le lezioni da lui dettate in varî anni alla Scuola Politecnica ed al Collegio di Francia, ed espongono in un quadro di mirabile composizione le principali teorie del calcolo differenziale e integrale e dell'analisi.

Alla prima edizione del libro, nel 1882, altre due ne seguirono, l'ultima nel 1909, ogni volta corredate di aggiunte e nuovi perfezionamenti.

Il grande successo del libro, che ha trovato posto in tutte le biblioteche matematiche pubbliche e private, in Francia ed all'estero, è ben giustificato dal suo intrinseco valore e dalla magistrale esposizione nella quale eccellono gli scrittori francesi. Le ricerche dell'odierna analisi rigorosa delle funzioni di variabile reale trovarono nel Jordan uno dei primi espositori in Francia; ma ben più Egli ha efficacemente contribuito a questi studî introducendovi importanti e fondamentali nozioni, come quella di funzioni a *variazione limitata* e l'altra delle curve chiuse, nel senso più generale, le quali vengono ormai dette universalmente *curve di Jordan*. Infine i primi nuovi concetti di *misura*, così importanti nella moderna teoria dell'integrazione, vennero da lui introdotti nella scienza.

Se le opere matematiche di Camillo Jordan resteranno sempre ad attestare la genialità dello scienziato, ben a lungo la memoria dell'uomo egregio, delle virtù del suo carattere fermo insieme e modesto nel suo grande valore, vivrà in quanti lo conobbero e lo venerarono. Molti di noi ricordano, al congresso matematico dell'aprile 1908 qui in Roma, la figura dello scienziato così semplice ed affabile nei modi, che attirava la simpatia di tutti al solo vederlo, ancora prima che il suo nome pronunziato destasse l'ammirazione. Sei anni più tardi la spaventevole guerra travolgeva nel suo turbine la Francia e l'Europa, e fra le famiglie più colpite era quella numerosa di C. Jordan. Tre dei suoi figli, ed un figlio ancora del maggiore suo figlio, cadevano in campo. Fermo nel suo dolore e nella grandezza del sacrificio offerto alla patria, Camillo Jordan attendeva la vittoria. E questa venne, gloriosa e completa, a rischiarare i suoi ultimi giorni.

ELENCO DELLE PRINCIPALI PUBBLICAZIONI DI C. JORDAN
(omesse le Note nei « Comptes Rendus de l'Académie »).

1. *Sur le nombre des valeurs des fonctions* (Journal de l'École Polytechnique, 1861).
2. *Sur la déformation des surfaces* (Journal de Liouville, 1866).
3. *Recherches sur les polièdres* (Crelle's Journal, Bd. 66, 68, 1866).
4. *Lettre à Liouville sur la résolution algébrique des équations* (Journal de Liouville, 1867).

5. *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (Annali di matematica, 1867).
6. *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* (Journal de Liouville, 1867).
7. *Mémoire sur les groupes de mouvements* (Id., 1868).
8. *Théorèmes sur les équations algèbriques* (Id., 1869).
9. *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Gauthier Villars, 1870).
10. *Mémoire sur la résolution alrébriques des équations les unes par les autres* (Journal de Liouville, 1871).
11. *Théorèmes sur les groupes primitifs* (Id., 1871).
12 *Recherches sur les substitutions* (Id., 1872).
13. *Sur la forme canonique des congruences du deuxième degrè et le nombre de leurs solutions* (Id., 1872).
14. *Sur la limite de transitivité des groupes non alternés* (Bulletin de la Societé Mathem., 1873).
15. *Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace* (Journal de Liouville, 1873).
16. *Mémoire sur les groupes primitifs* (Id., 1873).
17. *Questions de probabilité* (Id., 1873).
18. *Mémoire sur les formes bilinéaires* (Journal de Liouville, 1874).
19. *Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques* (Id., 1874).
20. *Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires* (Bull. Soc. Math., 1874).
21. *Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe* (Journal de Liouville, 1875).
22. *Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée* (Crelle's Journal, Bd. 79, 1875).
23. *Essai sur la géométrie à* n *dimensions* (Bull. Soc. Math., 1875).
24. *Mémoire sur les covariants des formes binaires* (Journal de Liouville, 1876).
25. *Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires* (Bull. Soc. Math , 1877).
26. *Mémoire sur les caractéristiques des fonctions Thèta* (Journal de l'École Polytechnique 1879).
27. *Mémoire sur l'équivalence des formes* (Id., 1880).
28. *Sur la réduction des substitutions linéaires* (Id., 1880).
29. *Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples* (Bull. Soc. Math., 1881).
30. *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Crelle's Journal, Bd, 84, 1881).
31. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* Première Édition Paris, Gauthier Villars, 1882 (deux éditions ultérieures, la dernière en 1909).
32. *Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques* (Journal de l'École Polytechnique, 1882).
32. *Discours sur J. A. Serret* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1885).
34. *Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même* (Journal de Mathématique, 1888)
35. *Georges Halphen* (Id., 1889).
36. *Remarques sur les intégrales définies* (Id., 1892).
37. *Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes que ne contiennent pas le groupe alterné* (Id., 1895).
38. *Sur les groupes d'ordre* $p^m q^2$ (Id. 1898).
39. *Charles Hermite* (Id., 1901).
40. *Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier* p, *invariantes par une substitution linéaire donnée* (Id., 1905).

41. *Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires* (Id., 1906).
42. *Suite du mémoire précédent* (Id., 1907).
43. *Groupes abéliens généraux dans les groupes linéaires à moins de 7 variables* (Id., 1907).
44. *Sur le nombre des solutions de la congruence* $(a_{ik}) \equiv A$ (mod. M) (Id., 1911).
45. *Des polynômes invariants par une substitution linéaire* (Id., 1914).
46. *Mémoire sur les groupes résolubles* (Id., 1917).
47. *Sur la classification des constellations* (Comptes-Rendus du Congrès International de Strasbourg, 1920).
48. *Sur une équation du 16ème degré* (Crelle's Journal, Bd. 70, 1869).
49. *Sur les assemblages de lignes* (Id., 1869).

***

L'Accademico Segretario G. Castelnuovo legge la seguente Commemorazione del Socio straniero prof. Max Noether.

Max Noether, che la morte ci tolse il 13 dicembre scorso, è uno dei più insigni rappresentanti di quell'indirizzo algebrico-geometrico che ebbe rigoglioso sviluppo nel secolo xix. La nostra Accademia, la quale già trent'anni or sono elesse Socio il Nöther, consentirà che io parli brevemente delle principali opere di lui.

Nato a Mannheim il 24 settembre 1844, egli seguì corsi di matematica ed astronomia alla specola di quella città e successivamente alle Università di Heidelberg col Kirchhoff, di Giessen e Gottinga col Clebsch. Fu quest'ultimo scienziato che esercitò il maggiore influsso sulla mente del giovane Nöther e determinò l'indirizzo delle sue ricerche.

Il Clebsch dalla celebre Memoria di Riemann sulle funzioni abeliane aveva tratto copiose e belle applicazioni alla teoria delle curve algebriche. Ma il suo programma, interrotto dalla morte precoce, doveva esser più vasto. È verosimile che il Clebsch abbia intuito qual vantaggio risentirebbe l'algebra geometrica quando coi proprî mezzi potesse stabilire quelle proprietà algebriche che nell'opera di Riemann figurano come ultime e non essenziali conseguenze ottenute con metodi estranei alla loro natura. Non si trattava di ubbidire alle aspirazioni al purismo che hanno pur dominato nella seconda metà del secolo scorso; la veduta era molto più alta, giacchè si poteva prevedere (e la previsione fu poi confermata) che procedimenti più diretti e spontanei avrebbero portato una maggior luce sulle proprietà delle curve algebriche e avrebbero permesso di estendere parecchi risultati alla teoria della superficie, per la quale i metodi trascendenti non erano ancora maturi.

Questo programma ha potuto realizzare pienamente il Nöther in una parte della sua opera. Valse ad aprirgli la via un teorema fondamentale della teoria dell'eliminazione, il quale fissa le condizioni perchè una forma algebrica possa scriversi come combinazione lineare di altre due forme assegnate. Già in uno dei suoi primissimi scritti (1869) egli perviene al teorema

sotto alcune restrizioni, e più volte vi ritorna nel corso della sua carriera scientifica per estenderne via via le condizioni di validità. Grazie alle pubblicazioni del suo scopritore ed a quelle dei numerosi geometri che hanno proseguito le ricerche sull'argomento, il teorema fondamentale di Nöther ha oggi una letteratura vastissima.

Da esso il Nöther, in un lavoro (1873) scritto in collaborazione con un altro nostro socio straniero, il Brill, dedusse il così detto *teorema del resto*, che nella trattazione algebrica delle curve piane compie un ufficio analogo a quello che ha, nella trattazione trascendente, il celebre teorema di Abel sugli integrali di differenziale algebrico. Partendo da queste proposizioni i due autori nel lavoro citato discutono a fondo e quasi esauriscono quella parte del programma sopra esposto che riguarda le curve piane.

Subito dopo (1874) il Nöther mette alla prova i metodi di cui era in possesso per affrontare il problema ben più difficile relativo alle superficie. Si tratta di stabilire quelle proprietà e quei caratteri delle superficie algebriche che sono invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali. Dai lavori che egli ha dedicato a questo argomento, meglio forse che dal resto della sua produzione, si può giudicare la profondità dell'ingegno del nostro matematico, e la potenza della sua intuizione. I mezzi di cui egli dispone non hanno ancora raggiunto la perfezione necessaria per vincere tutti gli ostacoli presentati dall'argomento sino allora inesplorato; il procedimento per analogia, strumento così potente di indagine scientifica, lo avrebbe condotto facilmente a previsioni fallaci; eppure egli sa tracciare con mano maestra tutte le linee essenziali della nuova teoria. Le ricerche che proseguirono le sue hanno potuto completare in qualche punto l'edifizio, ma l'ossatura centrale è rimasta immutata, e le proprietà da lui scoperte ed ormai stabilmente acquisite alla scienza resteranno per sempre legate al suo nome.

Alle ricerche di cui sinora ho parlato altre si riattaccano. Così il lavoro redatto col Brill costituisce la base della Memoria sulle curve algebriche sghembe che nel 1882 ottenne, insieme ad una monografia dell'Halphen sullo stesso argomento, il premio Steiner dell'Accademia di Berlino. In quella memoria vengono stabilite molte notevoli proprietà delle dette curve e sono suggeriti alcuni criteri di classificazione proiettiva che vengono poi applicati alle curve dei primi ordini.

Alla teoria delle superficie si connettono i lavori dedicati a quelle particolari superficie che possono porsi in corrispondenza birazionale con un piano. Già il nostro Cremona e il Clebsch avevano esaminato particolari tipi di superficie razionali. Spetta però al Nöther il merito di aver dato per primo dei mezzi per stabilire la razionalità di ampie famiglie di superficie. Mirabile per l'acume con cui vengono risolte delicate questioni di algebra è uno dei primi lavori del Nöther, presentato nel 1870 all'Università di Heidelberg per ottenervi l'abilitazione all'insegnamento, e destinato a dimo-

strare la razionalità delle superficie che contengono un fascio razionale di curve razionali. In questo scritto si prova incidentalmente il teorema che ogni trasformazione cremoniana del piano è risolubile nel prodotto di trasformazioni quadratiche, e vengono ridotti a tipi semplici i sistemi lineari di curve razionali. Allo stesso ordine di idee appartiene un gruppo di importanti lavori (1878-1889) ove sono fissate le condizioni perchè sia razionale una superficie rappresentabile sopra un piano doppio. Queste ricerche si son rivelate veramente essenziali in tutto lo sviluppo ulteriore dell'argomento.

Il Nöther ha seguìto con molto interesse la costruzione della teoria delle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio dovuta al Cremona, vi ha contribuito in qualche punto essenziale oltre quello di cui ho già discorso, e ne ha fatto notevoli applicazioni. Cito in particolare la classica Memoria (1875) in cui egli, valendosi di trasformazioni cremoniane, risolve le singolarità delle curve piane algebriche e fornisce con ciò uno dei mezzi più perfetti per l'analisi dei punti singolari.

Per amore di brevità devo sorvolare su molti altri importanti lavori del Nöther dedicati sia ad argomenti affini a quelli di cui ho discorso, sia ad altri capitoli dell'algebra o dell'analisi, quali ad es. la teoria degli invarianti, la teoria di Galois, lo studio delle funzioni abeliane e del problema di inversione di Jacobi.

Quando l'età matura gli tolse la forza di proseguire lo studio dei difficili problemi che aveva affrontato nei suoi anni giovanili, egli volle compiere opera utile alla storia della scienza e rendere un tributo d'omaggio a parecchi suoi illustri colleghi, tracciando, con somma competenza, le commemorazioni di vari matematici che avevano lavorato in campi affini al suo. Mi basti qui citare gli articoli in cui parla con ammirazione e simpatia dei nostri Brioschi e Cremona, al secondo dei quali era legato da cordiale amicizia, e l'ultimo suo scritto, sempre accurato e profondo, dedicato alla memoria dello Zeuthen che lo precedette di due anni nella tomba.

Nemmeno negli anni procellosi della guerra egli seppe restare inoperoso. Nella prima lettera ricevuta dalla Germania dopo conclusa la pace, il Nöther mi comunicava di aver compiuto l'esame del Codice Atlantico di Leonardo da Vinci e di averne redatto l'indice per materia che manca ancora a quell'opera; egli aggiungeva che avrebbe visto volentieri pubblicato l'indice in Italia. Il manoscritto, inviatomi un anno fa, è ora presso l'Istituto Vinciano che lo sta rivedendo e completando in qualche punto, e provvederà poi alla stampa.

Ho voluto citarvi questo particolare non solo perchè esso interessa la nostra Accademia che ha curato la riproduzione del Codice Atlantico, ma pure perchè mi pare significativo il fatto che durante una terribile guerra, tra le cause della quale vien citato il desiderio di supremazia della cultura

germanica sulla latina, uno dei maggiori rappresentanti di quella cultura senta il bisogno di dissetarsi alla fonti più pure del nostro Rinascimento.

Il sentimento della solidarietà del sapere è così potente negli spiriti più eletti da rompere le barriere che la brama di predominio tenta di creare fra i popoli.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio NASINI, relatore, a nome anche del Corrisp. BRUNI, legge una Relazione sulla Memoria dei dottori U. SBORGI e L. FERRI, intitolata: *Sui borati. Sistema* $(NH_4)_2O$-B_2O_3-H_2O. *Diagramma, temperatura, concentrazione*; concludendo col proporre la inserzione del lavoro nei volumi accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste una Commemorazione del sen. G. CIAMICIAN fatta dal prof. MASCARELLI e un volume di supplemento all' « Archivio italiano di Anatomia e di Emrbiologia » dedicato al prof. G. CHIARUGI dai suoi discepoli nel 35° anno del suo insegnamento.

Il Presidente VOLTERRA fa omaggio della importante e bella pubblicazione, della quale discorre: *La Vie e l'Oeuvre de Pierre Duhem*, del Socio straniero E. PICARD; e di numerose pubblicazioni di S. E. il dottor GALLARDO, ministro della Repubblica Argentina in Italia.

Il Socio NASINI offre il volume, dandone notizia, del dott. A. QUARTAROLI, intitolato: *Trattato di chimica generale e inorganica.*

Il Corrispondente LONGO presenta la sua pubblicazione: *Le piante più notevoli del R. Orto botanico di Pisa*, e ne parla.

Il Corrispondente ENRIQUES offre all'Accademia il suo libro: *Per la storia della Logica*, e intrattiene i Soci su quanto nel libro stesso egli ha trattato.

G. C.

PERSONALE ACCADEMICO

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 10°

Seduta del 21 maggio 1922.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 6 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 4 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1922.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sulla trasformazione di Lorentz.* Nota del Socio C. Somigliana.

1.

L'equazione delle onde piane, se x è la direzione di propagazione e si pone $y=ct$ (ove t è il tempo e c la velocità di propagazione) può scriversi

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

dove Ω rappresenta il vettore vibrante, che sarà parallelo alla direzione di propagazione, se si tratta di onde longitudinali. Se le onde sono trasversali, Ω sarà una delle due componenti normali alla direzione di propagazione.

L'equazione (1) ammette il classico integrale di D'Alembert

$$\Omega=f(x+y)+g(x-y) \tag{2}$$

ove f, g sono funzioni arbitrarie. Introduciamo ora due nuove variabili x', y' definite mediante le relazioni

$$x+y=\varphi(x'+y') \qquad x-y=\psi(x'-y') \tag{3}$$

ove φ, ψ sono due nuove funzioni arbitrarie. Avremo

$$\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}\,\varphi(x'+y')+\tfrac{1}{2}\,\psi(x'-y') \\ y&=\tfrac{1}{2}\,\varphi(x'+y')-\tfrac{1}{2}\,\psi(x'-y') \end{aligned} \tag{3'}$$

e l'integrale Ω diventerà una nuova funzione

$$\Omega_1 = F(x' + y') + G(x' - y')$$

che soddisferà ad un'equazione simile alla (1), in cui le variabili x, y saranno sostituite dalle x', y'. Perciò la trasformazione (3) dovrà lasciare invariata l'equazione (1). Facendo i calcoli si trova infatti facilmente

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y'^2} = F'(x' + y')\, G'(x' - y') \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right\}.$$

È chiaro poi che tutte le sostituzioni della forma (3) costituiscono un gruppo, in quanto il prodotto di due di tali sostituzioni è sempre riducibile alla stessa forma (3).

Supponiamo ora che le funzioni φ, ψ siano lineari e precisamente poniamo

$$(4) \qquad x + y = a(x' + y') \qquad x - y = \frac{1}{a}(x' - y')$$

ove a è una costante non mai nulla. Questa trasformazione, come è evidente, lascia invariata l'espressione $x^2 - y^2$, e si ha quindi

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2.$$

Perciò concludiamo subito che la (4) non è altro che la trasformazione di Lorentz, che si presenta così come un caso specialissimo delle trasformazioni rappresentate dalle formole (3). È ben noto del resto che la trasformazione di Lorentz lascia invariata la equazione (1).

Un altro modo molto semplice per arrivare a questa trasformazione è il seguente. Nella trasformazione ortogonale (rotazione di un angolo ω)

$$x + iy = (x' + iy')\, e^{i\omega}$$

scambiamo fra loro y, y', cioè poniamo

$$x + iy' = (x' + iy)\, e^{i\omega}$$

e avremo anche in questo caso

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2.$$

Ma noi ci atterremo alla forma (4), dalla quale si ha subito

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) x' + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) y'$$
$$y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) x' + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) y'.$$

Per ritrovare una delle forme più consuete della trasformazione di Lorentz basta porre

$$\lambda = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \qquad -1 < \lambda < 1$$

e si ha subito

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad y = \frac{\lambda x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{y'}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Risulta così che alla trasformazione di Lorentz si può giungere con considerazioni assai semplici, che nulla hanno a che fare con i moderni concetti della relatività, e si connettono invece naturalmente colle proprietà degli integrali dell'equazione delle onde piane. Si presenta così spontanea la domanda: *quale è il significato di questa trasformazione nella ordinaria meccanica newtoniana?*

Ora una quistione di tal fatta è già stata risolta, molto tempo prima che si parlasse di relatività, in una Memoria di Voigt del 1887 [1], nella quale viene studiato e risolto il problema della propagazione delle onde, provenienti da sorgenti che si muovono uniformemente in linea retta e vien data una dimostrazione del principio di Doppler. E lo strumento di cui l'autore si serve è appunto una trasformazione lineare, che si riduce subito a quella di Lorentz [2]. Questa Memoria non è generalmente citata nei trattati sulla relatività; vi si accenna incidentalmente nella *Relativitätstheorie* di Pauli, contenuta nella Enciclopedia delle Scienze matematiche (vol. V, 2, fasc. 4°).

La priorità del Voigt è stata riconosciuta recentissimamente dal Lorentz stesso (Acta math. 38 pag. 295), e sarebbe quindi giusto che il nome del Voigt fosse almeno associato a quello di Lorentz nella denominazione della ormai celebre trasformazione.

Per dare un'idea del procedimento di Voigt, consideriamo l'integrale corrispondente ad un sistema di onde sferiche partenti dall'origine delle coordinate, in uno spazio S,

$$\Omega = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(1) W. Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*. Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 10 Marz 1887.

(2) La trasformazione di Voigt è la seguente:

$$\xi = x - kt \qquad \tau = t - \frac{k}{\omega^2} x$$

da cui si ricava

$$\xi^2 - \omega^2 \tau^2 = \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right)(x^2 - \omega^2 t^2).$$

Ponendo quindi

$$\xi = \xi' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} \qquad \tau = \tau' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}}$$

si ha

$$\xi'^2 - \omega^2 \tau'^2 = x^2 - \omega^2 t^2.$$

che soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0 . \tag{5}$$

Se alla trasformazione di Lorentz associamo l'altra

$$y = y' \qquad z = z' \tag{6}$$

otteniamo nello spazio S' delle variabili x', y', z', t' un nuovo integrale della equazione trasformata della (5) (che rimane inalterata di forma) nel quale il centro luminoso, o sonoro, anzichè fisso nella origine delle coordinate, si troverà nel punto

$$x' + \lambda c t' = 0 \qquad y' = 0 \qquad z' = 0$$

e si muove perciò nella direzione negativa dell'asse delle x con velocità costante λc.

Il nuovo integrale dà quindi la propagazione delle onde, quando la sorgente si muove di moto uniforme in una certa direzione, o l'osservatore si muove in quella opposta.

È questo il concetto fondamentale di Voigt. È chiaro allora che tutte le proprietà che nella teoria della relatività risultano dalla trasformazione lorentziana, sono generalmente suscettibili di una interpretazione, analoga alla precedente, di carattere nettamente newtoniano. E che per conseguenza qualunque eventuale verifica sperimentale di tali proprietà non potrà in via generale essere citata come decisiva a favore dell'una piuttosto che dell'altra interpretazione.

Così la formola

$$v = \frac{v' + \lambda c}{1 + \frac{\lambda}{c} v'} \qquad \text{dove} \quad v = \frac{dx}{dt} , \quad v' = \frac{dx'}{dt'}$$

che risulta dalla trasformazione di Lorentz e che è considerata come base della cinematica relativistica, non è altro, nella interpretazione newtoniana, che la formola che lega tra loro le velocità nei punti corrispondenti degli spazi S, S'. Lo stesso dicasi per le formole dell'accelerazione.

II.

Poichè la trasformazione di Lorentz non è che un caso speciale della trasformazione (3), è chiaro che molte delle precedenti considerazioni potranno essere estese prendendo per base quella trasformazione più generale.

Cominciamo intanto ad osservare che una trasformazione lineare, più generale della (4), si ha ponendo

$$x + y = a(x' + y') \qquad x - y = b(x' - y')$$

ove b è una nuova costante. Anche queste trasformazioni costituiscono un gruppo. Il prodotto di due trasformazioni ha per parametri a, b i prodotti dei parametri delle due trasformazioni componenti. Poniamo ora

$$b = -\frac{1}{a} \qquad a > 1 .$$

Avremo la trasformazione

$$x + y = a(x' - y) \qquad x - y = -\frac{1}{a}(x' - y')$$

la quale, se si pone

$$\lambda = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \qquad \lambda > 1 ,$$

diviene

$$x = \frac{x'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \qquad y = \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

analoga a quella di Lorentz, ma in cui il parametro λ deve essere maggiore dell'unità. L'interpretazione newtoniana di questa trasformazione porta alla soluzione del problema della propagazione delle onde piane, quando la sorgente, o l'osservatore, si muove con velocità in valore assoluto *maggiore di quella della luce*, poichè abbiamo pel piano $x = 0$ nello spazio S' la equazione

$$x' + \lambda c t' = 0 .$$

Se chiamiamo u questa velocità, abbiamo

$$\lambda = \frac{u}{c}$$

e poichè $\lambda > 1$, una teoria, analoga a quella della relatività, basata sulle formole precedenti dovrebbe porre il postulato che *qualunque corpo si muove con velocità superiore a quella della luce.*

A questa trasformazione però non possiamo associare le (6), quando si voglia conservare l'equazione generale delle vibrazioni (5). Dovremmo porre invece

$$y = iy' \qquad z = iz'$$

e avremmo allora

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) .$$

La presenza dell'immaginario porterebbe in generale a due nuovi integrali dell'equazione (5), costituiti della parte reale e della parte immaginaria della funzione trasformata.

Prendendo a base di considerazioni analoghe alle precedenti la trasformazione generale (3), e limitandoci necessariamente al caso delle onde piane,

saremmo condotti a considerare, nella interpretazione newtoniana, il problema della propagazione nel caso in cui il piano sorgente delle onde si muova con una legge determinata da un'equazione della forma

$$\varphi(x'+ct')+\psi(x'-ct')=0$$

dove φ, ψ sono funzioni arbitrarie. Il movimento avviene quindi ancora nella direzione x, ma con una velocità non più necessariamente costante, e che può variare in infiniti modi. La corrispondente teoria relativistica dovrebbe porre il postulato della indipendenza della velocità di propagazione della luce da un movimento della sorgente rettilineo, ma non più uniforme.

Per quanto ovvie possano apparire le considerazioni svolte in questa Nota, mi è sembrato che potessero presentare un certo interesse per collocare nella sua giusta luce, dal punto di vista meccanico-analitico, la trasformazione di Lorentz, fulcro iniziale di tutta la relatività; come anche mi è sembrato potessero portare qualche contributo a quella critica delle teorie relativiste che sembra ora così opportunamente iniziata.

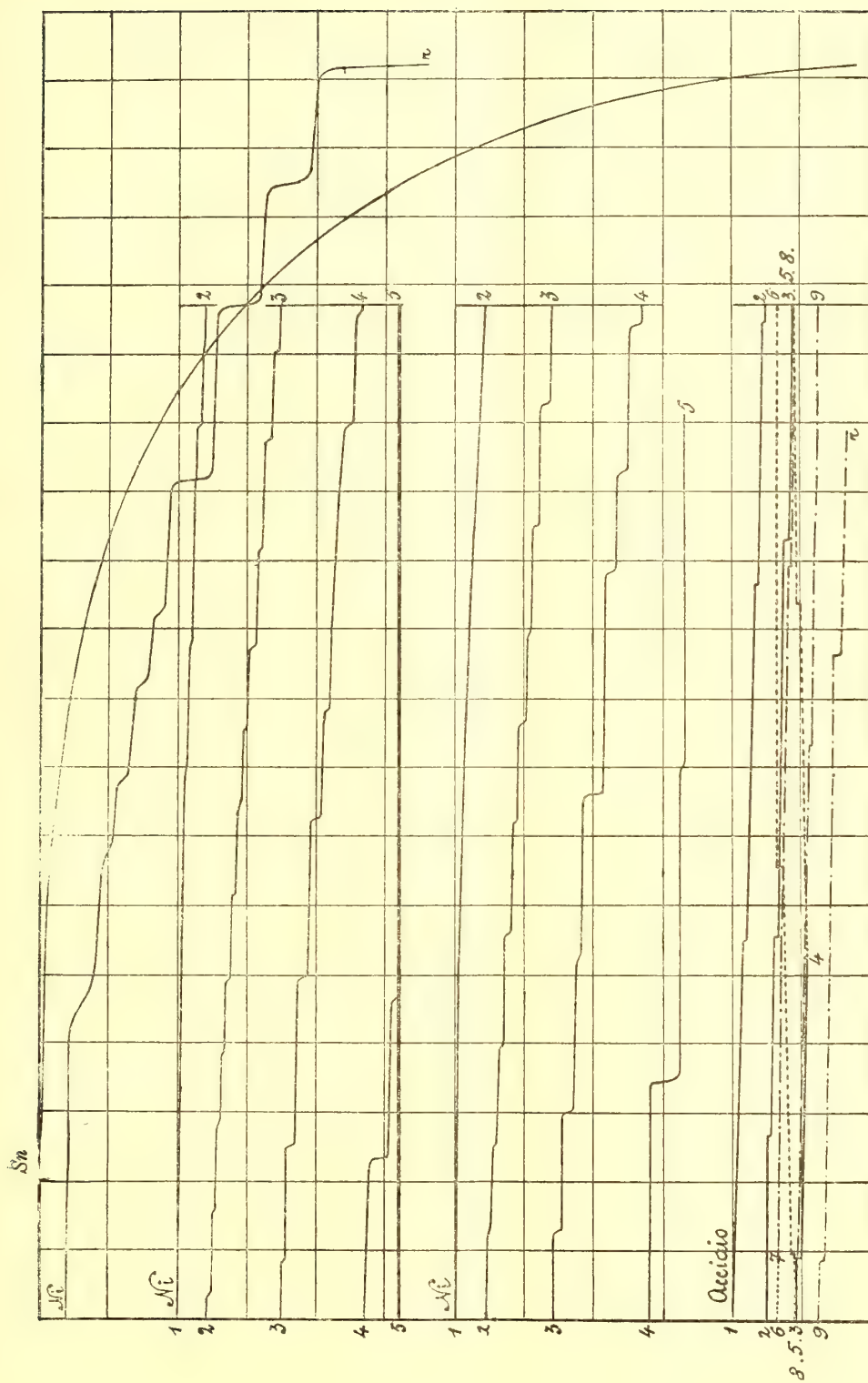
Fisico-chimica. — *Modalità sulla trazione del nichel e dell'acciaio* [1]. Nota del Socio M. Cantone.

In occasione di ricerche da me eseguite sulla tenacità [2] ebbi modo di rilevare alcune anomalie nel comportamento del nichel ricotto e dell'acciaio crudo cimentati per trazione, anomalie che credetti meritevoli di particolare esame: a tale studio si riferisce appunto la presente Nota.

La disposizione sperimentale da me adottata si discosta alquanto da quelle che ordinariamente si attuano, perchè, avendo di mira la valutazione del carico di rottura, interessava assicurarsi che i legami agli estremi dei fili cimentati non ne alterassero l'uniformità di struttura o di sezione, e pertanto ricorsi al ripiego di adattare la parte media del filo in esame alla gola di una puleggina mobile, e di fermare con viti i capi del filo sopra un cilindro fisso soprastante di ugual diametro, dopo aver fatto compiere un giro sul cilindro stesso a ciascuna delle parti terminali, onde risultavano due tratti paralleli alla distanza di 16 mm. col semplice legame di forte adesione al cilindro fisso ed alla gola della puleggina. I moti di oscillazione di quest'ultima vennero soppressi mediante opportune guide, epperò queste la lasciavano libera di spostarsi verticalmente per l'azione del peso tensore,

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico dell'Università di Napoli.

[2] I risultati di queste ricerche saranno esposti negli Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.

Sn
Ni
Ni
Ni
Acciaio

costituito da una boccia della capacità di 10 litri dove si facea pervenire il carico variabile in acqua, da apposito recipiente soprastante tarato.

All'albero, attorno al quale la puleggia poteva rotare con dolce attrito, era sospesa la boccia per mezzo di una forchetta, ed in un tratto sporgente dell'albero stesso si fissava una punta scrivente per registrare la legge di deformazione in un foglio di carta millimetrata avvolto sopra un cilindro girevole con moto di orologeria; ma nei casi in cui si aveano piccole deformazioni la parte terminale dell'albero, foggiata a coltello, poggiava sopra una leva di alluminio, provvista anch'essa di punta scrivente, al fine di ottenersi l'ingrandimento delle ordinate nel rapporto di *1* a *5*.

Nichel ricotto. Per avere un'idea dei risultati relativi alla legge di deformazione del nichel ricotto sarà opportuno riferirsi ai diagrammi contenuti nell'annessa figura, dove sono fedelmente riportate alcune linee figurative fra le molte, che si ebbero in fogli adattati sul cilindro girevole [1]. Carattere comune a tali linee è l'andamento a gradinata nella fase di notevole cedevolezza del filo, con deformazioni brusche da *1* a *6* mm., tali cioè da far sospettare che si produca una vera rottura parziale; però se si considera che in seguito a siffatti cedimenti, siano pure di 6 mm. sopra una lunghezza dell'ordine di grandezza di 300 mm., vi è un tratto poco inclinato come nella fase di deformazione per piccoli carichi, che le discontinuità si producono ad intervalli presso a poco uguali, e che nell'insieme i vertici degli angoli vivi dei singoli gradini riescono allineati sopra una curva sensibilmente regolare, devono escludersi effetti di attrito per l'uso delle guide fra le quali scorre la puleggina inferiore. E se si tiene presente che per quasi tutti gli altri metalli, ed in molti casi con deformazioni più esagerate, non manca la continuità nel processo di stiramento, può senz'altro ammettersi nel nichel uno speciale assetto interno non del tutto stabile, ma che, per ogni manifestazione esteriore, interessa tutta quanta la massa

[3] La prima si riferisce all'oro e si ottenne coll'ingrandimento di *1* a *5*: essa serve come termine di confronto per la registrazione con un metallo a comportamento regolare La seconda dà senza ingrandimento la legge di deformazione di un filo di nichel sottoposto ad esperienza una seconda volta dopo aver subito un notevole stiramento. La terza è relativa ad un filo di nichel al quale si fece compiere un ciclo unilaterale dopo averlo sottoposto ad un carico massimo: sul tratto grosso 5 — 5 si sovrappongono, quasi, le linee figurative delle due metà del ciclo. La quarta si riferisce ad altro filo di nichel cimentato fino ad un carico massimo, a partire da un peso tensore piccolo. L'ultima è la linea figurativa per un filo di acciaio cimentato prima per forze crescenti poi per forze decrescenti fino al carico iniziale ed in ultimo per forze crescenti fino al carico di rottura: la fase di carico crescente è riprodotta a tratto continuo ed arriva al n. *4*; la seconda, di carico decrescente, è punteggiata ed arriva al n. *7*; l'ultima fase è riprodotta con tratti e punti ed arriva in *r*, punto di rottura come per la prima linea del nichel. Le deformazioni relative all'acciaio sono ingrandite nel rapporto di *1* a *5*.

del filo invece di restare circoscritta in determinate regioni, secondo attestano il limitato decorso della fase discontinua e l'assenza d'irregolarità vera e propria nella forma dei tratti ottenuti alla rottura.

Non in tutte le serie compiute col nichel ricotto si presentò il fenomeno di cui ci siamo occupati, però si potè constatare in modo non dubbio che esso interveniva quando, per realizzare la rottura dei fili di mezzo millimetro di spessore con un carico in acqua inferiore a 10 kg., si partiva da un peso traente alquanto elevato, poichè già con un carico iniziale di 8 kg. l'anomalia spariva, o per lo meno le discontinuità erano così poco marcate da non rivelarsi coi mezzi sperimentali da me posti in opera; quindi non è da escludere che le condizioni di assetto poco stabile possano derivare da lesioni interne prodotte in tutta la massa del filo per un processo di deformazione non perfettamente statico ([1]).

È ad ogni modo notevole che, con un andamento conforme a quello della curva che collega i vertici dei gradini, la linea figurativa del processo di deformazione senza discontinuità indichi, a pari variazione di carico, un allungamento totale non inferiore, anzi un poco superiore: onde può dirsi che le discontinuità non lascino traccia di comportamento anomalo.

Allungamenti bruschi non si ebbero mai durante l'azione di un peso tensore costante: la cosa è facile a spiegarsi ove si consideri che nel nichel ricotto, anche con dilatazioni superiori ad $^1/_3$, l'elasticità susseguente produce variazioni relative di lunghezza di qualche *millesimo* appena; epperò la constatazione fattane ha importanza, sia perchè serve a togliere il dubbio che le discontinuità possano dipendere da non perfetto legame del filo al sostegno o da cause disturbatrici atte ad agire su questo, sia perchè tende ad assodare la natura dinamica della discontinuità.

Come era facile prevedere, l'isteresi nel nichel ricotto risultò molto grande; si vide infatti che, facendo uso di un carico variabile di 10 kg. (alquanto inferiore a quello che sarebbe stato necessario per la rottura), mentre per forze crescenti si produceva un allungamento di circa 30 mm., operando per forze decrescenti ([2]) il sistema dei due fili si accorciava solo di mm. 0,2 e, col ritorno al carico massimo, valore assoluto non diverso si avea per il corrispondente aumento di lunghezza. In tali condizioni non si apprezzava nel ciclo unilaterale alcuna traccia delle discontinuità così notevoli nella primitiva azione del carico in acqua, in quanto che queste si rivelano sempre in misura adeguata alle deformazioni complessive e tutto induce a con-

([1]) Vuolsi qui ricordare che anche nell'applicazione del carico iniziale si procurava di procedere gradualmente, ma non poteva certo evitarsi che il filo subisse una notevole deformazione in un tempo assai piccolo.

([2]) La diminuzione graduale del carico si operava col passaggio dell'acqua dalla boccia al serbatoio soprastante, dove si produceva l'aspirazione lenta per mezzo di apposita pompa.

siderare il comportamento del nichel ricotto nei cicli unilaterali come di sostanza elastica perfetta non molto diversa dalla originaria sotto l'azione di piccole forze esterne. Del resto la piccolezza stessa delle deformazioni nei cicli unilaterali anzidetti porta ad escludere una sensibile trasformazione in calore dell'energia meccanica in giuoco, trasformazione che appare invece legata in modo particolare alle discontinuità del processo elastico nel caso in cui queste si presentano; sicchè viene sempre meglio affermandosi il concetto che le grandi deformazioni del nichel ricotto, anche se accompagnate da saltuari cedimenti bruschi, non lascino effetti residui di eterogeneità nella struttura interna del metallo.

Acciaio crudo. — L'acciaio usato per queste ricerche è di ottima qualità e presenta uno spessore di mm. 0,225. Per forze deformatrici non grandi si comportò come sostanza perfettamente elastica, con un modulo di trazione di 22.000 kg. per mm.q.; ma con carichi superiori a 9 kg. si riottennero le anomalie riscontrate nel nichel, e con regolarità maggiore: nei diagrammi ottenuti coll'ingrandimento di *1* a *5* comparvero infatti, ad intervalli di circa 1 kg. di carico, gradini di altezza compresa fra 0,2 e 0,3 mm.; ed in tal modo con un carico in acqua di 10 kg. si ottenne per i salti un valore complessivo di mm. 2,4 sopra un allungamento totale apparente di mm. 12,5; per cui risultò il fatto interessante di una deformazione complessiva inerente ai tratti nei quali si svolgeva il processo continuo, con un valore del modulo quale si dedusse nella fase di perfetta elasticità, come se i salti (più netti che nel caso del nichel) rappresentassero semplici lacune istantanee in un processo perfettamente elastico e prive d'influenza su questo. Ad uguali deduzioni ero condotto nel precedente studio sul nichel; ma nel caso attuale, avendosi da fare con un metallo assai meno cedevole, era consentita una ricerca di carattere quantitativo con criterio più sicuro, per quanto meno facile fosse la valutazione; epperò sta il fatto, interessante a mio modo di vedere, che sotto il medesimo aspetto si manifestino le deviazioni dalla legge di Hooke in due metalli, come il nichel ricotto e l'acciaio crudo, i quali, pur possedendo lo stesso modulo di trazione, stanno agli antipodi per quanto riguarda l'apparente cedevolezza ai grandi sforzi di trazione, perchè, di fronte ad una dilatazione longitudinale complessiva di 0,352 in fili di nichel di mezzo millimetro di spessore, se ne ha una di circa 0,0075 in un filo di acciaio crudo del diametro di mm. 0,225.

Nè può non rilevarsi che nell'acciaio i gradini assumono altezza maggiore a misura che cresce il peso a partire dal quale si fa agire il carico in acqua: così, mentre partendo da 8 kg. si erano avuti sul foglio salti per un ammontare complessivo di mm. 2,4 sopra un abbassamento totale della punta scrivente di mm. 12,5, con un peso tensore iniziale di 11 kg. in tre serie successive con fili identici al primo, cimentati fino alla rottura, si

ottennero per le somme delle altezze dei gradini (ugualmente distanziati) i valori di mm. 6,4 6,6 6,5 in corrispondenza agli abbassamenti complessivi della punta di mm. 16,2 16,0 16,0; e siccome questi sistemi di valori si riferiscono nelle tre ultime serie ad un carico in acqua di circa kg. 9,5, si arriva al risultato che, non ostante il grande divario del peso iniziale e le conseguenti nette deviazioni dalla legge di Hooke quando si giunge al carico di rottura, in corrispondenza a 10 kg. di maggior peso tensore si riotterrebbe lo stesso allungamento *effettivo* di 2 mm. che si era riscontrato per i puri allungamenti elastici nella seria primitiva non tenendo conto delle discontinuità; e ciò importa che nei fili di acciaio crudo da me cimentati le deviazioni dalla legge di Hooke sarebbero da attribuire agli speciali processi di carattere quasi istantaneo. Nel nichel una legge così semplice non esiste, perchè deviazioni dalla legge di Hooke, e crescenti col carico, si verificano anche negl'intervalli fra due salti successivi; ma riescono sempre di entità *relativamente* piccola.

E per quanto riguarda i fenomeni d'isteresi abbiamo nell'acciaio crudo un fatto assai strano che non si verifica nel nichel ricotto, e cioè la presenza di discontinuità quando si procede per forze decrescenti fino al carico iniziale, nel senso di accorciamenti e per un ammontare complessivo più piccolo in valore assoluto di quello prodotto dal primo carico crescente in acqua, ma pressocchè uguale all'allungamento avutosi nella successiva seconda metà del ciclo unilaterale. Si avrebbe dunque una tendenza alla sovrapposizione delle due linee figurative delle due metà del ciclo compiuto a partire dallo stato di massima deformazione, sicchè, considerata la cosa dal punto di vista energetico, se si suppone (come appare legittimo) che al brusco allungamento corrisponde uno sviluppo di calore, dovrebbe ammettersi nel rapido accorciamento un lavoro fatto a spese dell'energia interna; e se fosse lecito parlare nel primo caso di molecole che si rendono libere, sarebbe da ammettere nel secondo il ritorno ai legami della primitiva rigidità con perdita della forza viva acquistata nella fase dell'opposto processo dinamico.

Ad ogni modo le discontinuità riscontrate nel senso cui corrisponde il sollevamento del peso tensore costituiscono la prova più convincente della reale esistenza delle discontinuità, come insite alle proprietà elastiche delle due sostanze prese qui in particolare esame, perchè, se cause disturbatrici di natura estranea al processo elastico possono provocare l'abbassamento di un grande peso tensore, è assai difficile concepire un effetto delle medesime cause nel senso di un innalzamento.

I fenomeni di cui ci siamo occupati non appaiono in altri metalli: si rivela per alcuni un andamento ondulato nelle linee rappresentatrici, e talvolta con indizio di periodicità, o qualche punto angoloso che accenna ad una variazione brusca di regime; laddove per altri, come per l'oro ad es., si manifesta un andamento continuo e molto regolare; tuttavia non può

escludersi che le anomalie avanti studiate siano d'indole generale e che si rendano sensibili in alcuni casi soltanto, vuoi per maggiore ampiezza dell'effetto, vuoi per minore frequenza. Ma, anche se circoscritti a pochi metalli, non possono non attirare l'attenzione dei fisici, perchè il loro esame potrebbe mettere in nuova luce alcune modalità delle imperfezioni elastiche facendone risaltare il carattere dinamico in rapporto con una periodica instabilità di struttura lungo il processo di deformazione.

Non si può dare termine a questa comunicazione senza tener conto delle interessanti ricerche di Barkhausen van der Pol Jr., Weiss e Ribaud [1], dalle quali risulta che per gl' intervalli di forze magnetizzanti cui corrispondono valori assai elevati della suscettività differenziale nei cicli magnetici, ossia nelle fasi in cui si determina la irreversibilità dei processi magnetici, il ferro, la magnetite e le leghe di ferro e nichel accusano variazioni brusche accidentali dell'intensità magnetica, pur con variazioni continue nel campo. E risulta del pari, dallo studio esteso ed accurato di van der Pol, che le correnti indotte rivelatrici del fenomeno si producono simultaneamente per punti a notevole distanza lungo il filo sottoposto ad esperienza, e che le discontinuità non mancano quando intervengono ripetuti cicli di trazione, torsione, o flessione atti a modificare il magnetismo residuo dei fili in esame. I fenomeni da me studiati, qualora siano posti in rapporto con quelli dei quali ora si è fatto cenno, acquistano un particolare rilievo: non voglio con ciò dire che le discontinuità nel processo elastico, perchè riscontrate da da me in modo netto in due metalli magnetici, si debbano essenzialmente alle proprietà magnetiche; ritengo piuttosto che le modalità accertate nel caso del magnetismo dipendano dalle condizioni elastiche reali, che nelle mie esperienze si rendono manifeste anche in assenza di forze magnetiche; ed in tale ipotesi il fatto scoperto da Barkhausen, col carattere di una struttura *quantistica* dell'energia messa in giuoco nei processi irreversibili, sarebbe da considerare come appartenente alla vasta categoria dei fenomeni magnetoelastici.

[1] V. Journ. de Phys., T. III, p. 74, 1922.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota I del Corrispondente LUIGI BERZOLARI.

In un lavoro, di prossima pubblicazione, *Sulle cubiche gobbe invarianti simultanee rispetto ad un gruppo ottaedrico di collineazioni quaternarie,* mi si è presentato un particolare complesso del quarto grado, il quale gode della proprietà che tutti i suoi coni hanno carattere lemniscatico, cioè sono dotati di tre generatrici ad un tempo doppie e d'inflessione. Il complesso risulta determinato, e può generarsi direttamente in modo assai semplice, quando sian dati tre complessi lineari a due a due in involuzione.

In questa Nota e nelle successive espongo, insieme con tale generazione, quelle proprietà del complesso che hanno maggior legame col lavoro cui ho accennato; inoltre alcune osservazioni generali sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due involutorii. Figura tra essi un altro complesso del quarto grado, che pure ammette una semplice generazione geometrica.

1. Com'è noto, le equazioni di tre complessi lineari K_1, K_2, K_3 a due a due in involuzione si possono scrivere, in coordinate p_{ik} di Cayley-Plücker, sotto la forma

$$(1)\quad K_1 \equiv p_{12} - p_{34} = 0\ ,\quad K_2 \equiv p_{31} - p_{24} = 0\ ,\quad K_3 \equiv i(p_{31} + p_{24}) = 0\ ,$$

nell'ultima delle quali il fattore $i(=\sqrt{-1})$ è posto per la simmetria di alcune tra le formole che seguiranno.

Le rette comuni ai tre complessi costituiscono un regolo S della quadrica Q che ha per equazione locale

$$(2)\qquad Q \equiv x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0\ ,$$

e per equazione in coordinate di rette tangenti

$$(3)\qquad K \equiv K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 0\ .$$

Le coppie di direttrici $d_1 d'_1$, $d_2 d'_2$, $d_3 d'_3$ delle congruenze lineari, in cui ordinatamente si tagliano K_2 e K_3, K_3 e K_1, K_1 e K_2, appartengono all'altro regolo S' di Q, e in esso si separano a due a due armonicamente.

Una generatrice qualunque di S′ ha equazioni della forma

$$(4)\qquad x_1 - \lambda x_4 = 0 \quad , \quad \lambda x_2 - x_3 = 0 ,$$

dove λ è un parametro. In particolare, le $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ possono rispettivamente rappresentarsi con le equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} x_2 = 0 , \quad x_4 = 0 ; \quad x_1 = 0 , \quad x_3 = 0 ; \\ x_2 - x_3 = 0 , \quad x_1 - x_4 = 0 ; \quad x_2 + x_3 = 0 , \quad x_1 + x_4 = 0 ; \\ x_2 - i x_3 = 0 , \quad x_1 + i x_4 = 0 ; \quad x_2 + i x_3 = 0 , \quad x_1 - i x_4 = 0 . \end{cases}$$

La polarità rispetto a Q è permutabile con ciascuna delle polarità nulle

$$(8)\quad \begin{cases} (i+1)\,x_1 + (1+\sqrt{3})\,x_4 = 0 , \quad (i-1)\,x_2 + (1-\sqrt{3})\,x_3 = 0 ; \\ (i-1)\,x_1 - (1-\sqrt{3})\,x_4 = 0 , \quad (i+1)\,x_2 - (1+\sqrt{3})\,x_3 = 0 ; \\ (i-1)\,x_1 + (1-\sqrt{3})\,x_4 = 0 , \quad (i+1)\,x_2 + (1+\sqrt{3})\,x_3 = 0 ; \\ (i+1)\,x_1 - (1+\sqrt{3})\,x_4 = 0 , \quad (i-1)\,x_2 - (1-\sqrt{3})\,x_3 = 0 , \end{cases}$$

e le e_1', e_2', e_3', e_4' con quelle che si deducono dalle precedenti cambiando segno a $\sqrt{3}$.

3. Ciò posto, in questo numero e nei due successivi conviene, per il seguito, premettere alcune osservazioni a proposito di certe quadriche, che restano determinate ogniqualvolta con i complessi K_1, K_2, K_3 sia assegnata anche una retta r.

Anzitutto, le reciproche di r rispetto ai complessi della rete individuata da K_1, K_2, K_3 formano una congruenza lineare passante per r, di cui sono direttrici le due rette di S appoggiate alla stessa r. Se dunque si costruiscono le reciproche di r rispetto a K_1, K_2, K_3, la quadrica R da esse determinata (che si dirà *quadrica corrispondente ad r*) incontrerà Q secondo due generatrici di S e due di S′.

Dicendo p_{ik} le coordinate di r, si trova che la quadrica è rappresentata da

$$(9)\quad \begin{aligned} R \equiv (p_{12} - p_{34})\,(p_{23}\,p_{31}\,x_1^2 + p_{14}\,p_{24}\,x_2^2 - p_{31}\,p_{14}\,x_3^2 - p_{23}\,p_{24}\,x_4^2) \\ + (p_{12}^2 - p_{34}^2)\,(p_{31}\,x_3\,x_1 - p_{24}\,x_2\,x_4) \\ + (p_{31}^2 - p_{24}^2)\,(p_{14}\,x_2\,x_3 - p_{34}\,x_1\,x_2 - p_{23}\,x_1\,x_4 - p_{12}\,x_3\,x_4) = 0 . \end{aligned}$$

In luogo di r considerando la sua reciproca r' rispetto a Q, la quadrica R′ ad essa corrispondente ha un'equazione $R' = 0$, che si deduce dalla precedente scambiando tra loro p_{12} e p_{34} nel quadrinomio per il quale è moltiplicata la differenza $p_{31}^2 - p_{24}^2$ [1]. Ne segue l'identità

$$R - R' = (p_{12} - p_{34})\,(p_{31}^2 - p_{24}^2)\,Q ,$$

[1] Per un'osservazione fatta al n. 1, le rette reciproche di r' rispetto a K_1, K_2, K_3 sono altresì le coniugate di r nelle involuzioni rigate che hanno per assi $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$.

epperò:

Le quadriche R, R′ *corrispondenti a due rette* r, r' *reciproche rispetto a* Q *si tagliano in un quadrilatero, determinando un fascio-schiera al quale appartiene* Q.

4. Essendo ancora r una retta di coordinate p_{ik}, le quadriche A_1, A_2, A_3 passanti per r e risp. per le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ tagliano ulteriormente Q nelle due generatrici di S che si appoggiano ad r, e sono altresì i luoghi delle rette reciproche di r rispetto ai complessi lineari dei fasci determinati da K_2 e K_3, K_3 e K_1, K_1 e K_2. Esse hanno per equazioni

$$A_1 \equiv -2(p_{34}\, x_1 x_2 - p_{14}\, x_2 x_3 + p_{23}\, x_1 x_4 + p_{12}\, x_3 x_4) = 0\,,$$

$$A_2 \equiv p_{23}\, x_1^2 + p_{14}\, x_2^2 - p_{14}\, x_3^2 - p_{23}\, x_4^2 + (p_{31} - p_{24})\,(x_1 x_2 - x_3 x_4) + (p_{12} + p_{34})\,(x_1 x_3 - x_2 x_4) = 0\,,$$

determinate da K_1, K_2, K_3, ed i suoi prodotti per queste sono rispettivamente le involuzioni rigate che hanno per assi le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$.

2. Assumendo S′ come campo binario, risulta in esso determinata una *involuzione sizigetica* J, della quale $d_i\, d_i'$ sono gli elementi doppi, e che ha l'equazione

$$\lambda^4 + 6\,\varrho\,\lambda^2 + 1 = 0\,, \tag{6}$$

dove λ è il parametro che entra nelle equazioni (4) d'una generatrice di S′, e ϱ è un altro parametro, da cui sono determinati i singoli gruppi dell'involuzione.

Appartengono a questa tre gruppi armonici $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_1' a_2' a_3' a_4'$, $a_1'' a_2'' a_3'' a_4''$, e due gruppi equianarmonici $e_1 e_2 e_3 e_4$, $e_1' e_2' e_3' e_4'$.

Convenendo che i tre primi siano rispettivamente *coordinati* alle coppie $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$, nel senso che queste in S′ separino armonicamente le due coppie di generatrici coniugate in quei gruppi armonici, le generatrici di tali gruppi si possono rappresentare con le equazioni

$$(7)\quad \begin{cases} \pm\sqrt{2}\, x_1 + (i-1)\, x_4 = 0\,, & \pm\sqrt{2}\, x_2 - (i+1)\, x_3 = 0\,; \\ \pm\sqrt{2}\, x_1 + (i+1)\, x_4 = 0\,, & \pm\sqrt{2}\, x_2 - (i-1)\, x_3 = 0\,; \\ i\, x_1 - (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & i\, x_2 - (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \\ i\, x_1 + (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & i\, x_2 + (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \\ x_1 - (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & x_2 + (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \\ x_1 + (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & x_2 - (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,, \end{cases}$$

dove due generatrici coniugate d'un gruppo armonico si ottengono scegliendo, nelle rispettive equazioni, una volta i segni superiori e un'altra i segni inferiori.

Per i due gruppi equianarmonici si riterrà che le generatrici e_i ed e'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ siano tra loro *omologhe* secondo una proprietà che recentemente ho rilevata [1]. Le rette e_1, e_2, e_3, e_4 si possono allora rappresentare con le equazioni

$$A_3 \equiv i\,[p_{23} x_1^2 - p_{14} x_2^2 - p_{14} x_3^2 + p_{23} x_4^2 + (p_{31} + p_{24})(x_1 x_2 - x_3 x_4) + (p_{12} + p_{34})(x_1 x_3 + x_2 x_4)] = 0 .$$

Se al posto di r si assume la sua reciproca r' rispetto a Q, si ottengono similmente tre quadriche A'_1, A'_2, A'_3, le cui equazioni si deducono dalle precedenti scambiando tra loro p_{12} e p_{34} e inoltre, nella seconda e terza equazione, mutando segno al termine contenente la differenza $x_1 x_2 - x_3 x_4$. Si hanno quindi le identità

$$A_1 - A'_1 = 2(p_{12} - p_{34})\,Q ,$$
$$A_2 - A'_2 = 2(p_{31} - p_{24})\,Q ,$$
$$A_3 - A'_3 = 2i(p_{31} + p_{24})\,Q ,$$

donde segue che *le quadriche* A_1 *e* A'_1, A_2 *e* A'_2, A_3 *e* A'_3 *determinano tre fasci-schiere, che tutti contengono* Q.

La rete individuata da A_1, A_2, A_3 ha per basi la retta r e le due generatrici di S appoggiate ad r (e ad r').

Quattro altre quadriche $F_1, \dots, F_4$ della stessa rete sono quelle passanti per r e per le coppie di rette $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$, ed hanno le equazioni

$$F_1 \equiv -A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad F_2 \equiv A_1 - A_2 + A_3 = 0 ,$$
$$F_3 \equiv A_1 + A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad F_4 \equiv A_1 + A_2 + A_3 = 0 .$$

5. Quando r, e perciò anche r', sta in K_i, e in questo caso soltanto, le R, R', A_i e A'_i $(i = 1, 2, 3)$ coincidono, dando luogo ad una quadrica che, come luogo e come inviluppo, è apolare a Q. Se, ad es., r ed r' stanno

[1] Ved. la mia Nota *Sulle forme binarie del quarto ordine*, Rend. del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 54 (1921), p 225. La proprietà consiste in ciò, che tra gli elementi dei due gruppi equianarmonici contenuti in un'involuzione sizigetica si può, in un modo solo, stabilire una corrispondenza biunivoca tale, che ogni elemento dell'un gruppo e i tre non omologhi dell'altro costituiscono alla loro volta un gruppo equianarmonico. Sono così otto i nuovi gruppi equianarmonici che si possono costruire con gli elementi dei due gruppi considerati.

Di due elementi omologhi, ognuno è pure il gruppo polare di prim'ordine dell'altro rispetto alla sestupla degli elementi doppi dell'involuzione. Due tali elementi omologhi sono inoltre uniti per una delle otto omografie cicliche a periodo 3 (a due a due inverse) appartenenti al gruppo ottaedrico delle omografie che trasformano la detta sestupla in sè.

in K_1, le due coppie di piani del fascio-schiera determinato da tale quadrica e da Q sono rappresentate da

$$R \pm Q(p_{31}^2 - p_{24}^2)\sqrt{-p_{31}p_{24}} = 0,$$

cosicchè, entro il fascio, separano armonicamente R e Q [1].

Una retta che appartenga ad uno dei complessi K_1, K_2, K_3 è inoltre tale che incontra Q e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti. Lo stesso avviene di ogni retta r tangente a Q, in quanto essa tocca nello stesso punto anche la quadrica corrispondente. Infatti, dicendo y il punto di contatto di r con Q, la quadrica corrispondente ad r ha in comune con Q due generatrici di S' (tra loro distinte, a meno che y non giaccia sopra una delle rette e_i, e'_i) e la generatrice di S uscente da y, contata due volte. Nè vi sono altre rette che godano della proprietà indicata; in altri termini:

Tutte e sole le rette dei complessi K_1, K_2, K_3 *e quelle tangenti alla quadrica* Q *hanno la proprietà d'incontrare* Q *e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti.*

Se invece r, e quindi anche r', incontra una delle rette d_i, d'_i, e solamente in questo caso, ognuna delle R, R', A_i, A'_i si scompone in due piani. Di tali piani, uno fa parte di R e di A_i, un altro fa parte di R' e di A'_i, e gli altri due piani di cui constano R ed A_i, come pure gli altri due di cui constano R' ed A'_i, incontrano l'altra delle d_i, d'_i in uno stesso punto. Se infatti r ed r' tagliano, per es., d'_1, sicchè $p_{31} = 0$, e si pone

$$\alpha = p_{23}x_1 + p_{12}x_3 \quad , \quad \beta = p_{14}x_2 - p_{12}x_4 ,$$

$$\alpha' = p_{23}x_1 + p_{34}x_3 \quad , \quad \beta' = p_{14}x_2 - p_{34}x_4 ,$$

si ha, a meno di fattori costanti,

$$A_1 = \alpha\beta \quad , \quad A'_1 = \alpha'\beta' ,$$

$$R = \beta\,[p_{14}p_{24}\alpha - p_{12}(p_{12} - p_{34})\beta'] ,$$

$$R' = \beta'\,[p_{12}p_{24}\alpha' + p_{23}(p_{12} - p_{34})\beta] .$$

[1] Ciascuna delle R e Q è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra. Le due quadriche sono pertanto, secondo la denominazione di R. Sturm, *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt*: cfr., anche per citazioni, la mia Nota *Sul significato geometrico di alcune identità lineari tra quadrati di forme algebriche*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 51 (1918), p. 431.

Meccanica. — *Sull'influenza del rapporto tra volume e superficie nelle aeronavi.* Nota del Corrisp. G. A. Crocco.

In una precedente Nota [1] abbiamo già indicato l'influenza del rapporto tra volume e superficie nelle aeronavi per quanto ha tratto alla *potenza motrice* necessaria ad imprimer loro una data velocità ed ai *consumi* di combustibile necessarî a navigare un dato numero di ore. Abbiamo anche mostrato come il conseguente guadagno in forza ascensionale, che si ottiene accrescendo le dimensioni, sia in parte assorbito da necessità strutturali; ma come entro certi limiti, che abbiamo precisato, rimanga anche in parte disponibile sotto forma di carico utile.

Ma il rapporto tra volume e superficie, e cioè le dimensioni, influiscono su altre caratteristiche secondarie delle aeronavi, che nella presente Nota vogliamo succintamente indicare.

Anzitutto è da osservare che insieme col peso delle istallazioni motrici variano i pesi di tutti i loro *servizi accessorî* come ponti, sospensioni, ricambi, equipaggi; ed insieme col peso del combustibile variano le capacità occorrenti a contenerlo e rifornirlo, e i consumi di gas leggero necessarî ad ogni viaggio: in altri termini tutta la complessa organizzazione dei *rifornimenti* e relativi impianti fissi occorrenti a un regolare traffico di viaggiatori.

Variano anche nella stessa vantaggiosa misura quelle *istallazioni di bordo* e fisse preconizzate per ridurre o sopprimere i detti rifornimenti di gas, e cioè per ricuperare sotto forma di zavorra acquea il peso di combustibile consumato durante il viaggio, o per far variare termicamente la corrispondente forza ascensionale necessaria a sostenerlo: e ciò perchè l'entità di entrambi questi dispositivi è proporzionale alla potenza motrice, e quindi la percentuale di peso occorrente diminuisce col crescere delle dimensioni sino a raggiungere aliquote praticamente realizzabili.

Altri guadagni dipendono direttamente dalla superficie dell'involucro, e si ripercuotono sia sul peso della struttura sia sulla sua solidità locale, sia su fenomeni connessi.

[1] Questi Rendiconti: seduta 2 aprile 1922. *Limiti strutturali ed economici nelle dimensioni delle aeronavi.*

Il peso degli involucri va infatti suddiviso in due parti: una dedicata alla resistenza, l'altra alla ermeticità. La prima cresce in misura maggiore che non i volumi e cagiona pertanto un maggiore assorbimento della forza ascensionale residua, segnalato nella nostra precedente Nota: la seconda potrebbe a rigore variare in ragione della superficie e costituire termine di compenso. Ciò noi avevamo supposto alcuni anni or sono; ma non abbiamo creduto, da un punto di vista pratico, di ammettere nella citata Nota; ove invece si è fatta l'ipotesi che la parte di peso di stoffa, gomma, *baudruche* o vernice, riserbata a trattenere il gas non rimanga unitariamente costante, ma cresca in ragion diretta delle dimensioni. Questa ipotesi conduce a una maggiore *robustezza locale* del tessuto, a una maggiore durata, e a una minore *perdita osmotica* unitaria.

La perdita osmotica unitaria è da ritenere infatti connessa colla quantità di sostanza impermeabilizzante, nel senso che i tempi necessarî a far passare attraverso l'unità di superficie un determinato volume di gas sono proporzionali alla quantità suddetta. Ne segue che considerando l'insieme della superficie di un dirigibile, costruito secondo la precedente ipotesi, le percentuali di lavaggio occorrenti giornalmente per mantenere una determinata purezza variano in ragione inversa del quadrato delle dimensioni. Così ad esempio in un dirigibile da 12 tonnellate di forza ascensionale l'idrogeno dovrebbe venire completamente rinnovato in poco più di un mese per mantenere la purezza di $^{19}/_{20}$; mentre in un dirigibile da 120 tonnellate il rinnovamento si richiederebbe ogni cinque mesi circa. Ad una più grossa unità, per es. 500 tonnellate, basterebbe un rinnovamento annuo. Per il gas elio i tempi di rinnovamento sono circa doppî.

Dipendono altresì dalla superficie dell'involucro gli appesantimenti eventuali dovuti durante il viaggio alle *vicissitudini meteorologiche*, come pioggia e neve. Il sopraccarico dovuto alla pioggia che può ad esempio raggiungere il 16 % in un tipo da 12 tonn., discende a meno del 9 % in un tipo da 120 tonn., e al 5 % in un tipo da 500. Così dicasi delle variazioni di forza ascensionale dovute a *brusche variazioni di temperatura*. A parità di durata del fenomeno, esse comunicano alla massa del gas, attraverso la superficie dell'involucro, una quantità di calore proporzionale alla superficie, e quindi una variazione di temperatura, e conseguentemente di forza ascensionale, in ragione diretta del rapporto tra superficie e volume, cioè in ragione inversa delle dimensioni.

Un effetto analogo producono *le raffiche del vento* durante la marcia. A parità d'intensità e di durata, esse comunicano alla massa del dirigibile una quantità di moto proporzionale alla sezion maestra, e quindi una variazione di velocità in ragione inversa delle dimensioni. La sensibilità dell'aeronave alle perturbazioni esterne è perciò tanto minore quanto maggiore è il suo tonnellaggio. Contemporaneamente decresce nella stessa misura relativa

la *sensibilità al governo dinamico*, e l'azione frenante dell'aria nell'arresto e nella discesa. Cosicchè le grandi navi aeree sono necessariamente più lente nelle manovre; e la manovra dinamica cede sempre più posto a quella statica.

La variazione delle reazioni dell'aria proporzionalmente alle superfici conducendo a forze perturbatrici e di impennaggio varianti col quadrato delle dimensioni, ne segue che a parità di velocità i pesi degli organi di irrigidimento e di impennaggio variano come il cubo delle dimensioni, epperciò la loro percentuale rimane costante; ed i momenti di questi pesi variano come la quarta potenza ed esigono strutture più pesanti.

Ma per quanto concerne i *momenti delle forze perturbatrici e stabilizzanti*, come per i momenti dovuti alle azioni dei timoni di quota e di evoluzione, risulta invece una variazione secondo il cubo delle dimensioni; onde il peso della parte delle strutture destinata a resistere a questi momenti varia anch'esso come i cubi, e la sua percentuale si mantiene costante; secondo quanto abbiamo supposto nella nostra precedente Nota. Ne deriva anche che la *stabilità di marcia* migliora, poichè le coppie statiche variano in misura maggiore dei volumi: e il valore della « velocità critica » diviene sempre più elevato col crescere delle dimensioni.

Così anche i *tempi di oscillazione*, sempre a parità di velocità di marcia, variano in ragion diretta delle dimensioni.

Una singolare menzione meritano, per la vitalità e la pratica delle grandi aeronavi, le manovre di *atterraggio* e di *ormeggio*. Mentre infatti tali manovre sono affidate nelle piccole aeronavi al criterio dei comandanti e alla forza muscolare di allenate squadre, nelle grandi navi aeree esse si compiranno con metodi e dispositivi preparati e con forza meccanica. Ciò è reso possibile precisamente dal diminuito rapporto fra superficie e volume, sia per le maggiori disponibilità relative ed assolute sia per quanto passiamo a chiarire. Venendo infatti a connettersi col suolo, dopo avere annullato la sua velocità di marcia relativamente ad esso, il dirigibile rimarrà soggetto a due forze antagoniste: da una parte quella del vento che tenta spingerlo nella sua direzione ed in direzioni ad essa normali, e d'altra parte quella delle connessioni, facenti capo alla struttura, ed opponentisi alla spinta del vento. La prima, a parità di assetto, varia come la superficie presentata; cosicchè se le connessioni non generano momenti importanti, tutto il peso di esse e della parte resistente della struttura varia come la forza agente e guadagna in rapporto alla forza ascensionale disponibile.

Il vantaggio diviene ancor più evidente se — come è prevedibile — le connessioni stesse siano principalmente attivate da una determinata aliquota di forza ascensionale resa libera al momento opportuno.

In particolare nell'*atterraggio*, lanciato il cavo di manovra e lasciatolo fissare a punti predisposti del terreno, si creerà su di questo una tensione

proporzionale alla forza del vento che consenta al dirigibile di assumere una stabile posizione di aerostato frenato e di venir richiamato a terra senza eventualità di abbattimenti o di urti. La robustezza del cavo sarà quindi proporzionale alla forza del vento e, a parità di lunghezza, anche il suo peso.

Così anche il peso dei verricelli di ricupero istallati a bordo e degli organi motori relativi. Così anche il peso della *zavorra d'atterraggio* predisposta a prora in corrispondenza dell'attacco del cavo, e gettata a momento prestabilito per creare su di questo una forza ascensionale statica. in aggiunta alla eventuale dinamica.

Queste considerazioni sono per certo di natura teorica, giacchè se la lunghezza del cavo fosse proporzionale alle dimensioni. il suo peso varierebbe per contro proporzionalmente ai volumi, e così l'ingombro dei verricelli e l'energia motrice totale necessaria a recuperarlo. Così anche se si generassero momenti di flessione importanti. questi attenuerebbero i benefici innanzi indicati. I quali, come in ogni altro ramo della meccanica, richiedono un'applicazione accorta e geniale.

Ad analoghe osservazioni dà luogo la manovra di *ormeggio*. Se non c'è ricovero, essa consiste nel connettere il dirigibile sul terreno in modo che possa liberamente orientarsi al vento. Il sistema più sicuro è quello di fissarlo per tutta la sua lunghezza a una piattaforma girevole, provvista di mezzi per orientarsi (1). Le connessioni con questa piattaforma a parità di vento seguono allora la legge delle superfici. Così anche le forze *ascensionali d'ormeggio* eventualmente rese libere per attivare le connessioni suddette.

Se c'è ricovero, la piattaforma girevole. anzichè presentarsi al vento, è destinata a disporsi secondo l'asse del ricovero per portarvi il dirigibile e questo può dunque venire investito di fianco. Anche in tal caso. e sempre a parità d'intensità di vento, le forze abbattenti sono proporzionali alle superficie: cosicchè l'entità delle connessioni e le forze ascensionali d'ormeggio variano nella stessa misura. Così anche i sovraccarichi di cui debba eventualmente zavorrarsi la piattaforma.

Per quanto concerne i momenti flettenti generati nelle suddette manovre, esse seguono in generale la legge dei cubi, epperciò non appesantiscono le aliquote delle strutture che sono destinate ad assorbirne i tormenti.

Può quindi asserirsi, concludendo, che anche nella maggior parte delle questioni accessorie, ma vitali per la pratica delle aeronavi, l'aumento delle dimensioni si presenta vantaggioso: e, là dove non c'è vantaggio, esso non trova ostacoli di principio.

(1) Ideata nel 1913: Brev. n. 138061.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* [1]. Nota I del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

Già da varî anni, io ho rinvenuto dei cristalli di celestite in due distinte località della provincia di Messina, e, precisamente, nel calcare a corallari delle colline di Tremonti, dove la celestite tappezza le pareti di alcune piccole geodi, ed i calcari del vallone Marro, presso Rometta, nei quali i cristallini di celestite furono trovati impiantati sui coralli fossili.

La celestite, tanto frequente nella formazione solfifera siciliana, non è stata, finora, almeno per quanto io so, trovata nella provincia di Messina. Mi è sembrato, perciò, opportuno descrivere brevemente i cristalli di Tremonti e del vallone Marro, non solo perchè appartengono a due nuove località, ma anche per le loro condizioni di giacitura, ben diverse da quelle solite della celestite siciliana, che non è stata mai osservata nei polipai fossili.

Celestite di Tremonti.

Le colline di Tremonti e di S. Iachino si ergono a qualche chilometro a nord di Messina, e la loro ossatura è costituita da un calcare, ora friabile, ora compatto o concrezionato, del quale si sono occupati varî autori, e, più particolarmente, G. Seguenza, Cortese e Baldacci, i quali tutti concordemente lo riferiscono al pliocene, piano Astiano, per i fossili tipici che in essi si rinvengono e che caratterizzano la *facies* corallina del Messinese.

La fauna fossile, abbondantissima, rinvenuta dagli autori predetti in questo calcare, oltre che dai numerosi brachiopodi e dai polipai, avanti citati, è costituita anche, in minor proporzione, da molluschi lamellibranchi e gasteropodi, da un echino frequentissimo — *Stirechinus Scillae*, Desh. — e da numerosi denti di squali. In certe zone tali fossili sono quasi gli esclusivi componenti della roccia.

Più importante ancora, per la fauna che racchiude, è la zona ove il calcare si presenta a *facies* esclusivamente corallina e la roccia è costituita quasi per intero da coralli sia Cariofillacei che Trocociatacei sparsi qua e là

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

nella massa; sia Eupsammidi e Stilinacei, che, con le loro ramificazioni intrecciantesi, costituiscono vere barriere coralline fossili [1].

In questi calcari frequentemente si rinvengono delle geodette, le cui pareti sono tappezzate da piccoli ed acuti cristallini di calcite, i quali si mostrano anche nell'interno delle conchiglie dei brachiopodi, che durante la sedimentazione non furono ricolmate dalla roccia che forma il sedimento. In questi fossili si osserva sovente l'apparecchio brachiale ricoperto da un'elegante patina di limpidi cristallini di calcite.

Sulle pareti di alcune geodette del calcare a corallarî osservai, associati ai soliti cristallini di calcite, altri individui alquanto più grossi, differenti per forma e splendore. Questi richiamarono ben presto la mia attenzione ed un sommario esame sulla loro forma tipica e sul loro aspetto fisico, mi indicò subito trattarsi di celestite, il che fu confermato dallo studio cristallografico.

Questa forma non frequente di giacimento, in cui la celestina si ritrova in polipai fossili, fu osservata per la prima volta a Monte Viale, ed il nostro giacimento di Tremonti presenta con quello di Monte Viale somiglianze spiccatissime, come risulta dalle descrizioni che il Reuss [2] ed il Billows [3], fra gli altri, hanno dato del giacimento vicentino.

I cristalli di celestina di Tremonti sono incolori, dotati di lucentezza vitrea e semi-trasparenti. Nella direzione dell'asse a misurano da 2 a 7 mm.: il loro spessore varia da 1 a 3 mm. Sono generalmente impiantati per un estremo dell'asse a, e più di rado adagiati longitudinalmente sulle pareti delle geodine nelle quali si rinvengono. Frequente è quell'ingrossamento all'estremità libera di a, osservato spesso sia nei cristalli dei giacimenti solfiferi siciliani che di altre località.

Le forme osservate sono le seguenti: $\{011\}$ e $\{110\}$, costanti; $\{102\}$ rarissima; $\{001\}$ trovata una sola volta. Si hanno, perciò, le combinazioni:

$$\{011\}\ \{110\} - \{011\}\ \{110\}\ \{102\} - \{011\}\ \{110\}\ \{001\}.$$

[1] La fauna di questo piano del pliocene messinese, come quella degli altri piani, fu esaurientemente studiata da G. Seguenza (*Stud. stratigraf. s. formaz. pliocen. d. It. merid.*, loc. cit., pp. 181 e seg.), il quale illustrò in monografie separate i corallarî (*Disquisizioni paleontologiche intorno ai corallarî fossili delle rocce terziarie del distretto di Messina.* Mem. d. R. Acc. d. Sc. d. Torino, vol. II, Torino, 1864), ed i brachiopodi (*Studi paleontologici sui Brachiopodi terziari dell'Italia meridionale.* Boll. Malac. ital., Pisa, 1873, e *Paleontologia malacologica delle rocce terziarie del distretto di Messina: Classe Brachiopodi.* Mem. d. Soc. It. d. Sc. Nat., Milano, 1865); e nelle cui opere sovente è citata la località di Tremonti, di S. Iachino e delle regioni circostanti.

[2] Reuss, *Die fossilen Anthozoen der Schichten von Castel Gomberto.* Denkschr. k. Akad. d. Wiss., vol. 28, Wien, 1868.

[3] Billows, *Sulla celestite di Monte Viale nel Vicentino.* Rivista di Min. e Crist. ital., vol. XXXI.

Nel cristallo che presentava quest'ultima, fu notata anche una faccetta strettissima, riflettente un' immagine semplice, sbiadita, a contorni indefiniti, e lievemente spostata dalla zona [100]. In base all'angolo che essa fa con (011), si può dedurre che essa può identificarsi con il prisma }023{, trovato da Websky nel 1857 nella celestite di Pschow, ma non rinvenuta finora nei cristalli di Sicilia:

$$(011):(023) = 10^\circ\, 51' \text{ mis.} \qquad 11^\circ\, 31\, {}^1/_2{}' \text{ calc.}$$

In migliore accordo con la misura starebbe il simbolo, poco probabile, di una forma nuova }0.15.22{, per la quale si calcola

$$(011):(0.15.22) = 10^\circ\, 53'.$$

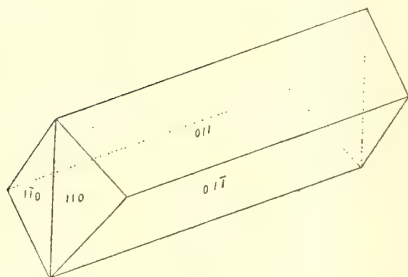
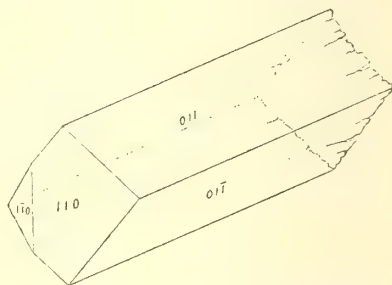



FIG. 1. FIG. 2.

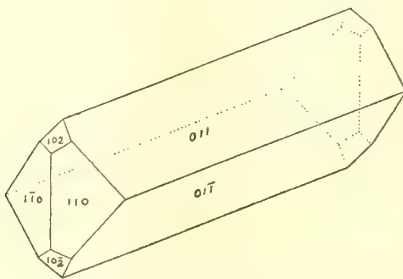



FIG. 3.

I cristalli di celestite di Tremonti sono sempre allungati nella direzione dell'asse a e prismatici secondo il prisma }011{: le figure 1-3 dànno un' idea del loro habitus.

Spesso le faccie presentano la poliedria e le altre irregolarità ben note nella celestite. I cristallini più piccoli permettono, però, qualche volta, esatte misure, le quali vanno particolarmente d'accordo con le costanti di Dauber, come risulta dalla seguente tabella:

ANGOLI	Numero	MISURATI		CALCOLATI						
		Limiti	Medie	Sicilia					Herrengrund	Monte Viale
				Ranfaldi	Dauber	Auerbach	Kokskarou	Di Franco	Auerbach	Billows
		° ′ ° ′	° ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	(1) ° ′ ″
(011):(01$\bar{1}$)	5	75.49 — 76. 8	75.57	—	75.53.27	75.53.42	75.52.34	75.51.10	75.59.43	76.—.41
(110):(1$\bar{1}$0)	4	75.40 — 75.43	75.42	—	75.45.42	75.56.—	75.56.10	75.57. 6	75.50. 1	76. 5.49
(102):(011)	1	—	61.39	61.39.12	61.40.25	61.37.57	61.38.34	61.39. 8	61.35.51	61.31.46
(102):(110)	2	59.49 — 59.51	59.50	59.51. 5	59.51.57	59.58. 3	59.57.44	59.57.50	59.56.42	60. 6.14
(011):(110)	5	60.47 — 61.26	61 6	61. 4.25	61. 2.20	60.58.44	60.58.25	60.57.47	61. 2. 9	60.56.45

Gli angoli calcolati da me sono dedotti dal rapporto parametrico

$$a:b:c = 0.7771:1:1,2811.$$

Biologia. — *I processi di inibizione differenziale nella regione olfattoria degli Anfibi Anuri* [1]. Nota del dott. GIULIO COTRONEI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nei miei studî, finora pubblicati, sulle « larve a litio » degli Anfibi, ho già reso noto che la regione olfattoria come appartenente alla parte precordale della testa risente intensamente il processo inibitore. Ricordo che fin dal 1915 pubblicai che la tendenza a fondersi delle narici è il fatto che prima s' incontra nella seriazione degli stadî malformativi.

Con la presente Nota mi propongo di riferire pochi reperti i quali, però, debbono servire a vieppiù avvalorare l' interpretazione causale da me data alla morfologia della testa, interpretazione causale che secondo me non è poi altro che il collegamento obbiettivo dei varî fatti studiati nelle loro relazioni.

Ho descritto altrove come il fatto essenziale che caratterizza il cervello precordale di quelle larve, le quali avendo risentito l'azione paralizzante del cloruro di litio hanno tuttavia potuto proseguire nel loro sviluppo, sia la dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini: le divisioni cellu-

(1) Il Billows, loc. cit., per l'angolo (011):(01$\bar{1}$) dà il valore teorico di 75° 47′ 33″. Dal calcolo fondato sulle costanti definitive dello stesso Billows a me risulta invece il valore sopra riportato.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

lari, infatti, sono state ostacolate meno che le funzioni di movimento e di secrezione. La conseguenza è una minore occupazione di spazio, necessario sia al normale sviluppo cerebrale, sia allo sviluppo di quelle parti che vengono *sostenute e dirette* dallo sviluppo del cervello precordale. E specialmente nello studiare il vestibolo boccale delle larve a litio degli Anfibi Anuri che ho potuto far risaltare con la massima evidenza questi processi di inibizione differenziale (Cotronei, 1915, 1919, 1921).

I medesimi processi di inibizione differenziale dovuti alla stessa natura causale si riscontrano nello studio dell'organo olfattivo.

Gradatamente, seriando i varî reperti si osserva, data la minore occupazione di spazio cefalico, che gli organi olfattivi sono spinti sulla linea mediana presentando uno sbocco comune, si verifica cioè l'inibizione progressiva della parte mediale anteriore.

Anche però, la parte caudale presenta prontamente i processi inibitivi. Infatti io non riscontro la comunicazione naso-boccale (coane). In un dato grado del processo malformativo, quando però c'è ancora una notevole parte del territorio olfattorio, io osservo la inibizione del nervo olfattivo [1], che secondo alcuni autori, in base a ricerche sperimentali, avrebbe, non origine cerebrale, ma dall'abbozzo olfattivo.

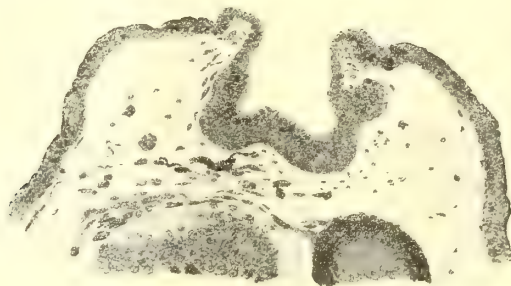



Fig. 1. — Larva a litio di *Bufo vulgaris* (Koristka obbiettivo 4 oculare 1). La figura mostra un solo occhio laterale per il fatto che la sezione è obliqua.

La fig. 1 mostra una sezione frontale ma piuttosto obliqua lateralmente di una larva a litio di *Bufo vulgaris* nella quale i due occhi sono ancora laterali, ma la regione olfattiva è già notevolmente interessata dal processo malformativo. Si vede un organo olfattivo mediano derivato dalla fusione dei due abbozzi olfattivi. Si osserva lateralmente differenziata l'appendice

[1] La inibizione dei nervi olfattivi come quella dei nervi ottici, che ho anche riscontrato in determinate larve a litio, mettono in evidenza l'importanza delle condizioni di spazio per la produzione delle fibre nervose sopra tutto, per il nostro studio, nella regione mediana del cervello anteriore.

laterale che è inoltre *una formazione dorsale* dell'abbozzo olfattivo. Nella figura si scorge solo l'appendice di un lato; non si vede, ma è ugualmente differenziata, l'appendice dell'altro lato. Richiamo l'attenzione del lettore sul fatto che è assai bene evidente la cavità dell'organo olfattivo mediano.

La fig. 2 si riferisce a una larva a litio ciclope di *Rana esculenta*.

Fig. 2. Larva a litio di *Rana esculenta* in cui il processo malformativo è più accentuato estendendosi alla regione oculare con la produzione della ciclopia: gli organi uditivi invece sono in posizione normale (Koristka obbiettivo 4 oculare 4 comp la figura è riprodotta ridotta di $^1/_3$).

Il processo malformativo anche nella regione olfattiva, è molto più avanzato che nel caso precedente. Si nota tuttavia una fossetta olfattiva mediana la quale si spinge quasi a contatto con l'occhio ciclopico. Il fatto che voglio ancora far risaltare è la presenza della cavità in questo ridottissimo organo olfattivo.

Il massimo grado malformativo, prima della completa inibizione dell'organo in esame, è una piccola fossetta nella quale io non riesco a scorgere differenziamenti olfattivi; (c'è soltanto epitelio indifferente laterale).

La genesi di questi varî gradi malformativi va considerata tenendo presente i varî stadî di sviluppo normale dell'organo olfattivo. A misura che il cervello precordale si va estendendo dall'apice della corda dorsale in avanti, l'abbozzo olfattivo può occupare lo spazio che è stato *conquistato* dal cervello precordale, che agisce come un tubo turgido e quindi di sostegno: si verifica pertanto nei varî gradi di malformazione cerebrale precordale una graduale inibizione nell'organo olfattorio mediale e anche caudale ventrale

essendo le parti laterali spostate sulla linea mediana per la inibizione di spazio apicale e mediano.

Ritengo inoltre di vedere nelle malformazioni dell'organo olfattivo un comportamento molto differente circa i processi morfogenetici elementari di Ruffini che non nel cervello precordale.

La Marchetti ha, a parer mio, esaurientemente dimostrato che anche nello sviluppo dell'abbozzo olfattivo si attuano i processi morfogenetici elementari di Ruffini; ora i miei reperti avanti descritti nei quali si nota la conservazione di una cavità, mi sembra che dimostrino che il movimento e la secrezione cellulare non sono stati ostacolati come nel cervello precordale.

Le brevi osservazioni e considerazioni esposte nella presente Nota servono vieppiù ad accertare l'influenza direttrice del cervello precordale sugli organi circostanti, e a fare risaltare il ritmo delle condizioni di tempo e di luogo per lo sviluppo organico.

Da principio è il cervello precordale che deve subito occupare il maggior spazio possibile e l'ottiene, sopratutto con le funzioni di movimento e di secrezione (con la produzione di liquido encefalico). Questo tubo turgido e dilatato può ora dar modo agli altri organi di svilupparsi. In questi organi che sono così *diretti*, i processi morfogenetici sono meno ostacolati perchè essi entravano in azione più tardi che non quando più agiva l'azione paralizzante. *Le inibizioni che in essi si riscontrano sono pertanto più passive.*

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 7 maggio 1922.

Archivio italiano di anatomia e di embriologia, vol. XVIII dedicato al prof. Giulio Chiarugi dai suoi discepoli nel XXXV anno del suo insegnamento. Firenze, 1922. 8°, pp. I-XXVIII, 1-575.

Bruttini A. — Ramassage et utilisation des déchets et résidus pour l'alimentation de l'homme et des animaux pour les engrais et les industries agricoles (1914-1920). Rome, 1922. 8°, pp. 1-336.

D'Aquino L. — Il fondamento, il contenuto, le conseguenze della nuova teoria della relatività. Napoli, 1922 8°, pp. 1-18.

D'Aquino L. — La decomposizione delle righe spettrali per effetto del campo elettrico. Napoli, 1922. 8°, pp. 1-86.

De Montessus de Ballore R. — Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1922. 4°, pp. 1-37.

Enriques F. — Per la storia della logica. Bologna, s. d. 8°, pp. 1-296.

Favaro A. — L'attività del sole nell'anno 1921. Catania, 1922. 8°, pp. 1-20.

Gallardo A. — Algunos casos de teratologia vegetal, fasciacion, proliferación y sinantia (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VI, pp. 37-45). Buenos Aires, 1898. 8°.

Gallardo A. — XXV° aniversario de la Sociedad cientifica Argentina (Extr. da « Anales de la Sociedad cientifica Argentina », tomo XLIV). Buenos Aires, 1897. 8°, pp. 1-15.

Gallardo A. — Bipolaridad de la división celular (Extr. de la « Revista del Museo de la Plata », tomo XVI). Buenos Aires, 1909. 8°, pp. 1-31.

Gallardo A. — El mirmecofilo sinfilo Fustiger elegans Raffray (Extr. da « Physis », tomo II, pp. 254-257). Buenos Aires, 1916. 8°.

Gallardo A. — Essai d'interprétation des figures karyokinètiques (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo V, pp. 11-21). Buenos Aires, 1896, 8°.

Gallardo A. — Hormigas del Neuquèn y Rio Negro (Extr da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXX, pp. 243-254). Buenos Aires, 1919. 8°.

Gallardo A. — Hormigas dolicoderinas de los Andes de Mendoza (Extr. da « Physis », tomo IV). Buenos Aires, 1918. 8°, pp. 1-4.

Gallardo A. — Invernada de las orugas de Morpho Catenarius (Perry) (Extr. da « Anales de la Sociedad Cientifica Argentina », tomo LXIV). Buenos Aires, 1908. 8°, pp. 1-6.

Gallardo A. — La destrucción de la langosta por sus enemigos naturales (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXIII. pp. 155-165). Buenos Aires, 1912. 8°.

Gallardo A. — La division de la cellule phénomène bipolaire de caractère électro-colloïdal (Sonderabdr. aus dem « Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen », Band XXVIII, pp. 125-156). Leipzig, 1909. 8°.

Gallardo A. — La riqueza de la flora Argentina (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VIII, pp. 239-339) Buenos Aires, 1902. 8°.

Gallardo A. — Las hormigas de la Republica Argentina subfamilia dorilinas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural deBuenos Aires », tomo XXX, pp. 281-410), Buenos Aires, 1920. 8°.

Gallardo A. — Las hormigas de la Republica Argentina subfamilia ponerinas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXX). Buenos Aires, 1918. 8°, pp. 1-111.

Gallardo A. — Les études zoologiques dans la République Argentine (Extr. da la « Revista de la Universitad de Buenos Aires », tomo VIII). Buenos Aires, 1907. 8°, pp. 1-14.

Gallardo A. — Notas acerca de la hormiga Trachymyrmex Pruinosus Emery (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVIII, pp. 241-252). Buenos Aires, 1916. 8°.

Gallardo A. — Notas complementarias sobre las Dolicoderinas Argentinas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVIII, pp. 257-261). Buenos Aires, 1916. 8°.

Gallardo A. — Notas de teratologia vegetal (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo IX, pp. 525-537). Buenos Aires, 1903. 8°.

Gallardo A. — Notas sobre la anatomia del aparato espiracular, laringe y hioides de dos delfines: Phocaena Dioptrica Lahille y Lagenorhynehus Fitzroge (Waterhouse) Flower (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXIV, pp. 235-246). Buenos Aires, 1913. 8°.

Gallardo A. — Notes systématiques et éthologiques sur les fourmis attines de la République Argentine (Extr. da Anales del Museo Nacional de Historia natural de Buenos Aires », tome XXVII, pp. 317-344). Buenos Aires, 1916. 8°.

Gallardo A. — Observaciones morfologicas y estadisticas sobre alcunas anomalias de Digitalis purpurea L. (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VII, pp. 37-72). Buenos Aires, 1900. 8°.

Gallardo A. — Observaciones sobre algunas hormigas de la Republica Argentina (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVII). Buenos Aires, 1915. 8°, pp. 1-35.

Helguero (de) F. — In memoriam (Benini, Gallardo, Reina, Sergi, Volterra). Roma, 1911. 8°, pp. 1-35.

Ivaldi G. — Sull'errore fondamentale della teoria della relatività del tempo e dello spazio di Alberto Einstein (Estr. dalla « Rivista L'Industria », vol. XXXV). Varese, 1921. 8°, pp. 1-11.

Mascarelli L. — Commemorazione di Giacomo Ciamician letta nell'Aula Magna del R. Politecnico di Torino. Torino, 1922 8°, pp. 1-21.

Meschinelli L. — Su di un frutto fossile dell'eocene inferiore vicentino (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXX, p. 1025-1032). Venezia, 1921. 8°.

Picard E. — La vie et l'oeuvre de Pierre Duhem Paris, 1921. 4°, pp. 1-44.

Quartaroli. — Elementi di chimica generale ed inorganica. Pisa, 1922, 8°, pp. 1-305.

Saenz Peña R. — Escritos y discursos. Buenos Aires, 1914. 8°, pp. 1-476.

Ungania E. — Einstein e la sua relatività, esame critico: l'errore copernicano. Bologna, 1922. 8°, pp. I-IX, 1-210.

Ungania E. — Sulla teoria elettromicroenergonica. Bologna, 1922. 16°, pp. 1-15.

Velasca de Pauda M. — Nota sobre las energias no integrables (Congreso de Oporto). Madrid, 1921. 8°, pp. 1-9.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876 84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 11°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 11°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, Fasc. 9°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 8°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XVIII. Fasc. 12°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 11°

Seduta del 3 giugno 1922.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le **6** pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 4 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1922.

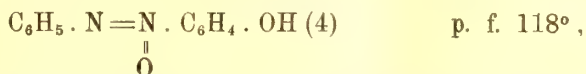
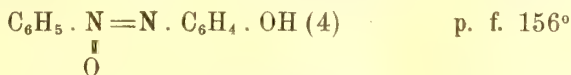
V. VOLTERRA, Vicepresidente.

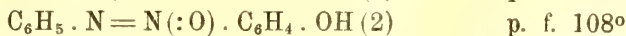
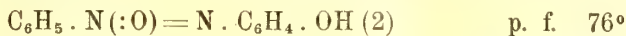
MEMORIE E NOTE DI SOCI

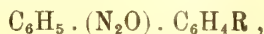
Chimica. — *Ricerche sopra gli azossifenoli.* Nota del Socio A. ANGELI, DINO BIGIAVI e GINO CARRARA.

Come è stato dimostrato in precedenti lavori, anche gli azossifenoli, al pari degli azossiderivati in genere, possono presentarsi nelle due forme isomere (1): nel caso particolare del para-azossifenolo si hanno i due termini:

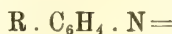
$$\underset{\substack{\| \\ O}}{C_6H_5 . N} = N . C_6H_4 . OH\ (4) \qquad \text{p. f. } 156^\circ$$

$$C_6H_5 . N = \underset{\substack{\| \\ O}}{N} . C_6H_4 . OH\ (4) \qquad \text{p. f. } 118^\circ ,$$

il primo dei quali è identico a quello che E. Bamberger ottenne in piccolissima quantità per azione degli alcali sopra il nitrosobenzolo. Senza dubbio sono da considerarsi come isomeri e non già stereoisomeri, come dapprima supponeva Bamberger (2), anche i due derivati ortosostituiti:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4 . OH\ (2) \qquad \text{p. f. } 76^\circ$$
$$C_6H_5 . N = N(:O) . C_6H_4 . OH\ (2) \qquad \text{p. f. } 108^\circ$$

Nel caso degli azossiderivati

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4R ,$$

(1) R. A. L., *23* (1914), 1° sem., pag. 557; R. A. L., *23* (1914), 2° sem., pag. 30.
(2) Berliner Berichte, *35* (1902), pag. 1614.

dove R rappresenta gruppi alcoolici od aromatici, alogeni, residuo nitrico, solfonico, carbossilico ecc., in generale riesce molto facile lo stabilire in modo rigoroso a quale dei due atomi di azoto è fissato l'atomo di ossigeno, studiando principalmente il loro comportamento rispetto al bromo oppure all'acido nitrico: a parità di condizioni, infatti, reagisce con questi reattivi, per dare prodotti di sostituzione, solamente l'anello aromatico congiunto all'azoto trivalente,

$$R . C_6H_4 . N=$$

Ma nel caso degli azossifenoli e dei loro eteri questo metodo non si può applicare, giacchè, al pari dell'atomo di azoto trivalente, anche l'atomo di ossigeno, sotto forma di ossidrile ovvero di ossietile:

$$R . C_6H_4 . N= \qquad R . C_6H_4 . O — ,$$

può favorire per conto suo l'entrata dell'alogeno ovvero dei gruppi nitrici nell'anello aromatico al quale l'O — è immediatamente congiunto. Perciò, contrariamente a quanto si verifica per le altre coppie di azossicomposti isomeri, tutti e due i p-azossifenoli reagiscono con bromo; e lo stesso fanno anche i loro eteri etilici, che entrambi forniscono monobromoderivati, i quali per caso fondono quasi alla stessa temperatura. Solamente studiando i prodotti di demolizione dei derivati così ottenuti, è possibile anche in questi casi risalire alla struttura del composto di partenza, come p. es. venne fatto per il p-azossifenolo p. f. 156°:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4 . OH$$

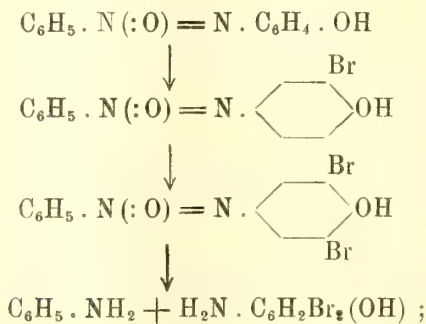
$$\downarrow$$

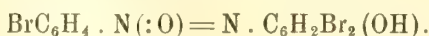
$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_3(Br)OH$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_2(Br)_2OH$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . NH_2 + H_2N . C_6H_2Br_2(OH) ;$$

abbiamo potuto verificare in tal modo che anche il tribromo-p-azossifenolo per riduzione fornisce lo stesso bibromoparaamminofenolo (assieme con p-bromoanilina) e perciò la sua struttura è la seguente:

$$BrC_6H_4 . N(:O) = N . C_6H_2Br_2(OH).$$

Ma se per questo mezzo è sempre possibile fissare in modo sicuro la struttura degli azossifenoli, si deve anche riconoscere che il metodo è lungo,

laborioso, e richiede nella maggior parte dei casi quantità di prodotti piuttosto rilevanti. Questa difficoltà viene accresciuta dal fatto che spesso riesce oltremodo difficile separare un isomero dall'altro: infatti, se torna agevole isolare per cristallizzazione dai solventi l'isomero meno solubile, alle volte è quasi impossibile ottenere allo stato di purezza l'isomero più solubile ed a più basso punto di fusione, che simultaneamente si forma; esso si separa sempre con quantità variabili del primo e, ripetendo le cristallizzazioni frazionate, non è raro il caso di pervenire nuovamente alla forma che fonde più alta, mentre l'isomero che si tenta di isolare finisce per rimanere in gran parte sciolto nelle acque madri. In alcuni casi ci fu possibile superare questa difficoltà trasformando gli azossifenoli nei corrispondenti derivati benzoilici, che in generale cristallizzano bene e sono meno solubili dei prodotti di partenza. Infatti solamente in questo modo fu possibile isolare allo stato di purezza il p-azossifenolo p. f. 118°. Anche questo metodo però è molto laborioso e richiede del pari che si possa disporre di una certa quantità di prodotti.

Per tutte queste ragioni, allo scopo di poter isolare oppure di meglio caratterizzare entrambi gli isomeri in modo più sollecito, ed anche operando su piccole quantità di sostanza, abbiamo giudicato opportuno di intraprendere una ricerca sistematica sopra il comportamento, rispetto ad altri reattivi, di alcuni azossifenoli di costituzione ben definita.

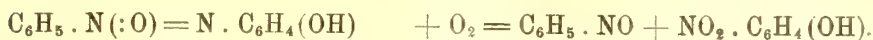
A tale scopo, ancora lo scorso anno [1], venne studiata l'azione del permanganato sopra la soluzione alcalina dei due p-azossifenoli: nel mentre entrambi, per azione prolungata di questo reattivo, finiscono col trasformarsi in gran parte nel sale di isodiazobenzolo:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4(OH) \longrightarrow C_6H_5 . N = N(OH) \ ,$$

si è potuto osservare che essi differiscono in modo notevole rispetto alla resistenza che presentano all'ossidante. Dei due isomeri infatti:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4(OH) \qquad C_6H_5 . N = N(:O) . C_6H_4(OH) \ ,$$

solamente il primo (p. f. 156°) scolora immediatamente il permanganato e nello stesso tempo si avverte l'odore caratteristico del nitrosobenzolo e successivamente quello di nitrobenzolo. Ad ossidazione finita, nel liquido, di color giallo dorato, si riscontra isodiazobenzolo: il color giallo molto probabilmente è dovuto ad una reazione secondaria che procede nel seguente modo:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4(OH) \quad + O_2 = C_6H_5 . NO + NO_2 . C_6H_4(OH).$$

(1) G., *51* (1921), I, pag. 35.

Così si spiega la formazione di nitrosobenzolo, mentre la colorazione del liquido sarebbe dovuta a piccole quantità di p-nitrofenolo.

Il secondo isomero invece (p. f. 118°) presenta una grande resistenza all'azione del permanganato; l'ossidazione non è completa se non dopo alcune ore. Questo diverso comportamento presenta quindi un mezzo molto facile per avere allo stato puro l'isomero che fonde a 118°, la separazione del quale, come si è detto, si era potuta realizzare prima solamente per mezzo dei derivati benzoilici.

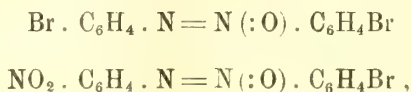
Naturalmente in questo modo si ha l'inconveniente di perdere, perchè viene distrutta dall'ossidante, una porzione non piccola dall'isomero p. f. 156°, mentre l'altra parte del medesimo si ottiene facilmente, perchè, essendo meno solubile, è il primo che ricristallizza dai solventi ed allo stato quasi puro.

Questa differenza di comportamento, rispetto agli ossidanti, degli azossifenoli isomeri rammenta le differenze, che a suo tempo vennero descritte, che gli isomeri monosostituiti presentano all'azione degli alogeni e dell'acido nitrico. Nel caso p. es. dei due derivati parasostituiti:

$$\begin{matrix} O = N \,.\, C_6H_5 \\ \| \\ N \,.\, C_6H_4Br \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} N \,.\, C_6H_5 \\ \| \\ O = N \,.\, C_6H_4Br \end{matrix} \;,$$

solamente il secondo fornisce con tutta facilità i corrispondenti prodotti del pari parasostituiti:

$$Br \,.\, C_6H_4 \,.\, N = N\,(:O) \,.\, C_6H_4Br$$

$$NO_2 \,.\, C_6H_4 \,.\, N = N\,(:O) \,.\, C_6H_4Br \;,$$

mentre il primo rimane inalterato. Ciò dimostra che l'atomo di ossigeno dell'azossigruppo, nel mentre protegge dall'azione degli alogeni e dell'acido nitrico l'anello aromatico unito allo stesso atomo di azoto, esercita altresì una azione protettiva sullo stesso anello rispetto all'azione del permanganato.

Le nostre ulteriori ricerche hanno confermato che questa influenza protettiva, esercitata dall'atomo di ossigeno dell'azossigruppo, si estende anche all'azione dell'acido nitroso, quando si operi a freddo e in soluzione diluita; in questo caso però si ha il vantaggio, che nel mentre uno degli azossifenoli isomeri si riottiene inalterato, l'altro, invece di esser distrutto, viene trasformato in un nitroderivato, che, in generale, si può facilmente caratterizzare: la reazione procede rapida e pochi decigrammi del prodotto di partenza sono per lo più sufficienti per fissarne senz'altro la struttura.

Abbiamo incominciato con lo stabilire che l'azobenzolo (1), l'azossibenzolo (2), l'etere etilico del p-α-azossifenolo (3), il p β-azossifenolo (4) ed il p-nitrofenolo (5) rimangono inalterati, quando alla loro soluzione in acido

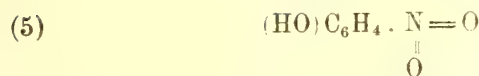
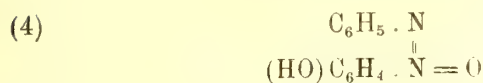
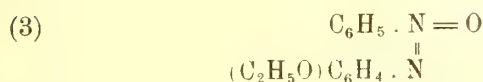
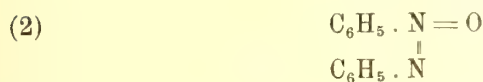
acetico glaciale si aggiunge poco per volta e a freddo un eccesso di nitrito sodico:

(1) $C_6H_5 . N = N . C_6H_5$

(2) $C_6H_5 . N = O$
$\quad \| $
$C_6H_5 . N$

(3) $C_6H_5 . N = O$
$\quad \| $
$(C_2H_5O) C_6H_4 . N$

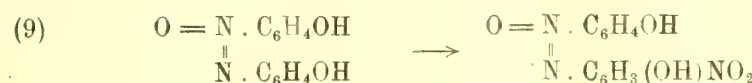
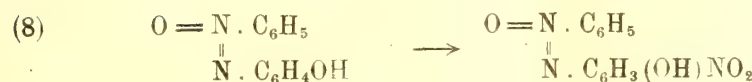
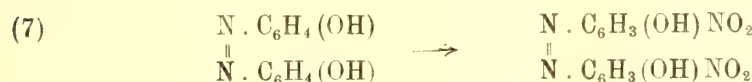
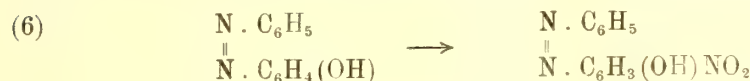
(4) $C_6H_5 . N$
$\quad \| $
$(HO) C_6H_4 . N = O$

(5) $(HO) C_6H_4 . N = O$
$\quad \| $
O

Invece abbiamo potuto constatare che il p-ossiazobenzolo (6), il p-p'-diossiazobenzolo (7), il p-α-azossifenolo (8) ed il p-p'-diossiazossibenzolo (9), a parità di trattamento, forniscono con tutta facilità nitroderivati, nei quali i gruppi nitrici occupano sempre le posizioni orto rispetto all'ossidrile:

(6) $N . C_6H_5 \| N . C_6H_4(OH) \longrightarrow N . C_6H_5 \| N . C_6H_3(OH)NO_2$

(7) $N . C_6H_4(OH) \| N . C_6H_4(OH) \longrightarrow N . C_6H_3(OH)NO_2 \| N . C_6H_3(OH)NO_2$

(8) $O = N . C_6H_5 \| N . C_6H_4OH \longrightarrow O = N . C_6H_5 \| N . C_6H_3(OH)NO_2$

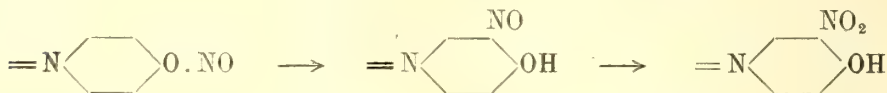
(9) $O = N . C_6H_4OH \| N . C_6H_4OH \longrightarrow O = N . C_6H_4OH \| N . C_6H_3(OH)NO_2$

Ciò dimostra dunque che, *per reagire con l'acido nitroso, non è sufficiente che l'anello aromatico contenga un ossidrile*, ma che *invece è necessario che l'anello che porta l'ossidrile sia altresì congiunto ad un atomo di azoto trivalente*:

$$= N \langle C_6H_4 \rangle OH \longrightarrow = N \langle C_6H_3(NO_2) \rangle OH$$

Si tratta dunque di una influenza concomitante del gruppo ossidrilico e dell'atomo di azoto situati in posizione para ad uno stesso anello aromatico.

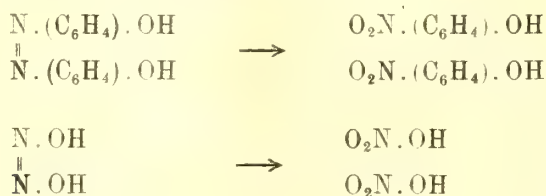
Diremo poi fino da ora che è poco probabile che in una prima fase si formi un nitrito all'azoto e che poi il residuo nitroso migri all'atomo di carbonio in posizione meta, perchè, come è noto, queste migrazioni si compiono sempre verso le posizioni orto oppure para: in questo caso il residuo nitroso potrebbe tutto al più portarsi prima all'ossidrile situato in para e da qui migrare successivamente alla posizione orto.

Molto più semplice è invece l'ammettere la formazione di un etere nitroso che poi passa a o-nitrosoderivato ed infine a nitrocomposto:

$$=N\langle C_6H_4 \rangle O.NO \longrightarrow =N\langle C_6H_3(NO) \rangle OH \longrightarrow =N\langle C_6H_3(NO_2) \rangle OH$$

Accenneremo infine che, nell'azione dell'acido nitroso sopra il p-p'-diossiazobenzolo, assieme al dinitroderivato si forma anche del p-nitrofenolo e ciò dimostra che in questo caso il reattivo ha agito in parte come ossidante.

Questa ossidazione corrisponde perfettamente a quella che subisce l'acido iponitroso per azione del permanganato, operando prima in soluzione alcalina (formazione di nitrito), e successivamente in soluzione acida (formazione di nitrato); e procede in modo conforme anche alla regola stabilita da uno di noi, secondo la quale i due sostituenti situati in posizione para ovvero orto di un anello aromatico si comportano in alcune reazioni come se fossero congiunti direttamente fra di loro [1], vale a dire come se l'anello aromatico non esistesse: in questo caso il p-diossiazobenzolo corrisponde all'acido iponitroso ed il p-nitrofenolo all'acido nitrico:

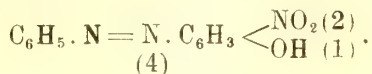
$$\begin{matrix} N.(C_6H_4).OH \\ \| \\ N.(C_6H_4).OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} O_2N.(C_6H_4).OH \\ O_2N.(C_6H_4).OH \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} N.OH \\ \| \\ N.OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} O_2N.OH \\ O_2N.OH \end{matrix}$$

Dati sperimentali.

L'azocomposto oppure l'azossiderivato vennero sciolti a freddo nella sufficiente quantità di acido acetico glaciale e quindi trattati, a temperatura ordinaria, poco per volta con nitrito sodico in polvere: per ogni ossidrile contenuto nel composto di partenza, si presero circa due molecole di nitrito. Ad operazione finita, per aggiunta di acqua, si ottengono, a seconda dei casi, o il prodotto di partenza inalterato ovvero i prodotti di reazione, che facilmente si possono purificare ed identificare.

[1] R. A. L., *26* (1917), 1° sem., pp. 480 e segg.

Nitroazofenolo ottenuto dal p-azofenolo:

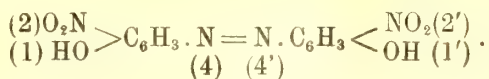
$$C_6H_5 . N = \underset{(4)}{N} . C_6H_3 < \begin{matrix} NO_2 (2) \\ OH \ (1) \end{matrix} .$$

Solubile in alcali e riprecipitabile con acido carbonico dalla soluzione alcalina; poco solubile in ligroina, molto in benzolo da cui cristallizza in pagliuzze giallo-chiare che fondono nettamente a 128°.

Gr. 0,0723 di sostanza dettero cc³. 10,6 di N, a 12°,5 e 749 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9O_3N_3$
N	17,28 %	17,28 %

È identico a quello ottenuto da Nölting [1] per azione del cloruro di diazobenzolo sopra l'orto-nitrofenolo e da Hewitt [2] per nitrazione con acido nitrico a 40° del p-azofenolo.

Dinitrodiossiazobenzolo ottenuto dal p-p'-diossiazobenzolo:

$$\begin{matrix} (2) O_2N \\ (1) HO \end{matrix} > C_6H_3 . \underset{(4)}{N} = \underset{(4')}{N} . C_6H_3 < \begin{matrix} NO_2 (2') \\ OH \ (1') \end{matrix} .$$

Poco solubile in etere, alcool, benzolo. Cristallizza lentamente da acido acetico glaciale in aghetti giallo-verdastri lucenti che schiariscono disseccandosi e fondono con decomposizione a 236°, annerendo 3 gradi prima.

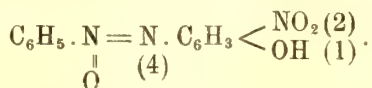
Gr. 0,1136 di sostanza dettero, a 13°,7 e 746,8 mm., cc³. 17,7 di N.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_8O_6N_4$
N	18,26 %	18,42 %

Esso è probabilmente identico a quello ottenuto da Robertson [3] per azione dell'acido nitrico concentrato sopra il p-p'-diossiazobenzolo sciolto in acido acetico, e che fonde a 240°.

Dalle acque madri acetiche, diluite con acqua, si estrae con etere il p-nitrofenolo, che dopo diverse cristallizzazioni da benzolo si ha in aghi giallo-chiari fondenti a 113°.

Nitroazossifenolo ottenuto dal p-α-azossifenolo:

$$C_6H_5 . \underset{\overset{\|}{O}}{N} = \underset{(4)}{N} . C_6H_3 < \begin{matrix} NO_2 (2) \\ OH \ (1) \end{matrix} .$$

Molto solubile in alcool e benzolo. Cristallizza da benzolo in cristallini tabulari romboedrici giallo-verdastri trasparenti, che dànno una polvere

(1) Berliner Berichte. *20*. 2997.
(2) Soc., *77*, pag. 99.
(3) Soc., *103*, pag. 1473.

giallo-chiara. Dall'alcool cristallizza in minute pagliuzze verdastre. Fonde nettamente a 125°.

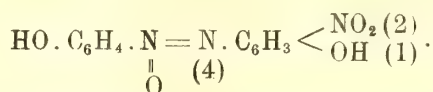
I. Gr. 0,1127 di sostanza dettero, a 11° e 758 mm., cc³. 15,3 di N.

II. Gr. 0,0608 di sostanza dettero, a 11°,5 e 750 mm., cc³. 8,3 di N.

III. Gr. 0,1572 di sostanza dettero gr. 0,0528 di H_2O e gr. 0,3223 di CO_2.

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $C_{12}H_9O_4N_3$
C	—	—	55,93 %	55,58 %
H	—	—	3,75 %	3,5 %
N	16,26 %	16,19 %	—	16,22 %

Nitrodiossiazossibenzolo ottenuto dal p-p'-diossiazossibenzolo:

$$HO.C_6H_4.\underset{\overset{\|}{O}}{N}=N.C_6H_3<\begin{matrix}NO_2\,(2)\\ OH\;\;(1)\end{matrix} \quad (4)$$

Aghi giallo-rossastri brillanti dall'alcool diluito 60 %, minute pagliuzze rossastre dall'alcool concentrato, che dànno una polvere aranciata. Fonde, con forte decomposizione, a 193°.

Gr. 0,1376 di sostanza dettero, a 12° e 745,5 mm., cc³. 17,92 di N.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9O_5N_3$
N	15,30 %	15,27 %

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota II del Corrispond. Luigi Berzolari.

6. Consideriamo una generatrice del regolo S', e tra le sue equazioni (4) e la (6) eliminiamo x_1 e x_3. Scrivendo che l'equazione risultante è identicamente soddisfatta rispetto ad x_2 e x_4, si ottiene per λ l'unica equazione quadratica

$$(10) \qquad p_{31}(p_{12}-p_{34})\lambda^2-(p_{31}^2-p_{24}^2)\lambda-p_{24}(p_{12}-p_{34})=0\,,$$

il cui discriminante, eguagliato a zero, dà

$$(11) \qquad (p_{31}^2-p_{24}^2)^2+4\,p_{31}\,p_{24}\,(p_{12}-p_{34})^2=0\,,$$

ossia

$$(11') \qquad \Theta\equiv K_2^2K_3^2+K_3^2K_1^2+K_1^2K_2^2=0\,.$$

Si ha così il teorema:

La quadrica corrispondente ad una retta generica dello spazio incontra la quadrica Q *lungo due generatrici del regolo* S *e due del regolo* S'. *Il luogo delle rette, le cui quadriche corrispondenti passano per due generatrici di* S' *tra loro coincidenti è il complesso* Θ *di quarto grado, rappresentato dall'equazione* (11') [1].

7. Lo studio dei coni del complesso Θ è strettamente collegato con la considerazione di altri complessi di primo e secondo grado, che pure risultano determinati dai dati complessi K_1, K_2, K_3.

Anzitutto osserviamo che le generatrici di S' segnano sulle coppie di rette $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$ altrettante omografie, e i luoghi delle rette da cui queste vengono proiettate secondo fasci involutori sono risp. i quattro complessi lineari $L_1, \dots, L_4$ [2] aventi le equazioni

$$L_1 \equiv -K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ , \ L_2 \equiv K_1 - K_2 + K_3 = 0 \ ,$$
$$L_3 \equiv \ K_1 + K_2 - K_3 = 0 \ , \ L_4 \equiv K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ .$$

I medesimi complessi sono pure risp. i luoghi delle ∞^1 congruenze lineari che hanno per direttrici due rette di S' separate armonicamente da $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$.

Essi appartengono alla rete individuata da K_1, K_2, K_3, ma non sono in involuzione nè con questi nè tra loro.

La polarità rispetto a Q e la polarità nulla determinata da L_i sono permutabili, ed hanno per prodotto l'involuzione rigata di assi $e_i e_i'$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

In secondo luogo, si considerino le quattro quadriche $F_1, \dots, F_4$ determinate (n. 4) da una retta r con le coppie di rette $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$; dicasi y $(y_1, \dots, y_4)$ un loro punto comune giacente su r, e si denotino ancora con K_1, K_2, K_3 i risultati che si ottengono sostituendo nei primi membri delle (1), al posto delle coordinate correnti, le coordinate di r. Sussiste l'identità

$$K_1 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_1}{\partial x_i} + K_2 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_2}{\partial x_i} - K_3 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_3}{\partial x_i} = 0 \, ,$$

col mezzo della quale, se si rappresentano con $(F_1) = 0, \dots, (F_4) = 0$ i piani tangenti in y a $F_1 = 0, \dots, F_4 = 0$, si riconosce che si può porre

$$(F_3) \equiv (K_2 + K_3)(F_1) + (K_1 + K_3)(F_2) \, ,$$
$$(F_4) \equiv (K_1 - K_3)(F_1) + (K_2 - K_3)(F_2) \, .$$

[1] Perchè invece coincidano le generatrici di S contenute nella quadrica corrispondente ad una retta, è ovvio esser necessario e sufficiente che questa retta sia tangente a Q.

[2] Cfr. la mia Nota citata *Sul significato geometrico*, ...

Se ne deduce la proprietà:

Se in un punto qualunque di r si conducono i piani tangenti alle quadriche $F_1, \ldots, F_4$, il loro birapporto non dipende dal punto, ma soltanto dalla retta r.

Inoltre:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è armonico, è formato dai tre complessi di secondo grado

$$H_1 \equiv K_2^2 + K_3^2 - 2K_1^2 = 0 \ , \ H_2 \equiv K_3^2 + K_1^2 - 2K_2^2 = 0 \ ,$$
$$H_3 \equiv K_1^2 + K_2^2 - 2K_3^2 = 0 \ ,$$

e, denotando con ε una radice cubica imaginaria dell'unità:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è equianarmonico, consta dei due complessi di secondo grado

$$K' \equiv K_1^2 + \varepsilon^2 K_2^2 + \varepsilon K_3^2 = 0 \ , \ K'' \equiv K_1^2 + \varepsilon K_2^2 + \varepsilon^2 K_3^2 = 0 \, .$$

8. Le equazioni dei cinque complessi quadratici del num. precedente mostrano che questi hanno per rette doppie tutte le generatrici di S.

Ciascuno dei complessi H_1, H_2, H_3 ha inoltre per rette doppie risp. le coppie di generatrici $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ di S': infatti per es. il cono di H_1 che ha per vertice un punto y di d_1 si riduce al piano tangente in y a Q, contato due volte.

Per una nota regola ([1]), le rette singolari, ad es., di H_1 si ottengono dalle equazioni

$$(p_{12} - p_{34})^2 = 0 \ , \ p_{31} p_{24} = 0 \, .$$

Sicchè le rette singolari dei complessi H_1, H_2, H_3 costituiscono le congruenze lineari speciali (ognuna contata due volte) aventi per direttrici risp. le coppie di rette $d_1 d_1', d_2 d_2', d_3 d_3'$ (ossia le congruenze formate dalle tangenti a Q nei punti di tali rette). I medesimi complessi hanno dunque, nella classificazione di Weiler e di Segre ([2]), la caratteristica [(111) (11) 1].

I complessi K' e K'' sono entrambi di caratteristica [(111) 111], e posseggono un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari fondamentali, cioè tutti quelli che passano per il regolo S', e inoltre tre complessi fondamentali isolati, che sono K_1, K_2, K_3.

Sì per l'uno che per l'altro la congruenza delle rette singolari si scompone nelle quattro congruenze lineari rappresentate dalle coppie di equazioni

$$p_{12} - p_{34} \pm (i-1) p_{24} = 0 \, , \quad p_{31} - i p_{24} = 0 \, ;$$
$$p_{12} - p_{34} \pm (i+1) p_{24} = 0 \, , \quad p_{31} + i p_{24} = 0 \, ,$$

([1]) Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, Zweite Abth., herausg. von F. Klein, Leipzig 1869, pag. 296.

([2]) Weiler, *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*, Math. Ann., Bd. 7 (1874), pag. 145; Segre, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, vol. 36 (1885), pag. 87.

ossia in quelle che hanno per direttrici $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$. La quaterna focale consta per K′ delle rette $e_1, \dots, e_4$, per K″ delle $e'_1, \dots, e'_4$ [1]: vale a dire, per es., il cono di K′ avente per vertice un punto di e_i si riduce al piano che dal punto proietta e'_i, contato due volte.

I coni di K′ e K″ aventi il vertice in un punto generico y di Q si spezzano in due coppie armoniche di piani, passanti per la generatrice di S che esce da y.

9. Denotando con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ le espressioni in cui si cangiano i primi membri delle (1) quando si ponga $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, le equazioni $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$ rappresentano i piani focali del punto $y\ (y_1, \dots, y_4)$ rispetto a K_1, K_2, K_3; e le equazioni

$$\Gamma_2 \pm i\Gamma_3 = 0 \quad , \quad \Gamma_3 \pm i\Gamma_1 = 0 \quad , \quad \Gamma_1 \pm i\Gamma_2 = 0$$

rappresentano i piani che da y proiettano le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$. Perciò dai numeri precedenti e dalle note proprietà della *lemniscata proiettiva* (curva del quart'ordine con tre nodi a tangenti inflessionali) [2] si deduce:

Il cono del complesso Θ avente il vertice in un punto generico y dello spazio ha tre generatrici nodali, che sono le rette condotte per y a tagliare le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$, e lungo quelle generatrici ha piani tangenti inflessionali, che sono i piani proiettanti da y le coppie stesse di rette.

I quattro piani bitangenti del cono sono i piani focali di y rispetto ai complessi lineari $L_1, \dots, L_4$; e le otto generatrici di contatto appartengono al cono circoscritto da y a Q.

Gli stessi quattro piani sono le facce di un angolo tetraedro completo, il cui « angolo quadrispigolo associato » ha per spigoli le rette che, partendo da y, si appoggiano alle coppie di rette $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$.

Il triedro diagonale comune all'angolo tetraedro e all'angolo quadrispigolo ha per spigoli le rette che escono da y e si appoggiano alle coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$.

Il cono quadrico invariante dell'angolo tetraedro (rispetto al quale questo è polare reciproco dell'angolo quadrispigolo associato) è il cono circoscritto da y a Q.

Il luogo delle rette uscenti da y e da cui gli spigoli dell'angolo quadrispigolo sono proiettati secondo quattro piani formanti un gruppo armonico, oppure un gruppo equianarmonico, si decompone nei coni di ver-

[1] Cfr. su ciò il n. 168 della citata Memoria del Segre, dove sono pure corrette varie inesattezze in cui è incorso il Weiler.

[2] Ved., anche per citazioni, le mie Note: *Sulla lemniscata proiettiva*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 37 (1904), pp. 277 e 304; *Sulla polarità rispetto ad un quadrilatero piano completo*, id., Serie II, vol. 49 (1916), pag. 463.

tice y appartenenti, nel primo caso, ai complessi H_1, H_2, H_3, *nel secondo ai complessi* K', K''.

I complessi K' *e* K'' *godono altresì della proprietà che i loro coni di vertice y hanno per piani tangenti tutti e soli i piani che tagliano le facce dell'angolo tetraedro in quattro rette formanti un gruppo equianarmonico.*

Invece l'inviluppo dei piani per y che incontrano le stesse facce in quattro rette armoniche si scompone nei coni di vertice y appartenenti ai tre complessi quadratici

$$-K_1^2+2K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2-K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2+2K_2^2-K_3^2=0\,.$$

Anche questi tre ultimi complessi sono di caratteristica [(111) (11) 1], ed hanno risp. in comune con H_1, H_2, H_3 le rette singolari e le rette doppie.

Ciascuno degli otto complessi quadratici è trasformato in sè dalla polarità rispetto a Q, come pure dalle polarità nulle dovute a K_1, K_2, K_3.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota I di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. In questa e in successive Note mostrerò che la geometria *proiettivo-differenziale* delle curve piane, fondata da Halphen [1] e sviluppata sistematicamente dal Wilczynski [2], può edificarsi nel modo più rapido e diretto, adoperando il *calcolo differenziale assoluto con una variabile* [3] ed un procedimento che si ispira a quello usato dal Fubini [4] per le varietà V_n di un S_{n+1} con $n>1$ (quindi con esclusione del caso $n=1$, di cui mi occupo). E le darò la più completa analogia con la corrispondente teoria metrica, definendo *l'arco* [5], *la curvatura*, *l'equazione intrinseca*, *la normale*, ecc., *proiettivi*.

(1) *Oeuvres*, tom. II, p. 195.

(2) *Projective diff. geom. of curves and ruled surfaces*, cap. III (Teubner, Leipzig, 1906).

(3) Che ho dato in una Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVII, p. 293, ove ho anche ricostruita la geometria *affine differenziale* delle curve piane (e sghembe, in una Nota successiva).

(4) *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tom. XLIII).

(5) Già definito da Wilczynsky: *Integral invariants in projective geometry* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. 42, an. 1917, p. 128).

2. Anzitutto riporto da loc. cit. [1] qualche cenno sul calcolo assoluto.

Sia L una legge che faccia corrispondere ad ogni funzione U di una variabile u un'altra U' di una variabile u': dico che L è *legge di covarianza* e che U è *un covariante di ordine n* (ed allora lo indico con U_n) se $U'_n = U_n\,(du : du')^n$ (n intero) per ogni trasformazione invertibile tra u e u'.

Se $n = 0$, L è legge di *invarianza* e $U = U_0$ è un *invariante*.

$U_n + V_n$, $U_n W_m$, $U_n : W_m$ sono covarianti di ordine n, $n + m$, $n - m$.

Se

$$(1) \qquad A = a_1\, du$$

è un differenziale primo e ad a_1 si fa corrispondere a'_1, ove $A' = a'_1\, du'$ è il trasformato di A, a_1 è covariante di 1° ordine, quindi a_1^n di ordine n. Lo stesso du è covariante di ordine -1, quindi $V_1\, du$ lo è di ordine 0 (invariante).

L'espressione

$$(2) \qquad U_{n+1} = dU_n/du - n\, S\, U_n\,, \qquad \text{ove} \qquad (3) \quad S = da_1/a_1\, du\,,$$

è un covariante di ordine $n + 1$ che chiamo *prima derivata covariante* di U_n rispetto ad A (e che *coincide con l'ordinaria se* $a_1 =$ *cost. o* $n = 0$). *La derivata a_2 di a_1 rispetto ad A è nulla.*

La derivazione covariante si applica ad un covariante U_n, che sia funzione razionale di altri covarianti, *con le regole del calcolo ordinario.*

Applicata nuovamente, dà la *derivata seconda* U_{n+2}, ecc.

Con le derivate covarianti di una funzione U e con a_1 si formano i *parametri differenziali* (1°, 2°, ...) di U (tutti invarianti), $U_1 : a_1$, $U_2 : a_1^2$, ...

3. Una curva piana Γ sia definita dando le coordinate (cartesiane o proiettive) omogenee di un suo punto generico P in funzione di un parametro u:

$$(4) \qquad x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u)\,.$$

Scelto che sia il fattore arbitrario di proporzionalità $h = h(u)$, insito nella definizione di coordinate omogenee, le (4) costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di una ben determinata equazione differenziale

$$(5) \qquad f''' + 3\beta f'' + 3\gamma f' + \delta = 0\,,$$

purchè Γ (nell'arco che si considera) *sia priva di flessi* (quindi anche *che non sia una retta*) come sempre supporrò.

Gli altri infiniti sistemi analoghi daranno tutte le curve collineari a Γ.

[1] Ved. nota [3] a pag. prec.

E, viceversa, una equazione del tipo (5) definisce, coi suoi sistemi fondamentali di soluzioni, una curva Γ e le sue collineari o, come suol dirsi, una curva *Γ a meno di una collineazione.*

4. Tutto ciò è ben noto. Ora la (5) può porsi, ed in infiniti modi, *sotto forma invariantiva*, sostituendo alle f', f'', f''' le derivate covarianti rispetto ad un differenziale (1) scelto ad arbitrio. Precisamente, essendo, per la (2),

$$(6) \qquad f' = f_1 \quad , \quad f'' = f_2 + \mathrm{S} f_1 \quad , \quad f''' = f_3 + 3\mathrm{S} f_2 + (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}') f_1 \qquad (\mathrm{S}' = d\mathrm{S} : du) ,$$

la (5) può scriversi

$$(5') \qquad f_3 + 3b_1 f_2 + 3c_2 f_1 + d_3 f = 0 ,$$

ove

$$(7) \qquad b_1 = \beta + \mathrm{S} \quad , \quad c_2 = \gamma + \beta\mathrm{S} + (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}')/3 \quad , \quad d_3 = \delta .$$

Ogni termine di (5′) *è covariante di 3° ordine, perchè b_1, c_2, d_3 lo sono degli ordini* 1, 2 e 3 [1]. Ciò risulta dalle loro espressioni mediante le (4):

$$(8) \qquad 3b_1 = -\frac{|x\, x_1\, x_3|}{|x\, x_1\, x_2|}, \quad 3c_2 = \frac{|x\, x_2\, x_3|}{|x\, x_1\, x_2|}, \quad d_3 = -\frac{|x_1\, x_2\, x_3|}{|x\, x_1\, x_2|}$$ [2]

che permettono di costruire la (5′) direttamente, anzichè passando per la (5).

I coefficienti di (5′) dipendono non solo da h, come quelli di (5), ma anche da A.

Normalizzando (ossia fissando) h ed A con legge intrinseca ed invariante per coll., perverremo ad un'equazione *normale*, che sarà in corrispondenza biunivoca con Γ (e le sue collineari).

Anzitutto, se si pone

$$(9) \qquad f = \lambda\varphi \quad \text{con} \quad (10) \quad \lambda = e^{-\int b_1 du} = e^{-\int \beta du} : a_1 ,$$

la (5′) si trasforma nell'altra

$$(11) \qquad \varphi_3 + 3p_2\varphi_1 + q_3\varphi = 0$$

i cui coefficienti valgono (come si vede con facile calcolo)

$$(12) \qquad p_2 = c_2 - b_1^2 - b_2 \quad , \quad q_3 = d_3 - 3b_1c_2 + 2b_1^3 - b_3$$

[1] Sicchè, per eseguire una trasformazione $u = u(u')$, basta sostituire $u(u')$ ad u nei coefficienti ed interpretare le f_1, f_2, f_3 come derivate covarianti rispetto ad A′ trasformato di A.

[2] Con $|x_r\, x_s\, x_t|$ indico il determinante di 3° ordine le cui rimanenti orizzontali si deducono dalla prima (quella scritta) cambiandovi x in y o in z; *esso è covariante di ordine $r+s+t$*. Si noti che, per le (6), $|x\, x_1\, x_2| = |x\, x'\, x''|$ ed è perciò *indipendente da* A *e diverso da zero*; esso è un primo *invariante relativo* di (5) o (5′).

e sono covarianti di ordine 2 e 3 rispetto ad A *che dipendono solo da* A [1].

Per vedere come variano variando A, confrontiamo la (11) con quella che corrisponde al particolare $A = du$: sia

$$\psi''' + 3\pi\psi' + \chi\psi = 0. \tag{13}$$

Poichè questa non è che una delle infinite forme che può assumere la (5) variando il fattore h, si deve poterla trasformare nella (11), operando su di essa come si è fatto con la (5): si trova così anzitutto un'equazione del tipo (5') con

$$b_1 = S \quad c_2 = \pi + (S^2 + S')/3 \quad , \quad d_3 = \chi, \tag{14}$$

giusta le (7); e poi la (11), ove, per le (12), sarà

$$p_2 = \pi + (S^2 - 2S')/3 \quad , \quad q_3 = \chi - 3S\pi + 3SS' - S'' - S^3 \ [2]; \tag{15}$$

Le (15) *mostrano come variano* p_2 e q_3 *in* (11) *variando* A (*quindi* S).

È importante la relazione $q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2$ che se ne deduce eliminando S [3]; perchè essendo i due membri formati *con la stessa legge*, ma rispettivamente con i coefficienti di (11) ed A e coi coefficienti di (13) e du, prova che

$$\theta_3 = q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2 \tag{16}$$

è un covariante di 3° ordine indipendente da A [4].

Dunque, *se* $\theta_3 \neq 0$ *lungo l'arco di* Γ *considerato* [5], potremo normalizzare A assumendo

$$A = a_1\, du \quad \text{con} \quad a_1 = \sqrt{\theta_3}. \tag{17}$$

La corrispondente (11) sarà la richiesta *equazione normale*. Un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito dalle coordinate omogenee

[1] *E non più da h.* Poichè se le (11), corrispondenti a due scelte diverse h', h'' di h, fossero distinte, dovrebbero potersi dedurre l'una dall'altra con una trasformazione del tipo (9) (con $\lambda = h' : h''$ o $h'' : h'$); e ciò è impossibile, perchè per ogni trasformazione (9) la (11) perde la sua forma caratteristica (mancanza del termine in φ_2). A meno che sia $\lambda =$ costante; ma in tal caso, come risulta dalle (7), i coefficienti di (11) non mutano.

[2] Si tenga presente che, per la (2), si ha successivamente $b_2 = b_1' - Sb_1 = S' - S^2$, $b_3 = b_2' - 2Sb_2 = (S'' - 2SS') - 2S(S' - S^2) = S'' - 4SS' + 2S^3$.

[3] E precisamente tra la 2ª e la $p_3 = p_2' - 2Sp_2 = \pi' - 3S\pi + 2(3SS' - S'' - S^3)/3$, che si ottiene dalla 1ª derivando covariantemente rispetto ad A.

[4] E un secondo, cfr. [6], *invariante relativo* di (5) o (5') (Laguerre).

[5] *E così supporremo sempre da ora innanzi.* Con ciò *si esclude che* Γ *sia una conica,* perchè *solo nelle coniche è* $\theta_3 = 0$ *identicamente* (Laguerre). Infatti, supposto $\theta_3 = 0$, scegliamo un $A = a_1\, du$ tale che risulti $p_2 = 0$, il che, per le (15), equivale a scegliere un S che soddisfi l'equazione di Riccati $2S' - S^2 - 3\pi = 0$. Allora risulterà $q_3 = \theta_3 = 0$ e la (11) diventerà $\varphi_3 = 0$, e poi $\varphi''' = 0$ se si cambia la u col porre $a_1 du = dv$. Ora questa ha il sistema fondamentale $x = v^2$, $y = v$, $z = 1$ che definisce una conica.

x, y, z di P, *ma col fattore h fissato* [1] *in modo intrinseco ed invariante per coll.*: le dirò *coordinate normali* di P.

5. La funzione $\sigma(u)$ il cui differenziale è (17) è l'*arco proiettivo* di Γ, nel senso che $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ è la *lunghezza proiettiva* dell'arco di Γ limitato dai punti $P_0(u_0)$ e $P(u)$ (Wilczynski). Dirò poi:

(18) $\quad K = k_1\, du \quad$ con $\quad k_1 = 3p_2 : a_1$, *angolo di contingenza*;

(19) $\quad I = K : A = 3p_2 : a_1^2$, *curvatura*;

(20) $\quad 1 : I$, *raggio di curvatura*

(*proiettivi*) di Γ in P.

I parametri differenziali (n. 2) primi e secondi delle coordinate normali x, y, z di P

$$(21) \qquad (x_1 : a_1 \;,\; y_1 : a_1 \;,\; z_1 : a_1) \quad , \quad (x_2 : a_1^2 \;,\; y_2 : a_1^2 \;,\; z_2 : a_1^2)$$

sono le coordinate di due punti T, N *intrinseci e invarianti per coll.* [2]; quindi tali saranno le rette $t = PT$, $n = PN$, sempre distinte, essendo $|x\, x_1\, x_2| \neq 0$: la 1ª è la *tangente*, e la 2ª assumerò come *normale proiettiva* di Γ in P.

Un punto di t (di n) ha coordinate del tipo $x + hx_1/a_1, \ldots$ $(x + hx_2/a_1^2, \ldots)$, con h intrinseco ed invariante se tale è la definizione del punto: in tal caso dirò che h è la *distanza proiettiva* del punto da P; e dirò *centro di curvatura proiettiva* quel punto C di n per cui $h = 1 : I$.

Matematica. — *Sopra alcune formule di risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota di Francesco Sbrana, presentata dal Corrisp. Gino Loria.

1. Consideriamo l'equazione integrale di prima specie

$$(1) \qquad \int_0^\xi \varphi(u)\, K(\xi - u)\, du = \Phi(\xi),$$

dove, naturalmente, $\Phi(0) = 0$, e supponiamo che $K(\xi)$ e $\Phi(\xi)$ siano definite per tutti i valori di ξ, in forma tale, che gl'integrali

$$\int_0^\infty e^{-\xi} K(v\xi)\, d\xi \quad , \quad \int_0^\infty e^{-\xi} \varphi(v\xi)\, d\xi ,$$

esistano, e siano finiti, quando v varia in un intorno, conveniente, dell'origine.

[1] A prescindere da un coefficiente numerico (senza importanza) per l'ultima proposizione di [8].

[2] Perchè cogredienti a x, y, z. E così in generale $(x_n : a_1^n \;,\; y_n : a_1^n \;,\; z_n : a_1^n)$.

Posto, quindi, nella (1), $\xi = vr$, $u = vt$, moltiplichiamo per $e^{-r}\,dr$, e integriamo, tra i limiti zero e ∞; risulta

$$v\int_0^\infty e^{-r}\,dr\int_0^r \varphi(vt)\,\mathrm{K}[v(r-t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

Eseguiamo ora, nel primo membro, uno scambio di integrazioni, facendo uso della nota formula di Dirichlet, e poniamo poi $x = t$, $y = r - t$; otteniamo subito

$$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx\int_0^\infty e^{-y}\,\mathrm{K}(vy)\,dy = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

L'equazione (1) è così trasformata nell'altra

$$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx = \mathrm{F}(v)\,, \tag{2}$$

essendo

$$\mathrm{F}(v) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{K}(vx)\,dx}\int_0^\infty e^{-x}\,\Phi(vx)\,dx\,.$$

Se poi $\mathrm{K}(v)$ e $\Phi(v)$ sono funzioni analitiche, lo è pure, in un conveniente intorno dell'origine, dove si annulla del primo ordine [1], $\mathrm{F}(v)$. Dalla (2) segue allora, com'è noto [2],

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\pi i v}\int_c e^z\,\mathrm{F}\left(\frac{v}{z}\right)dz\,, \tag{3}$$

dove c è, nel piano della variabile complessa z, un contorno chiuso, semplice, descritto nel senso positivo attorno all'origine, entro il quale la $\mathrm{F}(v)$ è regolare. Si verifica, del resto facilmente, che la funzione $\varphi(v)$, definita dalla (3), è soluzione della (2); basta per ciò aver presenti le note formule

$$\Pi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^\lambda\,dx\,,\quad \frac{1}{\Pi(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z\,z^{-\lambda-1}\,dz\,, \tag{4}$$

nella seconda delle quali, per λ intero (non negativo), si può scegliere per c il contorno stesso che compare nella (3) [3]. Posto, infatti,

$$\mathrm{F}(v) = v\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, v^n\,,$$

[1] Ciò è chiaro, se $\mathrm{K}(0) \neq 0$; ma risulta anche quando sia, più in generale, $\mathrm{K}(0) = \mathrm{K}'(0) = \cdots = \mathrm{K}^{(n-1)}(0) = 0$, e $\mathrm{K}^{(n)}(0) \neq 0$; basti osservare che, affinchè la (1) sia risolubile, dovrà essere pure $\Phi(0) = \Phi'(0) = \cdots = \Phi^{(n)}(0) = 0$, come si vede, derivando n volte la (1).

[2] Sotto altra forma, la (3) si trova, p. es., nelle *Leçons sur les fonctions monogènes* del Borel; 1917, pagg. 46 e 47.

[3] Cfr., p. es., Whittaker and Watson, *A cours of modern Analysis*, 1915, pagine 237 e 239. D'altra parte, per λ intero (non negativo), la seconda delle (4) si ottiene subito, sviluppando in serie e^z, e integrando termine a termine.

dalla (3) abbiamo

$$v\int_0^\infty e^{-x}\varphi(vx)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty{}_n a_n v^{n+1}\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx\int_c e^z z^{-n-1}\,dz=F(v)\,.$$

2. Mostreremo ora come l'equazione (2) si risolva, quando la funzione $f(v)=\frac{F(v)}{v}$ sia sviluppabile in serie di Fourier, in un intervallo $(-l\,,l)$. Poniamo

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}P(v)&=\frac{1}{2}\left\{I_0(2\sqrt{iv})+J_0(2\sqrt{iv})\right\},\\Q(v)&=\frac{1}{2i}\left\{I_0(2\sqrt{iv})-J_0(2\sqrt{iv})\right\},\end{aligned}\right.\qquad(i=\sqrt{-1}),$$

dove $J_0(z)$ è la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, mentre $I_0(z)=J_0(iz)$. Risulterà

$$P(v)=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{v^{2n}}{(2n)!\,(2n)!}\ ,\quad Q(v)=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)!}\ ;$$

e la soluzione della (2) è data dalla formula

$$(6)\qquad\varphi(v)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^\infty{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\times$$
$$\times\left\{\cos n\frac{\pi}{l}u\ P\left(n\frac{\pi}{l}v\right)+\operatorname{sen} n\frac{\pi}{l}u\ Q\left(n\frac{\pi}{l}v\right)\right\}du\,.$$

Infatti, cambiando in essa v in vx, e sostituendo, nel primo membro della (2), otteniamo appunto

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^\infty{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\cos n\frac{\pi}{l}(v-u)\,du=f(v)\,.$$

Ciò discende subito dalle seguenti uguaglianze:

$$(7)\qquad\int_0^\infty e^{-x}P(vx)\,dx=\cos v\quad,\quad\int_0^\infty e^{-x}Q(vx)dx=\operatorname{sen} v\,,$$

che si stabiliscono facilmente, ricorrendo agli sviluppi in serie delle funzioni $P(v)$ e $Q(v)$, e alla prima delle (4).

3. Supponiamo invece che $f(v)$ sia definita per ogni valore reale di v, e rappresentabile mediante l'integrale doppio di Fourier ([2]). Abbiamo allora

$$(8)\qquad\varphi(v)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\left\{\cos\alpha\lambda\ P(\alpha v)+\operatorname{sen}\alpha\lambda\ Q(\alpha v)\right\}d\lambda\,,$$

come agevolmente si verifica, procedendo in modo analogo al precedente.

([1]) Cfr. Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, 1er Bd., ediz. 1919, § 18.

Astronomia. — *Il sistema binario σ Coronae Borealis*. Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio A. Di Legge.

Il sistema *σ Coronae Borealis* ($\Sigma 2032 \equiv \beta$GC 7563 ; $\alpha = 16^h 10^m.9$, $\delta = +34^\circ 7'$, Eq. 1900) scoperto da W. Herschel nel 1781, con le componenti A e B di grandezza 5,8 e 6,7, presenta un lento moto orbitale, tanto che l'arco di orbita apparente (130°) descritto dal compagno B attorno ad A dall'epoca delle misure di W. Struve (1827) fino alla presente non basta ancora a determinare con certezza gli elementi. Burnham nel suo catalogo generale nota che saranno necessarie le misure ancora di un secolo per dare un periodo approssimato. Tuttavia un numero notevole di orbite sono state calcolate, che naturalmente presentano periodi molto diversi.

Il più recente sistema di elementi calcolato da Doberck [1]:

$$
\begin{aligned}
P &= 1679^a.2 \\
T &= 1828.71 \\
e &= 0.848 \\
a &= 9''.018 \\
\omega &= 276^\circ.03 \\
i &= \pm\ 29^\circ.05 \\
\Omega &= 177^\circ.80
\end{aligned}
$$

angoli di posizione crescenti,

rappresenta, con sufficiente esattezza, le osservazioni più recenti [2].

Il medio di misure da me eseguite nello scorso anno con l'equatoriale di Amici ad Arcetri, in tre sere [3], dà i seguenti residui:

1921,43 $\quad p_o = 219^\circ.5\ ,\ \varrho_o = 5''.55\ ;\ p_o - p_c = -0^\circ.4\ ,\ \varrho_o - \varrho_c = +0''.32$.

Le grandezze assolute e la parallasse delle componenti A e B dalle misure spettroscopiche di Monte Wilson [4] risultano:

grandezza assoluta $A = 3.7$
" $B = 4.2$
$\pi_{AB} = 0''.036$,

in buon accordo questa con le determinazioni trigonometriche.

(1) Astr. Nachr., Nr. 4051, a. 1905.
(2) Cfr. Aitken. Lick Publ., vol. XIII e Greenwich, *Cat. of Double Stars*, a. 1921.
(3) Pubblic. Osservatorio Arcetri, fasc. 39, pag. 14, a. 1922.
(4) Contributions Mt. Wilson, Nr. 199.

Sempre le misure di Monte Wilson assegnano le due componenti alla classe spettrale F9, mentre è da notarsi che Struve e Dembowski trovano una differenza di colore fra A e B, e precisamente:

Σ	A subflava	, B subcaerulea
Δ	A giallo-bianca	, B cinerea chiara.

La massa totale del sistema, in unità della massa solare, con gli elementi di Doberck e il valore della parallasse di Monte Wilson risulta:

$$M + M' = 5.57 \odot .$$

Il sistema AB è stato collegato da Σ con una componente D di $10^m.5$ e da $O\Sigma$ con una componente C di $12^m.5$, e le misure sono state più volte ripetute fino all'epoca presente.

La determinazione delle masse relative di A e B è stata calcolata in base a questi collegamenti da Lewis (1) che ricava il valore approssimato $\frac{m'}{m} = 4$, e da Hadley (2) che trova $\frac{m'}{m} = 1.1$. Boss (3) dalle osservazioni meridiane ricava: $\frac{m'}{m} = 0.47$.

La notevole discordanza fra questi valori si spiega col fatto che essendo il moto orbitale molto lento, dall'epoca del passaggio al periastro, avvenuta nel 1828.7, cioè all'incirca all'epoca delle prime osservazioni, la curvatura del moto di B attorno ad A è troppo piccola perchè le masse relative possano venire determinate con sufficiente esattezza.

Esaminando come i valori trovati di $\frac{m'}{m}$ soddisfino alle più recenti osservazioni micrometriche, si trova che il valore di Boss è certamente troppo piccolo, e che è più probabile un valore medio fra quelli di Hadley e Lewis.

Con le misure di AC e AD che si trovano in βGC e con altre più recenti, di cui in calce alla tabella ho notato le fonti, ho formato i seguenti luoghi normali, e per le date corrispondenti ho calcolato con gli elementi di Doberck gli angoli di posizione e le distanze di AB.

(1) Memoirs of the Royal Astr. Soc., vol. LVI, pag. 447.
(2) Popular Astronomy, vol. 13, a. 1905.
(3) P. G. C. Appendix II, pag. 273.

t	Coppia AC, eq. 1850			Coppia AB, eq. 1850	
	p	ϱ	Osservatori	p_c	ϱ_c
1851.73	234°.1	21″.19	$O\Sigma$	174°.5	2″.20
1857.12	230.8	19.98	$O\Sigma$	182.5	2.48
1877.95	223.3	15.89	H*l*	201.4	3.49
1880.39	221.2	15.06	β	203.0	3.60
1890.33	213.0	12.55	β	208.3	4.04
1898.47	208.7	11.23	H*u*	212.0	4.37
		Coppia AD, eq. 1850.			
1836.69	88.88	43.75	Σ	135.1	1.40
1862.60	88.20	51.01	Δ	188.6	2.77
1866.02	88.10	52.02	Δ	192.1	2.94
1874.51	88.15	54.62	Δ, Je	199.0	3.35
1884.50	87.70	56.70	β, Maw	205.3	3.79
1904.41	85.63	62.24	Do, Gr. 21	214.0	4.60
1909.06	85.50	63.71	β, Bies, Lau	216.0	4.78
1911.41	85.53	64.01	Do, Fox	216.8	4.87
1913.20	84.62	65.29	Gr. 21	217.4	4.93
1920.20	85.15	66.99	de Vos, Ab_2	219.6	5.18

Do = Doberck Astr. Nachr. 4480, 4529.
Gr 21 = *Catalogue of Double Stars*, Greenwich. a. 1921.
β = *Proper Motion Stars*, Carnegie Inst. of Washington Pubbl., n. 168.
Bies = Van Biesbroeck, Annales Observ. de Belgique. tome XIII, fasc. II.
Lau = Astr. Nachr. 4378.
Fox = Annals of the Dearborn Obs., vol. I.
de Vos = de Vos van Steenwijk. Monthly Notices, vol. 80, pag. 229.
Ab_2 = G. Abetti, Pubbl. Arcetri, fasc. 39, pag. 14, a. 1922.

Il valore di $k = \dfrac{m'}{m + m'}$ che meglio soddisfa ai sistemi di equazioni in α e δ, che si formano con questi luoghi normali, è 0.7 mentre il valore di Boss $k = 0.32$ lascia dei notevoli residui. Con $k = 0.7$ si ha $\dfrac{m'}{m} = 2.6$, che è appunto il medio fra i valori di Lewis e Hadley.

Fra i pochi valori di masse relative conosciuti con sufficiente esattezza, soltanto per il sistema *85 Pegasi* il compagno B, di cinque grandezze minore di A, pare accertato che abbia una massa 1,7 volte maggiore di

quella di A [1]; per tutti gli altri 18 sistemi il rapporto delle masse $\frac{m'}{m}$ diminuisce in modo regolare e continuo coll'aumentare della differenza di grandezza fra le due componenti. Sarà dunque interessante stabilire con osservazioni future se il sistema *σ Coronae* segua nel rapporto delle masse la regola più comune o presenti un caso di eccezione come quello di *85 Pegasi.*

Fino all'epoca presente resta una notevole incertezza fra il valore $\frac{m'}{m} = 2.6$, che è quanto oggi possono dare i collegamenti micrometrici con C e D, e il valore trovato da Boss $\frac{m'}{m} = 0.5$ dedotto dalle osservazioni meridiane esistenti. Per il momento non si può far altro che assumere l'uguaglianza delle masse di A e B come indicherebbe la loro differenza di grandezza.

Con questa ipotesi si ha

$$M = 2,8 \odot \quad , \quad M' = 2.8 \odot$$

e il moto proprio del centro di gravità del sistema:

$$\text{AB} \quad \text{c. g.} \quad \mu_\alpha = -0''.352 \quad , \quad \mu_\delta = -0''.081$$

$$\mu = 0''.302 \quad \text{in} \quad 254^\circ.5 .$$

La densità delle due componenti, calcolata in base alla loro classe spettrale F9, risulta:

$$\delta_A = 0.34 \odot \quad ; \quad \delta_B = 0.99 \odot .$$

La velocità del sistema nel piano normale alla visuale risulta di 40 chilometri per secondo; la velocità lungo la visuale del compagno B, determinata a Monte Wilson, è di —18 chilometri per secondo. Ammettendo che questa sia prossimamente anche la velocità del centro di gravità del sistema, si ottengono per questo la velocità nello spazio e le coordinate del suo apice seguenti:

$$v = 32 \text{ chm.} \quad ; \quad A = 170 \quad ; \quad D = -19^\circ .$$

In accordo con le grandezze assolute di A e B, questo sistema fa parte della classe delle stelle *nane* con le caratteristiche fisiche che competono alla sua luminosità [2].

[1] Memorie degli Spettroscopisti, serie 2ª, vol. 8°, a. 1919.

[2] Cfr. Pubbl. Arcetri, fasc. 39, pag. 31, a. 1922.

Fisica. — *Gli spettri di assorbimento dei coloranti del trifenilmetano* (¹). Nota del dott. Emilio Adinolfi, presentata dal Socio M. Cantone (²).

Fu da me rilevato in una Nota precedente (³) che le sostanze coloranti del trifenilmetano nei solventi: acqua, alcool etilico, etere, benzolo, glicerina, toluolo, xilolo presentano curve di assorbimento dello stesso tipo e con massimi che subiscono spostamenti crescenti col crescere della massa molecolare del solvente. Tale conclusione, che farebbe supporre una vera e propria addizione fra le molecole del solvente e del soluto, meritava una ulteriore conferma: è lo scopo della presente Nota.

I solventi adoperati in questa seconda serie di ricerche sono stati, oltre l'acqua, gli alcool metilico, etilico, isobutilico ed amilico; in essi le sostanze esaminate sono direttamente solubili; veniva perciò eliminato l'artificio cui si dovette ricorrere nelle esperienze precedenti e che consisteva nell'usare qualche goccia di un solvente estraneo per favorire la solubilità. L'analisi delle curve di assorbimento, eseguita col metodo della diffusione (⁴), ha potuto estendersi a una ventina di sali del trifenilmetano delle case Bayer e Kahlbaum. La tabella annessa raccoglie le misure in $\mu\mu$ relative ai centri delle bande che per ognuna delle sostanze si hanno nei diversi solventi.

I coloranti del gruppo delle rodamine sono in maggior parte fluorescenti e in misura variabile col solvente; fra essi la rodamina 6 g., la rosa di bengala, l'eosina, la flossina, la cianosina seguono la cennata regola dello spostamento dei centri; la rodamina B e l'uranina se ne allontanano. Il comportamento anomalo di queste due ultime sostanze potrebbe dipendere dal modo come si effettua la riemissione per fluorescenza, poichè non è improbabile che i centri di risonanza subiscano perturbazioni dipendenti dalla intensità e posizione delle bande di fluorescenza. L'uranina presenta una fluo-

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Napoli.

(²) Pervenuta all'Accademia il 3 giugno 1922.

(³) Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 3ª, vol. XXVII, 1921.

(⁴) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIX, serie 5ª, 2° sem., fascicolo 1°, 1920.

Solventi		H_2O	$CH_3.OH$	$C_2H_5.OH$	$C_4H_9.OH$	$C_5H_{11}.OH$
Verde malachite	λ_1	618	622.6	627	632	635.6
	λ_2	577	577	581	—	592
Verde brillante	λ_1	629.8	631	634	634.5	635.6
	λ_2	579	—	—	—	—
Bleu vittoria	λ_1	592	595	596.2	602	605
	λ_2	539.5	549.3	550	557	559.7
Cianina	λ_1	586	594	595	603	605
	λ_2	550	—	552	557	563
Fuxina	λ_1	547.5	554	557.5	559	562
	λ_2	492	507	507	513	514
Azofuxina	λ_1	519	567	—		—
	λ_2	515	528	—	—	—
Rosanilina	λ_1	543.8	549.6	553	559	562
	λ_2	481	503	503	514	514
Pararosanilina	λ_1	546	550	552	557	562
	λ_2	493	502	507	508	—
Violetto metile	λ_1	591	594	599	599	599.5
	λ_2	540.5	551	553	555	—
Verde metile	λ_1	633	643	642	643	645.5
	λ_2	587	588.6	588	592	592
Violetto di genziana	λ_1	586	594	595	—	—
	λ_2	537	543	547	—	—
Rodamina 6 g.	λ_1	527	529.7	534	532	535
	λ_2	496	492	497	—	497
Rosa di Bengala	λ_1	549.5	558.6	560.3	563	567.3
	λ_2	513	519	521 3	525	525.5
Eosina	λ_1	512.7	527	528	533.4	510
	λ_2	483.2	491.3	493.2	498	501
Rodamina B	λ_1	558.3	551 6	552.5	549	557
	λ_2	523	513	513	511	519
Uranina	λ_1	493	493.5	506	492	494
	λ_2	461	460	464	459	461
Cianosina	λ_1	539.2	552.7	555.5	556	557
	λ_2	501.2	511	513.2	515	517.5
Flossina	λ_1	545.2	557	558	559	565
	λ_2	518.3	529.5	530	536	540
	λ_3	486.5	492	492.7	498	502
Eritrosina	λ_1	547	—	550	563	562
	λ_2	518.2	527	527.5	540	540
	λ_2	485	498	489	501	501

rescenza intensissima che cresce passando dall'acqua, all'alcool metilico, all'alcool etilico e poi diminuisce negli alcool isobutilico ed amilico: e nel passare dall'alcool etilico all'isobutilico si ha un forte spostamento dei massimi in senso opposto.

La velocità di diffusione nei solventi alcoolici è maggiore di quella che si ha con gli altri solventi: in alcuni casi, e specialmente con soluzioni in alcool metilico, essa assume valori così grandi da aversi nel breve intervallo di pochi minuti colorazioni della intera colonna liquida di una lunghezza media di sei centimetri. Pur non avendo eseguite misure sulla rapidità della diffusione si può asserire che dall'alcool metilico, all'etilico, all'isobutilico, all'amilico la velocità decresce. Si è avuta massima cura, nel far pervenire la soluzione al fondo del recipiente contenente il solvente puro, di regolare l'efflusso in modo da evitare il disturbo dovuto a movimenti vorticosi e si è sempre ottenuta nelle condizioni iniziali netta superficie di separazione fra soluzione e solvente.

Con alcune delle sostanze adoperate la diffusione è caratterizzata da due fasi distinte: la prima consiste in una rapida propagazione della colorazione con gradiente piccolissimo di concentrazione e l'esame spettroscopico rivela una sola delle bande caratteristiche che si estende con larghezza costante, il che fa supporre che per questa prima fase la diffusione è completa; permane intanto la superficie di separazione che si aveva nelle condizioni iniziali e si origina da essa una seconda diffusione più lenta che completa allo spettroscopio le curve caratteristiche del gruppo. Si ha l'impressione di essere in presenza di un fenomeno di doppia diffusione originata da due gruppi atomici diversi.

Il fenomeno è nettamente apprezzabile con il verde malachite, la cianina, il violetto di genziana, la flossina (1).

Pare già accertato del resto che in soluzione acquosa le sostanze coloranti del trifenilmetano vengano decomposte: e una probabile scissione è stata osservata dal Georgevics (2). Una doppia diffusione con caratteri analoghi è stata notata dal Cantone e dal dott. Carrelli nelle soluzioni di iodo.

La permanenza nel tubo da saggio da sottoporsi all'esame spettroscopico di un imbutino capillare che aveva l'ufficio d'inviare al fondo del recipiente contenente il solvente puro, la soluzione alla concentrazione iniziale voluta, poteva far sorgere il dubbio che il fenomeno osservato fosse dipendente da moti di convezione termica favoriti dall'imbutino pieno di soluzione e atto quindi, per il diverso potere assorbente, a generare una

(1) Quest'ultima sostanza presenta tre massimi di assorbimento dei quali due diffondono nella prima fase e il terzo, cui corrisponde lunghezza d'onda maggiore, diffonde con maggiore lentezza.

(2) Panizzon, *Chimica delle sostanze coloranti*, vol. I, pag. 335.

corrente ascensionale di soluzione. Furono pertanto eseguite esperienze in tubi capillari piegati a U nei quali si aveva cura di portare per vie diverse solvente e soluzione nelle condizioni iniziali nettamente separati. In tali tubi la diffusione si effettua con grande lentezza, ma si riscontrano ugualmente le due diffusioni distinte.

Le fotografie della fig. 1 si riferiscono a una soluzione in alcool metilico di verde malachite che diffonde nello stesso solvente contenuto in un

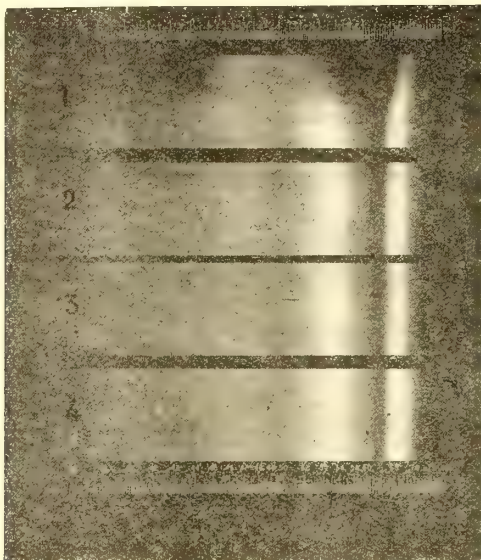



Fig. 1.

tubo capillare di un millimetro di diametro. La prima di esse è stata ottenuta portando in corrispondenza della fenditura dello spettroscopio la superficie di separazione che ancora si nota a diffusione inoltrata (venti ore dallo inizio): la seconda, la terza e la quarta si riferiscono a tratti della colonna liquida distanti 1, 3 e 6 cm. rispettivamente dalla superficie di separazione anzidetta.

Oltre al fenomeno della doppia diffusione altre ragioni concorrono a far ritenere che i vibratori che originano le curve di assorbimento nello spettro visibile dei coloranti del trifenilmetano sono due: di esse farò menzione in una successiva Nota. Per il momento si può conchiudere che anche *in soluzioni alcooliche, le sostanze esaminate, eccezione fatta per l'uranina e la rodamina* B, *presentano spettri di assorbimento i cui massimi subiscono spostamenti crescenti al crescere della massa molecolare del solvente.*

Fisica. — *Tenacità del nichel in rapporto al comportamento magnetico* [1]. Nota del dott. WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Socio M. CANTONE.

Le ricerche istituite sul nichel hanno messo in evidenza che alla temperatura critica si ha oltre alla perdita di magnetismo una variazione della resistenza elettrica, del potere termo-elettrico e del potere emissivo. Tale comportamento ha suggerita la presente ricerca che ha lo scopo di determinare le variazioni di tenacità di questo metallo col variare della temperatura in un intervallo abbastanza esteso da comprendere il punto di trasformazione magnetica.

Le esperienze sono state eseguite su fili di nichel ricotto fornito dalla casa Kahlbaum, di diametro non piccolo (mm. 0,5) per eliminare l'effetto dell'ossidazione, dimostratasi del resto piccolissima per le temperature raggiunte. Per il riscaldamento veniva usato un forno elettrico impiantato verticalmente a muro, alimentato da una batteria di accumulatori per avere, con la regolazione di opportune resistenze, la costanza della temperatura per tutto il tempo dell'esperienza, in media 15'. Le temperature erano determinate a mezzo di una pinza tipo Le Chatelier e di un galvanometro tipo Depretz-D'arsonval: la saldatura calda, completamente scoverta, veniva a corrispondere al centro del forno nella regione a temperatura pressochè uniforme occupata dal filo posto vicinissimo. Questo era assai corto, 50 mm., e ciò sia per poterlo ritenere tutto alla stessa temperatura sia per avere una minore disuniformità di sezione e quindi scarti piccoli nei valori della tenacità. Particolari cure si sono inoltre avute circa le modalità degli attacchi: ho impiegato anch'io il dispositivo a doppio filo che ha dato buoni risultati in precedenti analoghe esperienze eseguite dal Cantone [2] a temperatura ordinaria, opportunamente adattato alle dimensioni assai ridotte dello spazio nel quale si poteva operare (diametro del tubo interno del forno mm. 27) e liberato dalla guida alla rotella inferiore. Questa, perfettamente libera, portava il gambo al cui estremo veniva adattata la boccia destinata a ricevere il carico costituito da acqua la cui velocità di efflusso veniva regolata in modo da riuscire assai piccola e quasi costante: la piccolissima variazione di velocità, com'è risultato sperimentalmente, non aveva alcuna influenza sul valore da determinarsi.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Napoli.
[2] Rendiconti Accademia dei Lincei. fasc. X, 1° sem. 1922.

Esperienze preliminari ebbero lo scopo di assodare l'influenza delle modalità del riscaldamento sui valori della tenacità. Esse dimostrarono che collocando nel forno il filo sin da principio e mantenendovelo per tutto il tempo necessario a raggiungere la temperatura dell'esperienza, si avevano risultati assai poco differenti da quelli che si ottenevano introducendo invece il filo dopo di aver portato il forno alla temperatura voluta.

Temperature	100°	200°	300°
Primo modo di riscaldamento .	51.02	50.10	49.54
Secondo " " " .	50.91	50.19	49.24

Assai piccola risultava cioè l'influenza della diversa durata di riscaldamento del filo, durata che nel primo caso era non solo variabile con la temperatura da raggiungersi, ma sempre abbastanza lunga essendo obbligati, per avere la costanza della temperatura per tutto il tempo dell'esperienza di trazione, a riscaldare assai lentamente il forno con una corrente non superiore a quella necessaria a mantenere il regime voluto. Nel secondo caso invece l'equilibrio di temperatura si otteneva poco dopo l'introduzione del filo nel forno, come poteva rilevarsi da una spia tracciata sul gambo del sistema ed osservata con un catetometro. Nelle esperienze eseguite con questo secondo metodo il riscaldamento veniva però prolungato e solo dopo mezz'ora dall'introduzione del filo nel forno veniva iniziata l'esperienza. Con ciò, mentre si era sicuri dell'uniformità di temperatura, si aveva assicurata anche la costanza della temperatura durante l'esperienza di trazione, mentre nessuna influenza apprezzabile produceva detto riscaldamento sul valore della tenacità. Con queste modalità e dopo lunghe e penose prove fu possibile ottenere i risultati indicati nella seguente tabella:

VALORI DELLA TENACITÀ (KG. PER MM^2. DELLA SEZIONE INIZIALE).

15°	100°		200°		300°		400°	450°	500°
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)
52.32	51.52	50.89	50.08	50.30	49.21	49.11	48,35	42.37	35.37
52.78	50.77	50.84	49.89	50.30	49.30	49.5	48.77	42.17	35.86
52 32	50.77	50.93	50.37	50.30	49.89	49.29	48.43	41.98	35.86
52.17	—	50.84	49.89	50.15	49.79	49.06	48.68	—	35.95
—	—	51.03	50.28	49.90	—	—	48.52	—	35 86
52.4	51.02	50 91	50.10	50.19	49.54	49.24	48.56	—	—
±0.19	50.95 ± 0.15		50.15 ± 0.18		49.39 ± 0.25		48 55 ± 0.14	42.20 ± 0.15	35.78 ± 0.16

(1) Primo metodo di riscaldamento. (2) Secondo metodo di riscaldamento.

Da essi si rileva che la tenacità del nichel, assai alta a temperatura ordinaria, diminuisce col crescere della temperatura prima assai lentamente e poi da 400° in su con maggiore rapidità. Si ha difatti fino ai 400° una variazione media di tenacità di Kg. 0.01 per grado, mentre al di sopra dei 400° la variazione è di Kg. 0,087 per grado cioè 8,7 volte la precedente. Dalla fig. 1 si rilevano nettamente i due andamenti della curva che sono

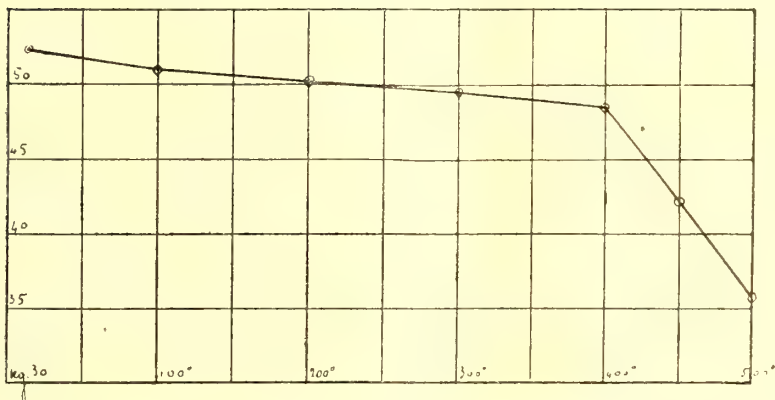



FIG. 1.

entrambi di quasi proporzionalità, eccettuato il primo tratto fino ai 100° in cui si ha una variazione doppia che nel tratto 100°-400°. Con questo di notevole che il passaggio da un andamento all'altro e che caratterizza i due stati del Nichel per rispetto al comportamento magnetico, avviene in corrispondenza alla temperatura di 400°, cioè ad una temperatura alquanto maggiore di quella comunemente indicata (340°-360°) per il punto di trasformazione magnetica. La stessa temperatura di 400° è stata ottenuta da Kei Iokibe e Sukeaki Sakai [1] per la variazione nell'andamento della curva della rigidità in funzione della temperatura, ed un ritardo nel cambiamento della legge di emissione (380°) fu ottenuto dalla Kahanowicz [2] con nichel della stessa provenienza di quello da me impiegato. Non è da escludere che la mancata coincidenza possa dipendere dal fatto che ai nostri giorni l'uso delle pinze termo-elettriche e dei forni elettrici permette un maggior rigore in questo genere di determinazioni.

[1] Philosophical magazine. Vol. 42. N. 249, settembre 1921, pag. 397.

[2] Rendiconti Accademia Lincei. Vol. XXX, fasc. 3-4, pag. 132.

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* [1]. Nota II del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

Celestina del vallone Marro.

Il vallone Marro si origina dai fianchi occidentali del monte Cona — che sorge a km. 1 $^{1}/_{2}$ circa al sud-sud-est di Rometta — e, contornando le falde del monte Marro, percorre da oriente ad occidente il territorio di questa cittadina, per sboccare ad est di Monforte-S. Giorgio, nella *fiumara* omonima, la quale segna i confini fra i territorî dei due su citati paesi.

In questo vallone, in mezzo alla svariata serie dei terreni appartenenti al terziario superiore, affiorano alcuni calcari, i quali racchiudono una fauna fossile rappresentata da modelli di Lamellibranchi e da colonie di polipai appartenenti alla tribù delle Astracee.

Su di un modello di detti polipai — che il perfetto stato di conservazione mi permise di classificare agevolmente come riferentesi ad *Heliastraea-Raulini* E. e H. [2] — ho rinvenuto, impiantati sulle impronte dei calici, alcuni piccoli cristalli bianchicci, prismatici di celestina.

Pertanto anche questo giacimento presenta caratteri di analogia tanto con quello di Tremonti, quanto con quello di Monte Viale, di cui ho già trattato avanti.

L'età dei calcari racchiudenti la fauna predetta — nei quali furono rinvenuti i cristalli sopra citati — a me pare non possa assumersi come esaurientemente definita, quantunque G. Seguenza [3], molti anni addietro, avesse riferito tali calcari al Tortoniano.

Infatti, al disopra dei conglomerati di ciottoli cristallini, che rappresentano un unico orizzonte geologico nella maggior parte della Sicilia — specialmente nella provincia di Messina — e che da tempo sono stati riferiti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

(2) Specie già rinvenuta da G. Seguenza nella stessa regione (*Disquisizioni paleontologiche intorno ai corallarî fossili delle rocce terziarie del distretto di Messina*, vol. II, loc. cit., Torino, 1864, pag. 107, tav. XIII, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

(3) G. Seguenza, *Breviss. cenni int. a sez. terziar. d. prov. d. Messina*, loc. cit., pp. 16 e seg. dell'estratto.

al tortoniano [1], poggiano, sabbie, molasse, argille e calcari. Questi ultimi — che sono precisamente quelli che racchiudono modelli di bivalvi e polipai, affioranti fra l'altro al vallone Marro — credo non siano stati ancora esaurientemente studiati, sia perchè poveri di fossili caratteristici e ben conservati, sia perchè manifestandosi qua e là al disotto delle argille ed arenarie a gessi, come il residuo di forte azione denudatrice, non lasciano chiaramente scorgere la loro posizione stratigrafica; e quindi, per quanto i calcari suddetti si trovino sicuramente al disopra dei su riferiti conglomerati tortoniani, non credo possano ancora ritenersi come sufficientemente accertati per tortoniani. d. c. Alle anzidette condizioni che, nell'esame dei nostri calcari, rendono difficile tanto l'applicazione del concetto paleontologico, quanto di quello stratigrafico, e quindi laboriosa la determinazione e dubbia l'impostazione cronologica, se ne aggiungono però altre riguardanti la speciale *facies* fossilifera, la quale io credo tenda a rivelare questi calcari come omotipici a quelli sicuramente pontici di altre regioni.

Infatti il Mottura [2] rinvenne calcari racchiudenti polipai degli stessi generi di quelli riscontrati in contrada Marro, presso il feudo Landro, tra Vallelunga e S. Caterina. Ed il Baldacci [3] riferì in seguito tali calcari all'ultima zona del tortoniano, non per la fauna, ma per la loro posizione al disotto dei tripoli, sottostanti alla zona a solfi, che egli assumeva allora come sarmatiano, ma che oggi è ritenuto sicuramente pontico [4].

Il Cortese [5] trovò presso Monteleone un calcare racchiudente una fauna corallina di cui i generi, e persino varie specie, sono affatto simili a quelle che si rinvengono nel nostro calcare e fondandosi principalmente sul fatto che quei calcari si trovano collaterali al calcare siliceo della formazione gessoso-solfifera, li ascrisse al mio-pliocene, asserendo che essi rappresentano una forma di Messiniano.

Il prof. Giovanni Di Stefano [6] descrivendo i pochi lembi di calcare a modelli di grossi bivalvi che nella regione Salinà, fra Centuripe e Catenanuova in provincia di Catania, si osservano sulle argille con sabbia del tortoniano, interpreta l'accumulo di grandi Lucine — di cui quei calcari si

[1] G. Seguenza, loc. cit.; Cortese, Bollettino del R. Comit. Geol. d'Italia, 1882, anno XIII, pag. 333; Baldacci, *Descrizione geologica della Calabria.* Mem. descr. d. carta geol. d'It., vol. IX, Roma, 1895, pag. 109.

[2] Mottura, *Sulla formazione terziaria della zona zolfifera della Sicilia* Mem. p. serv. a. descr. d. carta geol. d'It. pubbl. a cura d. R. Com. Geol. d. Regno, vol. I, Firenze, 1871, pag. 68.

[3] Baldacci, loc. cit., pag. 99 e pag. 108.

[4] De Lapparent, *Traité de Géologie*, quatrième édition, Paris, 1900, pp. 1547 e seg.

[5] Cortese, *Descriz. geol. d. Calabria,* loc. cit., vol. IX, Roma, 1895, pp. 152 e seg.

[6] Giov. Di Stefano, *Il Calcare con grandi Lucine dei dintorni di Centuripe in provincia di Catania.* Atti d. Acc. Gioenia d. Sc. Nat., serie IV, vol. XVI, Catania, 1903, pag. 11.

mostrano essenzialmente costituiti — come residui di una colonia di questi bivalvi della base del piano pontico; e ritiene altresì che forse tali calcari possono ricordare quelli a modelli di bivalvi del messinese, i quali, d'altra parte, dallo stesso A. sono ritenuti probabilmente omotipici, ai calcari di Licodia Eubea. dei quali almeno una parte — come lo stesso A. fa rilevare confutando l'opinione del barone Cafici ([1]), che su di essi ci diede un pregevole studio — dovrebbe ammettersi sia immediatamente posta alla base del piano pontico.

È inoltre opinione del Di Stefano ([2]) che la maggior parte de' banchi a modelli affioranti in numerosissime regioni d'Italia e riferiti dagli A.A. a varî orizzonti geologici, debbano ritenersi sincroni ai calcari di Catenanuova, e quindi pontici.

Da quanto ho esposto a me sembra poter conchiudere che al pontico — più che al tortoniano, come fin'ora si è ritenuto — forse con maggiore probabilità finirebbero col riferirsi i lembi calcarei del nostro giacimento, se sulla sua tettonica e sulla sua fauna fossile potessero raccogliersi tali dati e materiale da rendere possibile uno studio minuzioso ed esauriente. Ed alla soluzione di questo problema potrebbe giovare l'esame della regione che svolgesi fra i territorî di Rometta, Monforte-S. Giorgio, e S Pier Niceto, giacchè in essi si hanno tutti i rappresentanti del terziario superiore Messinese, e nel vallone Marro è rappresentato il calcare a modelli e ad Heliastrea.

I cristalli di celestite del vallone Marro si presentano di colore generalmente bianco lattiginoso, translucidi e variamente torbidi, per modo che mentre taluni gruppi assumono dei toni bianchicci, altri tendono ad una lieve tinta giallastra. Tutti hanno lucentezza perlacea. Le loro dimensioni variano da un minimo di mm. 1 ad un massimo di mm. 6 — che è raggiunto solo da pochi — nella direzione dell'asse [100], con una grossezza che rare volte raggiunge od oltrepassa di poco il millimetro. Essi si presentano impiantati sul fossile per un estremo dell'asse [100], per cui si mostrano terminati ad un solo estremo di questo asse e sono variamente inclinati, e più o meno intimamente aggruppati, ora a mo' di ventaglio, ora con disposizione ipoparallela.

Però ne ho osservato qualcuno completamente isolato, il quale, pur aderendo al fossile per parte di alcune delle faccette terminali, si mostra adagiato per tutta la sua lunghezza sulle parti delicatamente rilevate di questo, su cui poggia ordinariamente una faccia del prisma }011{. Per tale disposizione, uno di questi cristalli mostra abbastanza nettamente visibili tutte le facce terminali di entrambe le estremità dell'asse [100] — caso, come è

([1]) Id., loc. cit., pag. 11.
([2]) Id., loc. cit., pag. 12

ben noto, piuttosto raro per i cristalli della specie — e su di esso ho potuto eseguire agevolmente, e senza usare alcun artifizio, le misure di tutti gli angoli, poichè le incrostazioni di calcare che restano sul cristallo staccato non cuoprono che parzialmente le faccette di contatto.

Ho potuto, così, constatare che questo individuo (vedi fig. 6) presenta un notevole apparente aspetto emimorfo secondo l'asse [100], giacchè mentre in una delle estremità di questo asse si distinguono nettamente le facce delle {110}, {102}, {100}, nell'altra si presentano solo quelle del prisma {102}. Lo spigolo comune delle facce di questo prisma, però, si mostra addentellato, ed ai margini in cui queste facce iniziano la soluzione di continuità si presentano le due faccette di un prisma {6.0.11}, nuovo per la specie, il cui simbolo risulta determinato dai seguenti angoli:

$$(6.0.11):(102) = \begin{matrix} \text{(mis.)} & 2^\circ 40' \\ \text{(calc.)} & 2^\circ 37' 47'' \end{matrix} \Big\} \text{ diff.} = +2' 13''$$

$$(6.0.11):(001) = \begin{matrix} \text{(mis.)} & 41^\circ 55' 30'' \\ \text{(calc.)} & 41^\circ 52' 18'' \end{matrix} \Big\} \text{ diff.} = +3' 12''$$

Per quanto avessi esaminata con molta cura questa estremità del cristallo, facendo anche uso di lenti a forte ingrandimento, non mi fu possibile scorgere nemmeno tracce delle faccette corrispondenti alle altre due forme {100} e {110}.

Il tipo morfologico non differisce da quello osservato nei cristalli di Tremonti, giacchè anche in questi del vallone Marro, non solo si nota il comune abito nettamente prismatico secondo {011} con sensibile allungamento dell'asse a, ma si rileva altresì quell'ingrossamento all'estremità libera di quest'asse, di cui avanti ho parlato Tutti gli individui, in genere, sono abbastanza regolari, poichè le facce omologhe delle forme dominanti — ordinariamente tutte presenti nelle parti libere dei cristalli — si mostrano quasi sempre sensibilmente equidimensionali.

Le figg. 4, 5 e 6 rappresentano i tipi più caratteristici delle diverse combinazioni osservate, e nel disegno, pur completando e regolarizzando i cristalli, ho cercato di riprodurne l'habitus nel miglior modo possibile.

Tutte le facce — specialmente negli individui più piccoli — sono alquanto pianeggianti, ma spesso, col crescere in dimensione, si mostrano alquanto corrose, scabre o striate, per cui al goniometro si presentano piuttosto lucenti, ma ordinariamente riflettono immagini di scarso splendore ed a contorni variamente sfumati. Non è raro, infine, il caso di immagini doppie, triple ed anche multiple, dovute a poliedria che frequentemente si presenta nelle facce striate.

Forme osservate:

{001} {100} {011} {110} {102} {6.0.11}*

delle quali — ch'io sappia — la {6.0.11}* è nuova per la specie.

Delle suddette forme sono costanti:

$\{011\}$ e $\{102\}$

alquanto frequente:

$\{001\}$

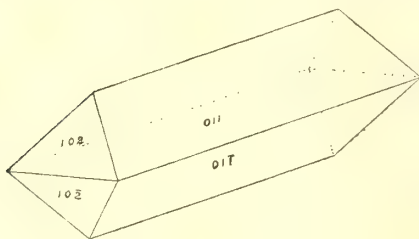
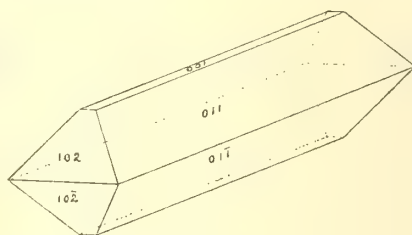
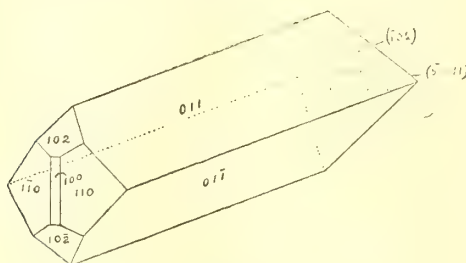
rinvenute una sola volta:

$\{100\}$ $\{110\}$ $\{6.0.11\}$*

Combinazioni osservate:

1ª	—	—	$\{011\}$	—	$\{102\}$	—	molto frequente (fig. 4).
2ª	—	$\{001\}$	$\{011\}$	—	$\{102\}$	—	frequente (fig. 5).
3ª	$\{100\}$	—	$\{011\}$	$\{110\}$	$\{102\}$	$\{6.0.11\}$*	osserv. una sola volta (fig. 6).

Fig. 4. Fig. 5.

Fig. 2

Le facce presentano i soliti caratteri, e non si prestano, in genere, a misure precise. Ho confrontato i valori da me ottenuti con quelli calcolati mediante il rapporto parametrico:

$$a : b : c = 0{,}78035 : 1 : 1{,}28236$$

determinato dall'Auerbach per la celestina di Sicilia.

ANGOLI	Numero osservazioni	Misure — Limiti	Misure — Medie	Calcolo
(001) : (011)	4	51°41′ — 52°16′	52° 1′ ½	52° 3′ 9″
(102) : (10$\bar{2}$)	3	101.10.40 — 101.12.40	101.11	101.10 59
(102) : (001)	3	39.23 — 39.43	39.25 ½	39.24.30
(102) : (011)	15	61.26 — 61.42	61.35	61.37.57
(102) : (110)	2	59.55 — 60. 2	59.58 ½	59.58. 3
(011) : (110)	2	60.57 — 61.12	61. 4 ½	60.58.44

Biologia. — *Suscettibilità differenziale, gradiente assiale e rapporti tra correlazioni e differenziazioni.* Nota del dott. Giulio Cotronei [1], presentata dal Socio Battista Grassi.

La presente Nota si propone di precisare la relazione tra le mie ricerche sui rapporti tra correlazioni e differenziazioni nello sviluppo degli Anfibi e le idee e le ricerche del Child e della sua scuola.

Negli ultimi anni un biologo americano di grande valore, il Child, ha sviluppato una interessante dottrina che poggia sulla concezione fisiologica della forma. L'organismo vivente viene concepito come un asse di attività fisiologica diseguale nei suoi varî punti: si verifica cioè un gradiente assiale, svolgendosi i processi biologici più intensamente alla parte apicale (cefalica) che non alla parte basale. Negli animali a simmetria radiale non esiste se non un gradiente apico-basale. Ma nelle forme bilaterali, oltre quest'asse polare, vi è anche un gradiente bilaterale. V'è però una differenza tra vertebrati e invertebrati: « *in most bilateral invertebrates the high region of these bilateral gradients is apparently represented by the median ventral region and in the vertebrates by the median dorsal region* ».

Child, in uno dei suoi ultimi lavori di natura sintetica [2], ha proposto di sostituire il termine *gradiente fisiologico* all'altro *gradiente metabolico* giacchè il protoplasma è un sistema nel quale le reazioni chimiche del metabolismo sono così intimamente associate con altri fattori (come la dispersione colloidale, l'attività enzimatica, la permeabilità, il contenuto in acqua e in elettroliti) che « ... *to attempt to distinguisch one particular factor rather than another as primary is at present impossible* ».

In una serie di ricerche su gli Anfibi mi sono occupato dello studio, sia delle correlazioni meccaniche, sia delle umorali. E tra i metodi d'indagine da me adoperati, si è fatto grande uso di quello che gli autori americani chiamano metodo della *suscettibilità differenziale.* Fin dal 1915 ho potuto riscontrare che il processo malformativo comincia (come grado) all'apice cefalico e procede in direzione caudale. È risultato, inoltre, da tutta una serie

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

(2) Child C M., *Some consideration concerning the nature and origin of physiological gradients.* Biological Bulletin, vol. 39. 1920.

di mie ricerche, che parti disposte più lateralmente (occhi, organi olfattori, papille laterali del vestibolo boccale) tendono a portarsi sulla linea mediana dove si trovano, pertanto, zone inibite e che il processo d'inibizione in questi organi è più intenso nella parte ventrale che non nella dorsale.

Un fatto che, a mio credere, è di grande importanza, sono riuscito a mettere in rilievo: l'apice della corda dorsale è un punto d'arresto del processo malformativo in quelle larve che hanno potuto proseguire nello sviluppo fino (ad esempio) al consumo vitellino; distinguendosi sperimentalmente due parti ben distinte nella morfogenesi degli anfibi (rana, rospo, tritone) e cioè la parte cordale del corpo e la parte precordale ([1]).

Rivedendo i miei risultati sulla scorta delle idee del Child, si può ritenere che i processi metabolici sono più intensi alla parte precordale che pertanto è più influenzabile. Bisogna però subito aggiungere che io ho considerato le malformazioni della parte cefalica (precordale) come prodotte da un'azione *d'insieme* del cervello precordale. Le mie ricerche si sono, essenzialmente, ispirate a concetti meccanici, pur riconoscendo che le forze agenti sono esse stesse prodotte da attività biologiche, di natura molto più complesse; ma io ho preferito, per raggiungere dei risultati concreti, di non tentare di risalire troppo alle proprietà generali della sostanza vivente, ma di osservare i fatti nella loro seriazione e dedurne le relazioni causali immediate.

Molti fatti da me messi in evidenza fanno risaltare l'enorme importanza che ha la conquista dello spazio *in un determinato momento* per lo sviluppo di determinati organi. Si potrebbe subito osservare che questa è un'osservazione banale. Perchè si sviluppino determinati organi è intuitivo che ci debba essere lo spazio necessario! In verità, se si fosse trattato di così poco, io non sarei stato alcuni anni ad occuparmi di simili inezie! Ma l'importanza sta nel mettere in rilievo le condizioni con cui si conquista il *nuovo* spazio embrionale e nello stabilire e precisare i rapporti tra determinate condizioni spaziali e i processi differenziativi.

Nello studio delle mie « *larve a litio* » è risultato che tende a scomparire la cavità ventricolare nella parte precordale dell'encefalo. Ne consegue un ammassamento cellulare (dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini) e pertanto si ottiene un minore *sviluppo spaziale.* La prima conseguenza morfologica del fatto ora esposto, si ha nel cervello stesso: l'accumulo dei neu-

([1]) In tutte le mie ricerche, finora pubblicate, che trattano delle larve a litio degli Anfibi, non ho nulla riferito sul comportamento del blastoporo. Si sa già, e anche per ricerche non più recentissime, che la regione del blastoporo è intensamente influenzabile. Una conseguenza di tale fatto, che si può riscontrare nello sviluppo ulteriore, è l'imperforazione anale. Tutto mi lascia pensare che la mancata invaginazione del tappo vitellino, che si può ottenere sotto l'influenza di determinati agenti, sia una conseguenza della dissociazione dei processi morfogenetici elementari di Ruffini, così como ho riferito in altri miei lavori.

roblasti finisce con l'ostacolare determinate differenziazioni; infatti, determinati centri proliferativi, che si trovano nelle parti laterali, sono costretti con la paralisi di alcune energie di sviluppo (movimento, secrezione) a subire più passivamente la forza di gravità e si vengono a trovare, pertanto, ventralmente, sulla linea mediana; è così ostacolato lo sviluppo successivo delle parti mediane. Quei fatti si osservano con grande evidenza nella regione oculare: ne consegue la ciclopia e la inibizione del nervo ottico. Determinate parti del territorio oculare possono rimanere, così, persistentemente incorporate nel cervello. L'inibizione del nervo ottico e quella del nervo olfattorio mettono poi in rilievo l'ostacolo che incontra la produzione delle fibre nervose nella parte malformata.

Nello sviluppare le mie indagini sono stato poi indotto a riconoscere che il movimento cellulare e la secrezione del liquido encefalico (ventricolare) servano in un dato momento ad occupare il maggior spazio possibile distendendo la lamina neurale precordale (Ruffini e Marchetti). L'accumulo dei neuroblasti è dovuto appunto alla paralisi delle funzioni di movimento e di secrezione; e il grado di tale paralisi [1] e quindi il maggiore o minore spazio occupato dal cervello precordale si riflette sul grado minore o maggiore del processo inibitorio in quegli organi cefalici che sono in rapporto con il cervello precordale.

* * *

I fatti e le considerazioni ora esposte tendono a fare risaltare l'importanza della formazione delle cavità ripiene di un liquido per la morfogenesi. È in tal modo che l'organismo può conquistare più rapidamente e più economicamente lo spazio e può dirigere lo sviluppo di quelle parti che vengono così sostenute (direttamente o indirettamente). Vengono così viste sotto una nuova luce le ricerche di Herbst sull'influenza dei tigmotropismi nello sviluppo e si mette in risalto il peculiare stimolo di *tensione* esercitato dal neurasse precordale sulla morfogenesi delle parti circostanti.

* * *

Quanto precede è stato da me verificato nello sviluppo ulteriore [2] degli Anfibi; ma fatti già messi in evidenza da altri autori, mi indurrebbero ad estendere le mie considerazioni ai processi embrionali che si svolgono in fasi più precoci dello sviluppo. La cavità e il liquido blastulare, la cavità

[1] Anche quel grado di variabilità che si riscontra nell'esaminare le malformazioni cefaliche nelle loro correlazioni è, secondo me, dovuto a quella variabilità di condizioni spaziali (in relazione a una variabilità nella dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini) che si può avere nello sviluppo dei varî individui.

[2] Vedo annunziato su questo argomento, da me trattato da molti anni, un lavoro del Bellamy, della scuola di Child.

e il liquido gastrulare ecc., spiegano successivamente un'enorme influenza morfogenetica. Infatti in quegli esperimenti, che ostacolano lo sviluppo mercè influenze paralizzanti, si è appunto ottenuta l'obliterazione di queste cavità.

Per quanto io non abbia fatto ricerche sullo sviluppo degli invertebrati, sono indotto a pensare che, pur tenuto conto della differente morfogenesi e della possibilità di differenti parti direttive, fatti della stessa natura vi si possano riscontrare.

*
**

In conclusione le mie ricerche, che non contraddicono alle idee generali del Child, hanno fatto risaltare, mercè l'analisi sperimentale, il modo con cui si esplicano i processi embrionali per giungere, in un determinato momento, alla più rapida conquista dello spazio necessario allo sviluppo di determinati organi: in tal modo le mie ricerche hanno contribuito a mettere in luce le attività più concrete che presiedono allo svolgersi della forma.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra dà il triste annuncio della morte, avvenuta il 28 maggio 1922, del Socio nazionale senatore prof. Giovanni Capellini del quale ricorda i grandi meriti scientifici e la mirabile attività, anche negli ultimi anni della sua tarda età, nel campo degli studî geologici.

Al Presidente si unisce il Socio Canavari che legge i seguenti cenni necrologici dell'estinto:

« I Colleghi De Stefani e Parona hanno voluto che io, associandomi a quanto ha detto il nostro Presidente, esprimessi anche a nome loro il nostro profondo cordoglio per la perdita che l'Accademia e la Geologia hanno fatto con la scomparsa di Giovanni Capellini.

« Altri certamente commemorerà l'eminente scienziato con autorità infinitamente più grande della mia. Il solo titolo per cui ho preso la parola deriva dal fatto di essere uno degli ultimi, per data, di quei numerosi discepoli che uscirono dalla Scuola geologica pisana, fondata da Paolo Savi e da Giuseppe Meneghini, mentre Giovanni Capellini ne fu uno dei primi in ordine cronologico e primo tra tutti per alti meriti scientifici.

« Giovanni Capellini si addottorò a Pisa in scienze naturali nel 1858.

« Sin dall'inizio de' suoi studî geologici ebbe un solo pensiero: quello di dimostrare all'estero che la tradizione geologica tramandata a noi per opera di Leonardo da Vinci — sommo tra i sommi — era pur sempre viva e feconda e doveva anche in Italia affermarsi, appena risorta, come s'era affermata in Germania, in Inghilterra, in Francia, mercè Lyell, Werner, Cuvier, tre nomi, tre diversi indirizzi nel campo vasto delle discipline geologiche.

« Mentre Giuseppe Meneghini con l'autorità del nome, dotto in tutti i rami delle scienze naturali e quindi biologiche, riuniva a noi nella spiritualità della scienza pura, austriaci e tedeschi, quali von Hauer, Suess, Leonhardt, Zittel, ed inglesi, quali Lyell e Davidson, Giovanni Capellini stringeva più saldi e più ampî legami con francesi, con russi, con americani soprattutto, quali Gaudry, Karpinski, James Hall, Walcott, e cercava ovunque con le pubblicazioni scientifiche, riguardanti specialmente vertebrati fossili, con le corrispondenze epistolari, con i viaggi numerosi in Europa e fuori di Europa e con il promuovere e il presiedere congressi di scienze preistoriche e geologiche, di imporre all'estero il rispetto e la dovuta considerazione per la nostra produzione scientifica.

« Fu spesso rimproverato a Giovanni Capellini dai Colleghi che non lo conoscevano intimamente, il suo continuo e apparentemente esagerato desiderio di voler conseguire sempre nuovi onori e nuove onorificenze.

« Ma questa singolarità del compianto Collega era come la face virgiliana, che sempre, senza un istante di riposo, doveva accompagnarlo per tutta la sua luminosa carriera, quasi come incitamento di continuo e proficuo lavoro scientifico. Così che ogni nuova onorificenza da lui conseguita, mentre era il documento di un lavoro compiuto, rappresentava pure nel suo pensiero, un omaggio dovuto alla scienza italiana. E così egli fu, per oltre mezzo secolo, l'uomo più rappresentativo della Geologia che abbia avuto l'Italia.

« A Bologna intanto, nell'*alma mater studiorum*, dove andò come professore di Geologia fin dall'anno 1860, chiamato là da Terenzio Mamiani, appena ventisettenne, fondava il Museo geologico che deve annoverarsi tra i primi d'Italia. Ma se anche qui egli desiderava incidere — come incise — l'opera sua, che i posteri in ogni modo unanimamente gli avrebbero riconosciuta, egli cercò con ogni cura e con grande amore di riunire le più antiche raccolte dell'Aldrovandi soprattutto, come in un piccolo tempio, fin dal 1881, per testimoniare l'omaggio che i presenti devono a chi ci precorse.

« Orme indelebili ha lasciato Giovanni Capellini pur anco nel Museo pisano, dove una grande sala, quella dei Vertebrati, fu intitolata al suo nome e dove sono le sue prime raccolte fatte nei dintorni di Spezia. Con queste prime raccolte, ch'egli poi magistralmente descrisse, s'iniziò la sua importante opera scientifica.

« Ogni uomo lascia l'impronta di sè stesso negli scritti e nelle opere, come Fedro, il Liberto di Augusto, diceva scrivendo al suo amico Particulone 20 secoli prima che Buffon concretasse questo stesso pensiero nella classica frase « lo stile è l'uomo ».

« Giovanni Capellini mantenne pur sempre giovanile la sua tempra e la sua mente talchè, vicino a 90 anni, operava e pensava come un giovine.

« Tale fu, Giovanni Capellini, il Maestro che, come dicevo, a nome anche dei Colleghi De Stefani e Parona, con animo commosso e riverente, ho brevemente commemorato ».

Altra commemorazione legge il Socio Mattirolo del compianto accademico prof. Antonino Borzì, di cui mette in luce la bella figura di scienziato e di artista. Questa commemorazione verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Il Presidente aggiunge che di un altro lutto dell'Accademia deve dar notizia: quello della morte del Socio straniero Bernardo Hasselberg professore di Fisica all'Accademia di Stoccolma, mancato ai vivi il 23 maggio 1922.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Castelnuovo, presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando una Memoria a stampa del prof. Berlese: *Un apparecchio per disegnare al microscopio;* un volume dell'ing. Castelli: *La coltivazione delle miniere di lignite;* e un altro volume di J. Mascart intitolato: *Impressions et observations dans un voyage à Tenerife.*

Il Socio Levi-Civita, per incarico dell'autore, prof. Umberto Cisotti, del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano, presenta in omaggio i primi due volumi di un'opera intitolata *Idromeccanica piana*, e ne dà la seguente notizia:

Si tratta di un'ampia monografia dell'argomento designato dal titolo, la quale raccoglie con criterio sistematico, sotto tre categorie generali, numerosi e importanti problemi, alcuni classici o già da tempo risoluti (con artificî più che con metodi svariati), altri meglio discussi o risoluti per la prima volta in questi ultimi anni, attraverso fervida partecipazione di studiosi di ogni nazione, non ultimi certo gli italiani.

In tutte queste ricerche è dominante il sussidio desunto dalla teoria delle funzioni di variabile complessa.

Tuttavia, per la nitida impostazione dei problemi delle prime due categorie (regione del moto limitata esclusivamente da pareti rigide, oppure da soli peli liberi), bastano i principî classici e un artificio di rappresentazione conforme (Helmholtz-Kirchhoff-Stokes); per i problemi della terza catagoria, che hanno eguale, se non maggiore, importanza pratica (in cui inter-

vengono ad un tempo pareti rigide e peli liberi), si richiedono mezzi analitici alquanto più affinati, introdotti recentemente a proposito delle scìe.

Come è noto, il Cisotti ha apportato un contributo personale cospicuo alla risoluzione matematica e alla illustrazione meccanica di questioni appartenenti a tutti e tre i tipi suaccennati. Tanto più interessante ed utile appare perciò il lavoro di sintesi che egli ci offre, e di cui promette il prossimo compimento in un terzo volume dedicato al moto ondoso.

Il Socio De Marchi fa omaggio di una sua pubblicazione avente per titolo: *Variazioni del livello dell'Adriatico in corrispondenza colle espansioni glaciali.*

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

3 giugno 1922.

Baez R. — Nuevas orientaciones cientificas. Caracas, 1922. 8°, pp. 1-56.

Belluzzi G. — Commemorazione in memoria di Giuseppe Colombo. Milano, 1922. 8°, pp. 1-15.

Berlese A. — Un apparecchio per disegnare al microscopio (Estr. dal « Redia », vol. XV). Firenze, 1922. 8°, pp. 1-8.

Castelli G. — La coltivazione delle miniere di lignite. Bologna, 1922. 8°, pp. 1-477.

Cirini E. — Il principio generale di meccanica. Roma. 1922. 8°, pp. 1-37.

Cisotti U. — Idromeccanica piana. Parte I, II. Milano, 1921-22, 8°, pp. 1-373.

De Marchi L. — Variazioni del livello dell'Adriatico in corrispondenza colle espansioni glaciali (Estr. dagli « Atti della Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana », vol XII-XIII). Padova, 1922. 8°, pp. 1-15.

De Toni G. B. — Frammenti Vinciani. X. Contributo alla conoscenza di fogli mancanti nei manoscritti A ed F di Leonardo da Vinci (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXXI, pp. 35-44). Venezia, 1921. 8°.

De Toni G. B. — Spigolature Aldrovandiane. XIX. Il botanico padovano Giacomo Antonio Cortuso nelle sue relazioni con Ulisse Aldrovandi e con altri naturalisti (Estr. da « Contributo del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti alla celebrazione del VII centenario della Università di Padova », pp. 217-249). Venezia, 1922. 8°.

Fanfani E. — La riforma del calendario. Montepulciano, 1922. 8°, pp. 1-13.

Feruglio G. — Risultati di esperienze con galleggianti per lo studio delle correnti del mare Adriatico negli anni 1910-14. Venezia, 1920. 8°. pp I-XV, 1-129.

Ivaldi G. — La legge del calore secondo il metodo sperimentale e la sua incompatibilità col secondo principio della termodinamica. Milano, 1922. 8°, pp. 1-76

Longo B. — Le piante più notevoli del R. Orto botanico di Pisa. Pisa, 1922. 4°, pp. 1-28.

Mascart J. — Impressions et observations dans un voyage a Tenerife. Paris, s. d. 8°, pp. 1-366.

Pession G. — Sviluppo del servizio radiotelegrafico pubblico in Italia dopo la guerra (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. 5). Varese, 1922. 4°, pp. 1-10.

Peyronel P. — Nuovi casi di rapporti micorizici tra basidiomiceti e fanerogame arboree (Estr. dal « Bollettino della Società Botanica Italiana »). Borgo S. Lorenzo, 1922. 8°, pp 1-10.

Poladas G. — Sviluppo del servizio radiotelegrafico pubblico in Italia dopo la guerra (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. 5). Varese, 1922. 4°, pp. 1-10.

See T. J. J. — New Theory of the Aether (Repr. from « Astronomische Nachrichten », n 5130, pp 282-358, n. 5140, pp. 50-1?8). Kiel, 1922. 4°.

Woltyer J. — On the perturbations in the motion of Hyperion proportional to the first power of Titan's eccentricity (Repr. from « Proceedings », vol. XXI, pp. 1166-1175). Amsterdam, s. d. 8°.

Woltyer J. — The longitude of Hyperion's pericentre and the mass of Titan (Repr. from « Proceedings », vol. XXI, pp. 881-892). Amsterdam, s. d. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 10°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 11°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, Fasc. 11°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 9°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XVIII. Fasc. 12°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

E. **Mancini**, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 12.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXXI.° — Fascicolo 12°

Seduta del 18 giugno 1922.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 6 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 4 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inscritte nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in un sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

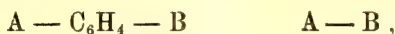
Seduta del 18 giugno 1922.

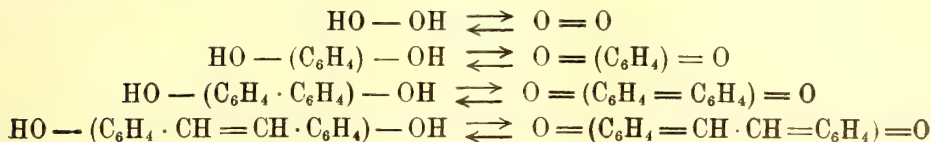
F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sopra le reazioni di alcuni derivati aromatici.* Nota del Socio A. Angeli.

In alcune comunicazioni fatte recentemente a questa Accademia [1], ho posto in rilievo che in molti derivati del benzolo due sostituenti, situati nelle posizioni orto e para di uno stesso anello aromatico, ovvero, anche nelle corrispondenti posizioni di due anelli aromatici differenti, che a loro volta possono essere uniti, ovvero anche separati, da catene non sature caratteristiche, si comportano in molte reazioni come se fossero congiunti direttamente fra di loro,

$$A - C_6H_4 - B \qquad\qquad A - B\,,$$

vale a dire come se gli anelli aromatici non esistessero, come, p. es.,

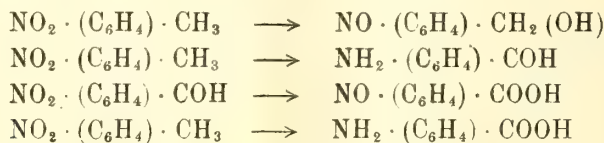
$$HO - OH \rightleftarrows O = O$$
$$HO - (C_6H_4) - OH \rightleftarrows O = (C_6H_4) = O$$
$$HO - (C_6H_4 \cdot C_6H_4) - OH \rightleftarrows O = (C_6H_4 = C_6H_4) = O$$
$$HO - (C_6H_4 \cdot CH = CH \cdot C_6H_4) - OH \rightleftarrows O = (C_6H_4 = CH \cdot CH = C_6H_4) = O$$

Come ho già detto, questo comportamento conduce necessariamente ad ammettere che tali catene, costituite da anelli aromatici, ovvero anche da anelli aromatici e residui non saturi, possiedano un forma di « conducibilità » ;

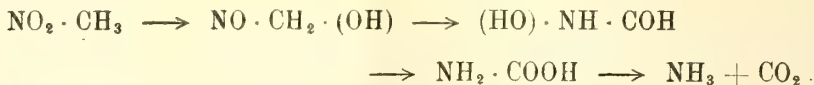
[1] A. Angeli, R. A. L. *26* (1917), 1°, 480; *29* (1920), 1°, 375; *30* (1921), 2°, 341. Confr. anche: Ciamician e Ciusa R. A. L. *30* (1921), 1°, 72.

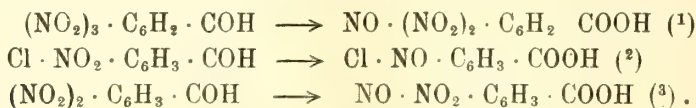
da quanto finora mi risulta, sembra invece che i gruppi saturi interrompano ogni relazione fra i sostituenti. Una analoga relazione pare che si possa estendere anche ad alcune proprietà fisiche e precisamente al colore, come a suo tempo ho già esposto.

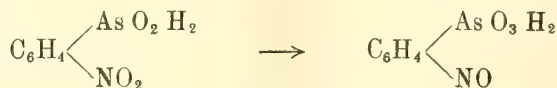
Per dare maggiore estensione e generalità a questa regola, nella presente Nota riporterò un'altra serie di esempi che io ho desunti dalle ricerche eseguite in precedenza da altri sperimentatori.

1. Ho già accennato alle migrazioni di atomi di ossigeno, che possono avvenire sotto l'influenza di alcuni reattivi oppure anche della luce, da un residuo nitrico ad un gruppo metilico, situati sempre in posizione orto ovvero para di un anello aromatico, quali p. es.

$$NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot CH_3 \longrightarrow NO \cdot (C_6H_4) \cdot CH_2(OH)$$
$$NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot CH_3 \longrightarrow NH_2 \cdot (C_6H_4) \cdot COH$$
$$NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot COH \longrightarrow NO \cdot (C_6H_4) \cdot COOH$$
$$NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot CH_3 \longrightarrow NH_2 \cdot (C_6H_4) \cdot COOH$$

le quali trovano un perfetto riscontro in quelle che può subire il nitrometano, nel quale il gruppo nitrico ed il metile sono congiunti direttamente fra di loro:

$$NO_2 \cdot CH_3 \longrightarrow NO \cdot CH_2 \cdot (OH) \longrightarrow (HO) \cdot NH \cdot COH$$
$$\longrightarrow NH_2 \cdot COOH \longrightarrow NH_3 + CO_2 .$$

Una serie di trasposizioni analoghe è stata effettuata per mezzo della luce; alcune procedono in modo simile a quella studiata da Ciamician e Silber per il caso della o-nitrobenzaldeide, come. p es.,

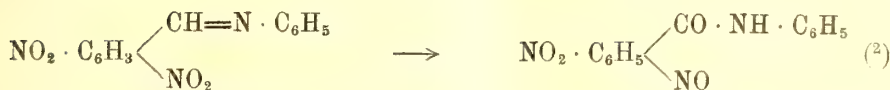
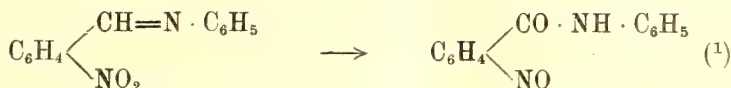
$$(NO_2)_3 \cdot C_6H_2 \cdot COH \longrightarrow NO \cdot (NO_2)_2 \cdot C_6H_2 \cdot COOH \text{ (}^1\text{)}$$
$$Cl \cdot NO_2 \cdot C_6H_3 \cdot COH \longrightarrow Cl \cdot NO \cdot C_6H_3 \cdot COOH \text{ (}^2\text{)}$$
$$(NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot COH \longrightarrow NO \cdot NO_2 \cdot C_6H_3 \cdot COOH \text{ (}^3\text{)} .$$

Lo stesso fanno alcuni derivati arsenicali ortosostituiti, come, p. es., ha trovato Karrer [4]:

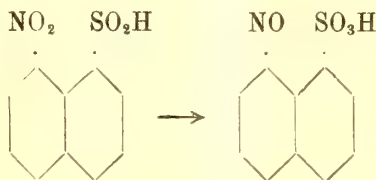
$$C_6H_4\langle^{As\,O_2\,H_2}_{NO_2} \longrightarrow C_6H_4\langle^{As\,O_3\,H_2}_{NO}$$

e nello identico modo si comportano i derivati anilici delle aldeidi o-nitro-

[1] F. Sachs e E. Sichel, Berichte *36* (1903) 962.
[2] F. Sachs e E. Sichel, Berichte *36* (1903) 3302.
[3] P. Cohn e P. Friedländer, Berichte *35* (1902) 1265.
[4] Berichte, *47* (1914), 1783.

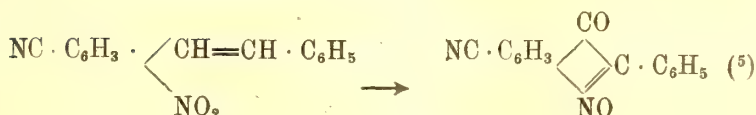
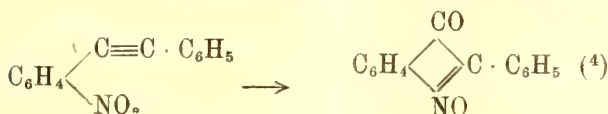
benzoiche:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH{=}N\cdot C_6H_5\\NO_2\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\cdot NH\cdot C_6H_5\\NO\end{matrix}\right. \quad (1)$$

$$NO_2\cdot C_6H_3\left\langle\begin{matrix}CH{=}N\cdot C_6H_5\\NO_2\end{matrix}\right. \longrightarrow NO_2\cdot C_6H_5\left\langle\begin{matrix}CO\cdot NH\cdot C_6H_5\\NO\end{matrix}\right. \quad (2)$$

Anche due sostituenti in posizione « peri » della naftalina, che in molte reazioni si comportano come se fosssero situati in posizione orto, possono subire una trasposizione analoga [3]:

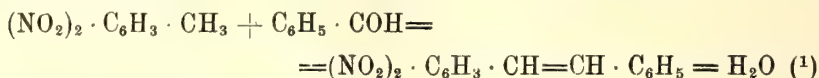
NO_2 SO_2H → NO SO_3H

Nello stesso senso sono senza dubbio da intendersi anche le reazioni

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C{\equiv}C\cdot C_6H_5\\NO_2\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CO\\NO\end{matrix}\right\rangle C\cdot C_6H_5 \quad (4)$$

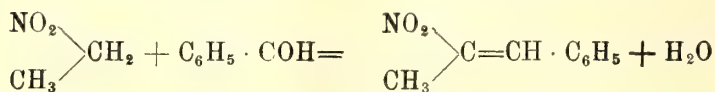
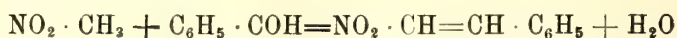
$$NC\cdot C_6H_3\cdot\left\langle\begin{matrix}CH{=}CH\cdot C_6H_5\\NO_2\end{matrix}\right. \longrightarrow NC\cdot C_6H_3\left\langle\begin{matrix}CO\\NO\end{matrix}\right\rangle C\cdot C_6H_5 \quad (5)$$

Senza dubbio a trasposizioni di questa natura è dovuto anche l'imbrunimento che subisce il tritolo (trinitrotoluolo) sotto l'influenza della luce.

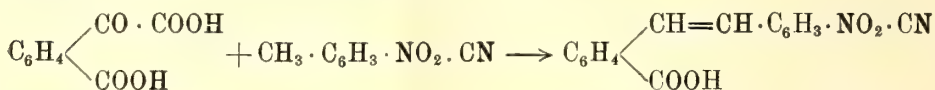
(1) F. Sachs e R. Kempf, Beriche, *37* (1904), 2704.
(2) F. Sachs, Berichte *36* (1903), 4373.
(3) A. Reissert, Berichte *55* (1922), 863.
(4) P. Pfeiffer, Berichte *45* (1912), 1819. A questo proposito devo ricordare che la struttura di questi isatogeni, scoperti da A. von Baeyer, venne stabilita da me ancora nell'anno 1907 (R. A. L. *15*, 2°, 761) e non trovo quindi giusto quanto asseriscono G. Heller e W. Boessneck [Berichte, *55* (1922), 474] che queste sostanze sieno state scoperte da P. Pfeiffer [Annalen *411* (1916), 72], il quale avrebbe altresì fissata la loro struttura da me proposta per il primo.
(5) R. Stoermer e H. Oehlert, Berichte *55* (1922), 1236.

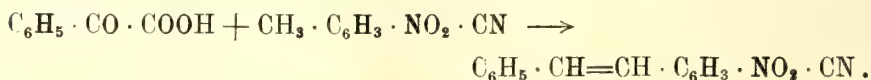
2. È noto che i gruppi metilici, etilici, etc., uniti all'anello benzolico hanno, in generale, il comportamento delle paraffine, vale a dire si mostrano molto indifferenti all'azione dei varî reattivi. Anche in questo caso, però, quando nelle posizioni orto e para del gruppo alcoolico si trova un residuo negativo (NO_2, $—CN$, $—CO_2 \cdot CH_3$, $—SO_2 \cdot NH_2$), tali gruppi alifatici acquistano una grande facilità di reagire, come lo mostrano i seguenti esempî:

$$(NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH_3 + C_6H_5 \cdot COH = \\ = (NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH{=}CH \cdot C_6H_5 = H_2O \ (^1)$$

che sono perfettamente analoghi a quelli dei corrispondenti nitroderivati della serie alifatica ([2]):

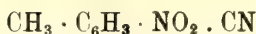
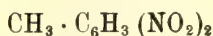
$$NO_2 \cdot CH_3 + C_6H_5 \cdot COH = NO_2 \cdot CH{=}CH \cdot C_6H_5 + H_2O$$

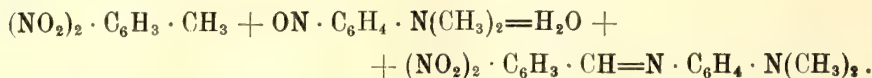
$$\begin{matrix} NO_2 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!CH_2 + C_6H_5 \cdot COH = \begin{matrix} NO_2 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C{=}CH \cdot C_6H_5 + H_2O$$

Invece delle aldeidi, si possono impiegare anche gli acidi chetonici, quali, p. es., l'acido ftalonico ([3])

$$C_6H_4\!<\!\begin{matrix} CO \cdot COOH \\ COOH \end{matrix} + CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 . CN \longrightarrow C_6H_4\!<\!\begin{matrix} CH{=}CH \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN \\ COOH \end{matrix}$$

oppure l'acido fenilgliossilico

$$C_6H_5 \cdot CO \cdot COOH + CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN \longrightarrow \\ C_6H_5 \cdot CH{=}CH \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN .$$

Nello stesso modo reagiscono anche i toluoli:

$$CH_3 \cdot C_6H_3 (NO_2)_2$$

$$CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 . CN$$

I nitrosoderivati, come era da aspettarsi, si comportano esattamente come le aldeidi ([4]):

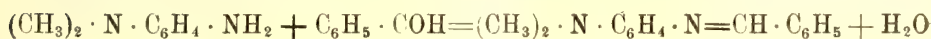
$$(NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH_3 + ON \cdot C_6H_4 \cdot N(CH_3)_2 = H_2O + \\ + (NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH{=}N \cdot C_6H_4 \cdot N(CH_3)_2 .$$

(1) I. Thiele e R. Escales, Berichte *34* (1901), 2842.
(2) Berichte *32* (1899), 1293.
(3) P. Pfeiffer e K. Matton, Berichte *44* (1911), 1113.
(4) Sachs e Kempf, Berichte *35* (1902), 1224.

3. Anche rispetto agli ossidanti, i gruppi negativi influiscono nello stesso modo, vale a dire favoriscono, p. es., l'ossidazione dei metili situati in posizione orto [1]:

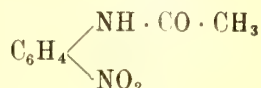
$$C_6H_4\langle^{CH_3}_{NO_2} \longrightarrow C_6H_4\langle^{COOH}_{NO_2}$$

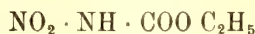
$$C_6H_4\langle^{CH_3}_{SO_3H} \longrightarrow C_6H_4\langle^{COOH}_{SO_3H}$$

4. Come è noto, le aldeidi ed i chetoni aromatici reagiscono, in generale, in modo alquanto lento con l'anilina; invece la dimetilparafenilendiammina reagisce con grande rapidità, precisamente come fanno le idrazine [2]:

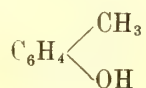
$$(CH_3)_2 \cdot N \cdot C_6H_4 \cdot NH_2 + C_6H_5 \cdot COH = (CH_3)_2 \cdot N \cdot C_6H_4 \cdot N{=}CH \cdot C_6H_5 + H_2O$$

vale a dire come se i due residui azotati fossero uniti direttamente fra di loro.

5. Delle tre ammidi

$$C_6H_4\langle^{NH \cdot CO \cdot CH_3}_{NO_2}$$

solamente i derivati orto e para sono in grado di fornire un sale sodico e da questo punto di vista si comportano come il nitrouretano

$$NO_2 \cdot NH \cdot COO\ C_2H_5$$

nel quale il gruppo nitrico è unito al residuo ammidico.

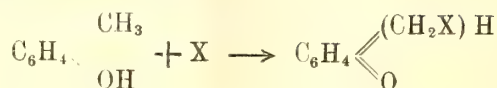
6. Come ha dimostrato K. Auwers, dei tre isomeri

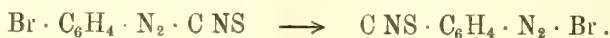
$$C_6H_4\langle^{CH_3}_{OH}$$

solamente i derivati orto e para per azione degli alogeni sono in grado di

[1] Bischoff e Rach, Berichte *17* (1884), 2788.

[2] A. Calm, Berichte *17* (1884), 2398.

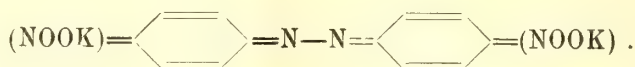
dare i cosiddetti pseudofenoli [1]:

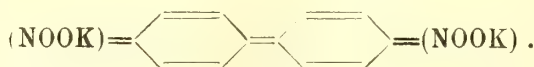
$$C_6H_4\begin{matrix}CH_3\\OH\end{matrix} + X \longrightarrow C_6H_4\begin{matrix}\diagup(CH_2X)\,H\\ \diagdown O\end{matrix}$$

7. Come ha posto in rilievo B. Hirsch, i soli isomeri orto e para possono subire la trasposizione [2]:

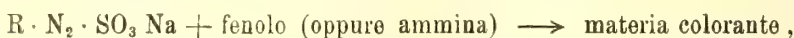
$$Br \cdot C_6H_4 \cdot N_2 \cdot CNS \longrightarrow CNS \cdot C_6H_4 \cdot N_2 \cdot Br\,.$$

8. I. Meisenheimer ha trovato [3] che il p-binitrobenzolo, per riduzione in presenza di potassa, fornisce facilmente il sale

$$(NOOK)=\langle\overline{\underline{\quad\quad}}\rangle=(NOOK)$$

che ha una costituzione perfettamente analoga, secondo Freudler e Beranger, Green e Grandmougin, a quella del sale di potassio del p-binitroidrazobenzolo [4]:

$$(NOOK)=\langle\overline{\underline{\quad\quad}}\rangle=N-N=\langle\overline{\underline{\quad\quad}}\rangle=(NOOK)\,.$$

Ciò lascia prevedere che anche dal p-p-binitrodifenile sia possibile ottenere un sale della stessa forma:

$$(NOOK)=\langle\overline{\underline{\quad\quad}}\rangle=\langle\overline{\underline{\quad\quad}}\rangle=(NOOK)\,.$$

9. Sono stati proposti alcuni processi fotografici fondati sopra la reazione che si compie per mezzo della luce [5]

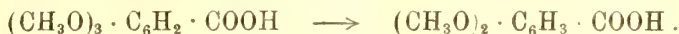
$$R \cdot N_2 \cdot SO_3Na + \text{fenolo (oppure ammina)} \longrightarrow \text{materia colorante}\,,$$

ed un processo analogo è stato proposto da Ruff e Stein [6]; questi ultimi autori hanno anche studiato l'influenza che la posizione e natura dei sostituenti esercita sopra questa reazione, ed hanno trovato che:

(1) Berichte, *32* (1899), 2978, 2987, 3583; *34* (1901), 4256.
(2) Berichte, *31* (1898), 1255.
(3) Berichte, *39* (1906), 2526.
(4) O. N. Witt e E. Kopetschni, Berichte *45* (1912), 1140.
(5) A. Feer. Brevetto germanico N. 53.455, Kl. 57 (1879), analogo al brevetto preso un anno dopo da Green, Cross e Bewan.
(6) Berichte, *34* (1902), 1671.

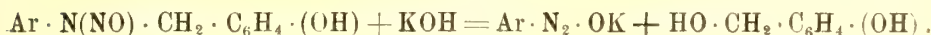
a) il gruppo negativo NO_2 aumenta la sensibilità alla luce in orto e para e non in meta;

b) il gruppo positivo CH_3 indebolisce la sensibilità alla luce in orto e para e non in meta.

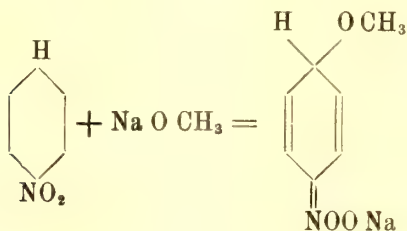
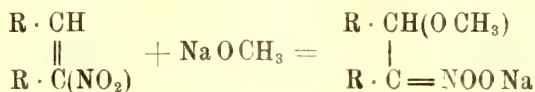
10. Come è noto, i residui ossialchilici uniti direttamente ad un anello aromatico sono molto stabili ed in generale, per poterli eliminare o saponificare, è necessario ricorrere all'impiego di reattivi energici, operando a temperature elevate. Quando, invece, in posizione para, rispetto a tali gruppi, esiste un gruppo negativo, questi perdono, in molti casi, ogni carattere di stabilità. Un bell'esempio ci viene dato dalle esperienze di H. Thoms e W. Siebeling [1] i quali hanno trovato che, riducendo con alcool e sodio l'etere trimelitico dell'acido pirogallolcarbonico, l'ossimetile in para rispetto al carbossile viene facilmente eliminato:

$$(CH_3O)_3 \cdot C_6H_2 \cdot COOH \longrightarrow (CH_3O)_2 \cdot C_6H_3 \cdot COOH .$$

Si sa, inoltre, che anche gli eteri alchilici dei fenoli vengono facilmente saponificati quando nelle posizioni orto o para si trovino nitrogruppi.

11. Come hanno trovato Bamberger e Müller [2], delle arilnitrosammine benzilate solamente i derivati orto e para vengono saponificati dagli alcali con formazione di isodiazotati:

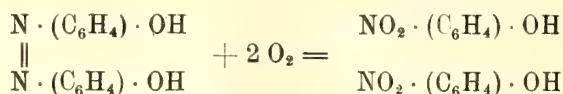
$$Ar \cdot N(NO) \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot (OH) + KOH = Ar \cdot N_2 \cdot OK + HO \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot (OH) .$$

12. È noto che alcuni nitroderivati alifatici non saturi, rispetto agli alcoolati, si comportano come fanno molti nitroderivati aromatici; infatti dapprima I. Thiele [3] ed in seguito Fr. Heim [4] e Meinsenheimer e Heim [5] hanno realizzate le trasformazioni:

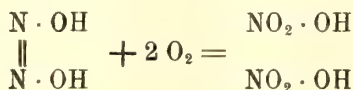
$$\begin{matrix} R \cdot CH \\ \| \\ R \cdot C(NO_2) \end{matrix} + NaOCH_3 = \begin{matrix} R \cdot CH(OCH_3) \\ | \\ R \cdot C = NOONa \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H \\ \text{(anello benzenico)} \\ NO_2 \end{matrix} + Na\,O\,CH_3 = \begin{matrix} H \quad OCH_3 \\ \text{(anello chinoide)} \\ \| \\ NOO\,Na \end{matrix}$$

[1] Berichte, *44* (1912), 2134.
[2] Annalen *313* (1900), 102.
[3] Berichte *32* (1899), 1293.
[4] Berichte *44* (1911), 2013.
[5] Annalen *355* (1907), 275.

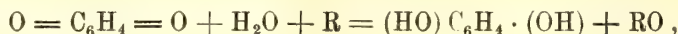
Questi prodotti presentano anche analogia con i composti di addizione che gli eteri nitrosi e nitrici forniscono con gli alcoolati.

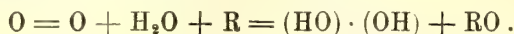
13. Recentemente D. Bigiavi, G. Carrara ed io [1], studiando l'azione degli ossidanti e dell'acido nitroso sopra gli azofenoli, abbiamo trovato che il p-p-diossiazofenolo può fornire il p-nitrofenolo

$$\begin{matrix} N \cdot (C_6H_4) \cdot OH \\ \| \\ N \cdot (C_6H_4) \cdot OH \end{matrix} + 2\,O_2 = \begin{matrix} NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot OH \\ \\ NO_2 \cdot (C_6H_4) \cdot OH \end{matrix}$$

e che in modo perfettamente analogo, come ci siamo espressamente assicurati, procede l'ossidazione dell'acido iponitroso quando si operi prima in soluzione alcalina (per evitare altre decomposizioni) e successivamente in mezzo acido:

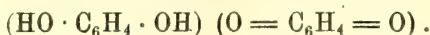
$$\begin{matrix} N \cdot OH \\ \| \\ N \cdot OH \end{matrix} + 2\,O_2 = \begin{matrix} NO_2 \cdot OH \\ \\ NO_2 \cdot OH \end{matrix}$$

In questo caso, al p-p-diossiazofenolo corrisponde l'acido iponitroso, ed al p-nitrofenolo l'acido nitrico.

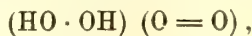
14. Accennerò infine che la formazione dell'idrochinone durante i processi di ossidazione determinati dal chinone

$$O = C_6H_4 = O + H_2O + R = (HO)\,C_6H_4 \cdot (OH) + RO\,,$$

corrisponde a quella dell'acqua ossigenata che si forma durante le ossidazioni che si compiono in presenza di ossigeno:

$$O = O + H_2O + R = (HO) \cdot (OH) + RO\,.$$

Come ha dimostrato W. Manchot [2], in molti casi la reazione procede così netta che il rendimento in acqua ossigenata è quantitativo.

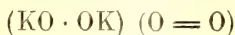
È noto, inoltre, che i chinoni con i corrispondenti idrochinoni forniscono facilmente quei composti molecolari caratteristici dei quali in questi ultimi anni si sono occupati principalmente Willstätter [3] e P. Pfeiffer [4]; così chinone ed idrochinone dànno il chinidrone

$$(HO \cdot C_6H_4 \cdot OH)\ (O = C_6H_4 = O)\,.$$

Si comprende subito che se acqua ossigenata ed ossigeno, nelle opportune condizioni, sono in grado di fornire un prodotto analogo:

$$(HO \cdot OH)\ (O = O)\,,$$

si potrebbe intendere anche la formazione dell'ozono per eliminazione di una

[1] R. A. L. *31* (1922), 1° semestre.
[2] Berichte, *39* (1906), 3510.
[3] Berichte, *41* (1908), 1458.
[4] Annalen, *404* (1914), 1; *412* (1916), 253.

molecola d'acqua del composto formatosi in una prima fase. Ma se ancora non si conosce tale complesso allo stato libero, è interessante notare il fatto che il potassio, bruciando all'aria, fornisce l'ossido K_2O_4, al quale W. Traube, in base ad una serie di esperienze eseguite con la valentia che distingue questo chimico, ha assegnato la struttura

$$(KO \cdot OK)\ (O = O)$$

che corrisponde al sale di potassio di tale complesso. La sua forma è analoga a quella dei chinidroni: questi ultimi, come è noto, si possono scindere facilmente nei loro componenti

$$(HO \cdot C_6H_4 \cdot OH)\ (O = C_6H_4 = O) = HO \cdot C_6H_4 \cdot OH + O = C_6H_4 = O\,,$$

nello stesso modo che il sale studiato da Traube, per azione degli acidi, fornisce esattamente una molecola di acqua ossigenata ed una di ossigeno,

$$(HO \cdot OH)\ (O = O) = HO \cdot OH + O = O\,,$$

che perciò corrispondono rispettivamente all'idrochinone ed al chinone. La analogia si può, dunque, estendere anche nel caso di tali composti che a prima vista si presentano così disparati fra di loro.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota III del Corrispondente Luigi Berzolari.

10. Per la regola di cui già abbiamo fatto uso, le rette singolari di Θ si ottengono associando alla (11) un'altra equazione, cui può darsi la forma

$$p_{31}\,p_{24}\left[(p_{12}-p_{34})^4-(p_{31}^2-p_{24}^2)^2\right] \\ -(p_{12}-p_{34})^2\left[4\,p_{31}^2\,p_{24}^2-(p_{31}^2-p_{24}^2)^2\right]=0\,.$$

Dalle due equazioni si trae

$$p_{31}\,p_{24}\,(p_{12}-p_{34})^4=0\,,$$

perciò la congruenza delle rette singolari di Θ si scompone nelle tre rappresentate dalle coppie di equazioni

$$\begin{aligned} p_{31}=0 \quad &,\quad p_{24}=0\,;\\ p_{12}-p_{34}=0 \quad &,\quad p_{31}+p_{24}=0\,;\\ p_{12}-p_{34}=0 \quad &,\quad p_{31}-p_{24}=0\,;\end{aligned}$$

ognuna contata otto volte. Ma, per le (5), queste non sono che le congruenze lineari aventi per direttrici $d_1\,d_1'$, $d_2\,d_2'$, $d_3\,d_3'$, e dal n. precedente, come pure dalla stessa (11'), risulta che ogni loro retta è anzi *doppia* per il complesso. Dunque:

Il complesso Θ non ha altre rette singolari che doppie, e sono tutte quelle delle congruenze lineari aventi per direttrici $d_1 d'_1$, $d_2 d'_2$, $d_3 d'_3$.

Le generatrici del regolo S sono anzi rette quadruple per il complesso.

11. Consideriamo il cono di Θ avente il vertice in un punto y di Q. Non si vien meno alla generalità supponendo y sulla generatrice $x_2 = x_3 = 0$ di S, e in tal caso il cono ha l'equazione

$$(y_4^2 x_2^2 - y_1^2 x_3^2)^2 + 4\, y_1\, y_4\, x_2\, x_3\, (y_1 x_2 + y_4 x_3)^2 = 0\,.$$

Dunque *il cono di Θ avente il vertice in un punto generico y di Q si spezza in quattro piani, che passano per la generatrice del regolo S uscente da y e formano un gruppo equianarmonico.*

Se y giace sopra una delle rette $e_1, \dots, e_4, e'_1, \dots, e'_4$, e soltanto in questo caso, uno dei quattro piani è quello che tocca Q in y.

Il cono di Θ col vertice in un punto y di una delle due rette d_i, d'_i $(i = 1, 2, 3)$ si riduce al piano che da y proietta l'altra retta, contato quattro volte. È questo il solo caso in cui i quattro piani non sono distinti.

12. Un altro notevole complesso del quarto grado, covariante della terna $K_1 K_2 K_3$, si ottiene nel modo seguente.

Rappresentiamo di nuovo una generatrice arbitraria di S' con le (4). Perchè essa sia appoggiata ad una retta r di coordinate p_{ik}, dovrà aversi

$$p_{24}\, \lambda^2 + (p_{12} - p_{34})\, \lambda + p_{31} = 0\,. \tag{12}$$

Dicendo λ_1 e λ_2 le radici di questa equazione, le due generatrici di S' appoggiate ad r determinano nell'involuzione J (n. 2) due gruppi, che, per le (5), sono dati dalle equazioni

$$\lambda_1^2 \lambda^4 - (\lambda_1^4 + 1)\, \lambda^2 + \lambda_1^2 = 0\,, \qquad \lambda_2^2 \lambda^4 - (\lambda_2^4 + 1)\, \lambda^2 + \lambda_2^2 = 0\,.$$

I due gruppi sono apolari quando

$$\lambda_1^4 \lambda_2^4 + \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 12\, \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1 = 0\,,$$

ossia, per la (12), quando

$$(p_{12} - p_{34})^4 + (p_{31}^2 + p_{24}^2)^2 + 12\, p_{31}^2 p_{24}^2 - 4\, p_{31}\, p_{24}\, (p_{12} - p_{34})^2 = 0\,,$$

alla quale, avendosi

$$p_{31}^2 + p_{24}^2 = \frac{1}{2}(K_2^2 - K_3^2)\,, \qquad p_{31}\, p_{24} = -\frac{1}{4}(K_2^2 + K_3^2)\,,$$

può anche darsi la forma

$$\Omega \equiv K_1^4 + K_2^4 + K_3^4 + K_2^2 K_3^2 + K_3^2 K_1^2 + K_1^2 K_2^2 = 0\,. \tag{13}$$

Questa è dunque l'equazione del complesso Ω di quarto grado, luogo delle rette appoggiate a due generatrici del regolo S', che determinano nell'involuzione J due gruppi tra loro apolari.

Meritano di essere rilevate le seguenti identità, che permettono di rappresentare sotto varie forme, e in relazione con i complessi di primo e secondo grado considerati nei nn. 7 e 8, le equazioni di Θ e Ω:

$$(14)\qquad \Omega = K^2 - \Theta = 3\,\Theta - L_1 L_2 L_3 L_4 = K' K'' + 2\,\Theta$$

$$= \frac{1}{4}(3\,K^2 - L_1 L_2 L_3 L_4) = \frac{1}{4}(L_1^4 + L_2^4 + L_3^4 + L_4^4) - 5\,\Theta\,.$$

Ne segue, ad es., che *il cono di* Ω *avente per vertice un punto generico* y *ha tra i suoi piani bitangenti i piani focali di* y *rispetto ai complessi lineari* $L_1, \ldots, L_4$, *essendo generatrici di contatto quelle stesse del cono di* Θ *avente il vertice* y (*quindi otto generatrici del cono circoscritto da* y *a* Q).

Tagliando il detto cono col piano yd_1, risulta $K_1^4 + K_2^4 = 0$, dunque:

I piani che da un punto generico y *proiettano le sei rette* $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ *secano il cono di* Ω *avente il vertice* y *secondo quattro rette formanti un gruppo armonico.*

13. Volendo le rette singolari di Ω, cercheremo, più in generale, quelle di un complesso qualunque del fascio

$$(15)\qquad K_2^2 K_3^2 + K_3^2 K_1^2 + K_1^2 K_2^2 + c\,(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4) = 0$$

determinato da Θ e Ω. A tal fine occorre associare alla (15) un'altra equazione, a cui, dopo alcune trasformazioni, può darsi la forma

$$(16)\qquad 4\,c^2 (K_1^6 + K_2^6 + K_3^6) + (4\,c + 1)(K_1^4 K_2^2 + \cdots) + 6\,K_1^2 K_2^2 K_3^2 = 0\,.$$

Ora si ha l'identità

$$K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots = K(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4)\,,$$

dalla quale segue

$$K\,[\Theta + c\,(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4)] = K\Theta + c\,(K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots)\,,$$

quindi per le rette del complesso (15) si ha pure l'identità

$$K\Theta + c\,(K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots) = 0\,.$$

Ma è pure identicamente

$$K_1^4 K_2^2 + \cdots = K\Theta - 3\,K_1^2 K_2^2 K_3^2\,,$$

e, per mezzo di questa e della precedente, la (16) diviene

$$(2\,c - 1)\,[(2\,c + 1)\,K\Theta - 3\,(2\,c - 1)\,K_1^2 K_2^2 K_3^2] = 0\,.$$

Si può escludere che sia $2\,c - 1 = 0$, giacchè in tale ipotesi il complesso (15), riducendosi a K contato due volte, non ha interesse per la presente questione. D'altra parte è identicamente

$$(17)\qquad K\Theta = (K_2^2 + K_3^2)(K_3^2 + K_1^2)(K_1^2 + K_2^2) + K_1^2 K_2^2 K_3^2\,,$$

quindi come risultato definitivo si ha che *le rette singolari del complesso* (15) *sono quelle ch'esso ha in comune col complesso di 6° grado*

$$(2c+1)(K_2^2+K_3^2)(K_3^2+K_1^2)(K_1^2+K_2^2)-4(c-1)K_1^2K_2^2K_3^2=0 .$$

Per $c=1$ si deduce:

Le rette singolari del complesso Ω *costituiscono 24 congruenze lineari, le quali hanno per direttrici una delle rette* $d_i\,d'_i$ $(i=1,2,3)$ *e risp. una delle quattro rette formanti quel gruppo armonico dell'involuzione* J *che è coordinato* (*n.* 2) *alla coppia* $d_i\,d'_i$.

14. Escluso che si tratti di Θ, le rette che, uscendo da un punto y, si appoggiano alle coppie di rette $d_i\,d'_i$, appartengono al cono del complesso (15) avente il vertice y soltanto quando y giaccia su Q.

Se y è su Q, e, com'è lecito, si suppone $y_2=y_3=0$, il cono anzidetto si spezza nei quattro piani aventi l'equazione complessiva

$$\begin{aligned}[c\,y_1^4+(2c-1)\,y_4^4]\,x_2^4+4\,(c-1)\,y_1^3\,y_4\,x_2^3\,x_3 \\ +6\,(3c-1)\,y_1^2\,y_4^2\,x_2^2\,x_3^2+4\,(c-1)\,y_1\,y_4^3\,x_2\,x_3^3 \\ +[(2c-1)\,y_1^4+c\,y_4^4]\,x_3^4=0 .\end{aligned}$$

I due invarianti del primo membro sono

$$i=2\,c(2c-1)\,(y_1^8+14\,y_1^4\,y_4^4+y_4^8)\,,$$

$$j=6\,(c+1)\,(2c-1)^2\,y_1^2\,y_4^2\,(y_1^4-y_4^4)^2\,,$$

e il discriminante è

$$\begin{aligned}(2c-1)^3\,[c^3\,(y_1^8+14\,y_1^4\,y_4^4+y_4^8)^3 \\ -27\,(c+1)^2\,(2c-1)\,y_1^4\,y_4^4\,(y_1^4-y_4^4)^4]\,,\end{aligned}$$

che per il complesso Ω si riduce al quadrato dell'espressione

$$(y_1^4+y_4^4)\,(y_1^4+6\,y_1^2\,y_4^2+y_4^4)\,(y_1^4-6\,y_1^2\,y_4^2+y_4^4)\,.$$

Ne risultano le proprietà:

Per un complesso arbitrario del fascio (15) *il cono avente per vertice un punto* y *di* Q *si scompone in quattro piani passanti per la generatrice di* S *uscente da* y (*i quali costituiscono un gruppo dell'involuzione* J *solo quando si tratti del complesso* Ω).

I quattro piani formano un gruppo armonico quando y *giace sopra una delle rette* $d_i\,d'_i$ (*a meno che non sia* $c=-1$, *nel qual caso il complesso si scinde nei due complessi quadratici* K′ *e* K″, *e i quattro piani sono armonici qualunque sia il punto* y *di* Q: cfr. la fine del n. 8), *e formano un gruppo equianarmonico quando* y *sta sopra una delle rette* $e_i\,e'_i$ (*a meno che non sia* $c=0$, *ossia il complesso non coincida con* Θ,

nel qual caso, come si vide al n. 11, i quattro piani sono equianarmonici dovunque sia y su Q).

Per il complesso Ω *i quattro piani non sono distinti soltanto se y si sceglie su una delle dodici rette* $a_i a'_i a''_i$ *(n. 2): in tal caso gli stessi piani coincidono a due a due con quelli che da y proiettano le rette della coppia coordinata* $d_i d'_i$.

Se poi, ancora per Ω, *il punto y si prende sopra una delle* $d_i d'_i$, *i quattro piani proiettano da y le quattro rette costituenti il gruppo armonico dell'involuzione* J *coordinato alla coppia fissata* $d_i d'_i$ (1).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sui satelliti retrogradi.* Nota II di P. Burgatti, presentata dal Corrisp. G. Armellini.

Per la determinazione delle orbite circolari, basta esprimere che v'ha equilibrio fra le tre forze agenti su T in tale moto: la forza attrattiva di P, la forza centrifuga e la forza di Coriolis considerata nella Nota precedente; la quale, si tenga presente, è diretta verso P nel moto retrogrado, in senso opposto nel moto diretto. Per conseguenza, posto $8\,k\,m\,\omega = v_0^3$, si ha: pel moto retrogrado

$$(1)\qquad 2\omega v\varrho^2 - v^2\varrho + km = 0\,,\quad \text{da cui}\quad \varrho = \frac{v^2 \pm \sqrt{v(v^3 - v_0^3)}}{4\omega v}\,,$$

pel moto diretto

$$(2)\qquad 2\omega v\varrho^2 + v^2\varrho - km = 0\,,\quad \text{da cui}\quad \varrho = \frac{-v^2 + \sqrt{v(v^3 + v_0^3)}}{4\omega v}\,.$$

Le orbite retrograde esistono solo per $v > v_0$, *ed in corrispondenza ad una data velocità* $v > v_0$ *se ne hanno due: una interna alla circonferenza di raggio* $\varrho_0 = v_0 : 4\omega$, *l'altra esterna.* Questa circonferenza, corrispondente al minimo valore $v = v_0$ della velocità, sarà chiamata *l'orbita singolare*, o indicata semplicemente con (Σ).

Le orbite dirette, invece, possono essere percorse con qualunque velocità, e ad ogni velocità ne corrisponde una sola.

Quelle corrispondenti a $v > v_0$ stanno nell'interno della circonferenza di raggio $\varrho' = 0{,}42 \cdot v : 4\pi$; le altre, percorse, con velocità minore di v_0, al

(1) Quest'ultima proprietà può anche dedursi trasformando per dualità quella con cui si chiude il n. 12.

di fuori. Indicheremo con (D) cotesta circonferenza. Manifestamente non esiste un'orbita che possa essere percorsa con la stessa velocità nei due sensi.

Esaminando le cose più da vicino si vede che a parità di orbita il moto retrogrado è più veloce del moto diretto, ed anzi all'esterno di (Σ) è molto più veloce. Tutto questo intanto dà ragione subito d'un risultato del Moulton, il quale dimostrò, con lunghi calcoli, ispirati al metodo di Darwin, che l'orbita del IX satellite di Giove non potrebbe essere percorsa in senso diretto, per mancanza di stabilità.

Se poi si calcola la costante h dell'energia (che qui sarebbe l'energia rispetto al pianeta) si trova, tenendo conto delle (1) e (2), che *è positiva per le orbite retrograde esterne all'orbita singolare*; mentre è negativa per le orbite retrograde interne e per tutte le orbite dirette. Questo è un carattere differenziale, molto notevole, che distingue le orbite retrograde esterne a (Σ) da tutte le altre. In un certo senso esse hanno, rispetto al pianeta, un comportamento che si potrebbe dire *iperbolico*. Da ciò si è condotti a fare questa riflessione: o in natura non possono esistere satelliti retrogradi (per un dato pianeta) esterni a (Σ); o, se esistono, essi hanno effettivamente un carattere che si potrebbe attribuire ad una loro origine extra-planetaria. Per decidere intorno a questo punto occorre calcolare, nei casi reali, l'orbita singolare. Considereremo i quattro pianeti maggiori e più lontani dal Sole. Conviene anzitutto calcolare il raggio ϱ_t dell'orbita (Σ) per la Terra, benchè questa non sia presa qui in considerazione. Prendendo i valori di ϱ_0 e v_0 dati nella Nota precedente, si trova subito

$$2\varrho_t = \sqrt[3]{\frac{km_t}{\omega_t^2}};$$

dove l'indice t sta a indicare che si tratta della Terra; come in seguito gli indici g, s, u, n si riferiranno a Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Nelle unità, massa solare, orbita terrestre (raggio medio) giorno solare medio, si ha

$$k = 0{,}0002958 \quad , \quad m_t = 1:354710 \quad , \quad \omega = 2\pi:365 .$$

Fatto il calcolo e ridotto il risultato a chilometri, si trova

$$\varrho_t = 1.052.000 \text{ km}.$$

Dopo ciò, per un altro pianeta essendo

$$2\varrho_p = \sqrt[3]{\frac{km_p}{\omega_p^2}},$$

si deduce

$$\frac{\varrho_p}{\varrho_t} = \sqrt[3]{\varepsilon_p}\sqrt[3]{\frac{T_p^2}{T_t^2}} = \sqrt[3]{2_p}\,\frac{a_p}{a_t}, \quad (\varepsilon_p = m_p : m_t),$$

ove T_p e T_t sono i periodi e a_p e a_t i raggi medi delle orbite. Ora, pei

pianeti in esame vale la seguente tabella:

$\sqrt[3]{\varepsilon_g} = 6{,}8$	$\sqrt[3]{\varepsilon_s} = 4{,}55$	$\sqrt[3]{\varepsilon_u} = 2{,}43$	$\sqrt{\varepsilon_n} = 2{,}57$
$a_g : a_t = 5{,}2$	$a_s : a_t = 9{,}54$	$a_u : a_t = 19{,}19$	$a_n : a_t = 30.07$

In base a ciò si ottengono i risultati qui appresso indicati:

raggio di (Σ) in km.	raggio di (D) in km.
$\varrho_g = 37.872.000$	$\varrho'_g = 16.284.960$
$\varrho_s = 44.605.000$	$\varrho'_s = 19.180.150$
$\varrho_u = 49.023.200$	$\varrho'_u = 21.079.900$
$\varrho_n = 81.109.200$	$\varrho'_n = 34.864.350$

Confrontiamoli con quest'altro specchietto:

Distanza	dei primi 7 satelliti di Giove	$<$	11.900.000
"	dell'VIII (retrogrado) . . .	$=$	27.475.000
"	del IX (retrogrado)	$=$	29.715.000
"	dei primi 8 satelliti di Saturno	$<$	3.600.000
"	del IX (Febo) (retrogrado) .	$=$	12.886.600 .

Vediamo che *questi satelliti retrogradi sono interni a* (Σ); i diret tutti interni a (D). I due di Giove sono anzi compresi fra (Σ) e (D) [1]. Dunque, *non si conoscono satelliti esterni a* (Σ); ma potrebbero esistere?

L'astronomo See, nella sua opera *Researches on the evolution of the stellar systems*, ha calcolato in base alle formule di Darwin il raggio R della sfera d'azione dei pianeti, e ha trovato:

per Giove $\quad R = 51.940.700$

per Saturno $\quad R = 69.210.990$.

I valori di ϱ_g e ϱ_s non sono molto lontati da questi; onde resterebbe una zona relativamente piccola per satelliti retrogradi esterni a (Σ); *il che rende la loro esistenza poco probabile.* Comunque, delle cose dette si è indotti a pensare che quella possa essere la vera zona dei corpi catturati che si presentano a pianeta con velocità paraboliche o iperboliche.

Resterebbero altre questioni da indagare. Ma credo che quel poco che ho esposto possa già interessare gli studiosi dei fenomeni celesti e gettare qualche luce sull'importante problema.

[1] Anche quelli di Urano e Nettuno sono interni a (Σ); ma data la loro grande inclinazione non rientrano effettivamente nel caso qui contemplato.

Geometria. — *Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in* S_3. Nota di EDWARD CECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. L'equazione di una superficie F nell'intorno d'un suo punto O, dove le due tangenti asintotiche α_1, α_2 [1] sono distinte e nessuna di esse ha con F un contatto di ordine superiore al secondo [2] si può scrivere

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + \frac{1}{6}\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_4^3} + \cdots \tag{1}$$

Le rette

$$x_3 = x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_3 = x_1 + \varepsilon x_2 = 0 \ , \ x_3 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 0 \ , \ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

che indicherò con t_1, t_2, t_3, sono le *tangenti di Darboux*. Le tangenti coniugate τ_1, τ_2, τ_3, sono le tangenti di Segre. Con ω indico il piano tangente $x_3 = 0$. Ogni quadrica del fascio

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 + \lambda x_3^2 = 0$$

ha in O con F un contatto del terzo ordine, e $t_1\, t_2\, t_3$ sono le tangenti in O all'intersezione della quadrica con F; la quadrica Λ di Lie appartiene al fascio.

2. Ecco le equazioni delle *omografie* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$\text{(A)} \quad (x_1 + a_{42} x_3)\xi_1' + (x_2 + a_{41} x_3)\xi_2' + x_3 \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi_4';$$

$$\text{(B)} \quad \varepsilon(x_1 + a_{42} x_3)\xi_1' + \varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3)\xi_2' + x_3 \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi_4';$$

$$\text{(B')} \quad \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\xi_1' + \varepsilon(x_2 + a_{41} x_3)\xi_2' + x_3 \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi_4';$$

$$\text{(C)} \quad (x_2 + a_{41} x_3)\xi_1' + (x_1 + a_{42} x_3)\xi_2' + x_3 \xi_3' + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi_4';$$

[1] Precisamente indico con $\alpha_1\,(\alpha_2)$ la tangente $x_3 = x_1 = 0\ (x_3 = x_2 = 0)$.

[2] Sicchè le rigate sono escluse.

(C') $\varepsilon(x_2 + a_{41} x_3) \xi'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3) \xi'_2 +$
$+ x_3 \xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4) \xi'_4 :$

(C'') $\varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3) \xi'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3) \xi'_2 +$
$+ x_3 \xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4) \xi'_4 .$

Si hanno, dunque, sei sistemi lineari ∞^3 di tali omografie, il primo dei quali è un gruppo continuo. Questi sistemi possiamo distinguere secondo il modo come permutano le t_1, t_2, t_3.

Possiamo fare una suddivisione secondo i divisori elementari delle omografie:

(Aa) $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$: $(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)$.

(Ab) $a_{41} = a_{42} = 0$, $a_{43} \neq 0$; $(1-\varrho)^2(1-\varrho)(1-\varrho)$.

(Ac) $a_{41} \neq 0$, $a_{42} = 0$;
(Ac') $a_{41} = 0$, $a_{42} \neq 0$; $\Big\}$ $(1-\varrho)^2(1-\varrho)^2$.

(Ad) $a_{41} a_{42} \neq 0$; $(1-\varrho)^3(1-\varrho)$.

(Ba) $a_{43} = a_{41} a_{42}$; $(1-\varrho)(1-\varrho)(\varepsilon-\varrho)(\varepsilon^2-\varrho)$.

(Bb) $a_{43} \neq a_{41} a_{42}$; $(1-\varrho)^2(\varepsilon-\varrho)(\varepsilon^2-\varrho)$.

(Ca) $a_{41} + a_{42} = 0$, $a_{41}^2 + a_{43} = 0$; $(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1+\varrho)$.

(Cb) $a_{41} + a_{42} = 0$, $a_{41}^2 + a_{43} \neq 0$; $(1-\varrho)^2(1-\varrho)(1+\varrho)$.

(Cc) $a_{41} + a_{42} \neq 0$; $(1-\varrho)^3(1+\varrho)$.

È inutile occuparsi dei sistemi (B') e (C'), (C'') che si riducono a (B) e (C) scambiando le denominazioni delle t_1, t_2, t_3.

3. Per ciascuno dei tipi enumerati, indico il simbolo di Predella e le proprietà geometriche *caratteristiche*:

(Aa). [3]. Identità.

(Ab). [(20)]. Omologia speciale, col centro O e piano ω d'omologia.

(Ac). [(11)]. Le rette unite dell'omografia formano una congruenza lineare speciale di cui α_1 è la retta direttrice. Esiste una quadrica che tocca tutte le rette della congruenza ed ha con F in O un contatto del secondo ordine.

(Ac') nasce da (Ac) sostituendo α_1 con α_2.

(Ad). [(100)]. La retta p dei punti uniti e la retta p' dei piani uniti sono tangenti coniugate di F. L'omografia subordinata in un piano unito qualunque, possiede delle coniche unite che hanno un contatto del secondo ordine con F.

È notevole che, per caratterizzare il gruppo (A), occorre conoscere soltanto l'elemento del *secondo* ordine di F.

(Ba). [100]. C'è un punto unito P_1 sopra α_1, un punto unito P_2 sopra α_2, e inoltre una retta di punti uniti la polare di $P_1 P_2$ rapporto $\mathcal{A}$. La omografia è ciclica d'ordine tre.

(B*b*). [(00) 00]. 0 è un punto unito doppio, inoltre c'è un punto unito P_1 (e un altro P_2) sopra α_1 (sopra α_2). La retta polare di $P_1 P_2$ rapporto $\mathcal{A}$ è pure unita. L'omografia subordinata nella stella 0 è ciclica d'ordine tre.

(C*a*). [20]. Omologia involutoria; il centro d'omologia giace sopra t_1 e il piano d'omologia ne è il piano polare rapporto $\mathcal{A}$. Ciò si potrebbe anche prendere come definizione delle tangenti di Darboux.

(C*b*). [(10) 0]. Tutti i punti di τ_1 e tutti i piani per t_1, inoltre un punto di t_1 e il suo piano polare rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti. La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

(C*c*). [(000) 0]. Il punto unito triplo P sta su τ_1, il punto unito semplice Q sta su t_1. La retta τ_1 e il piano polare di Q rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti: La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

4. Ecco le equazioni delle *correlazioni* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$\text{(A)}\quad (x_2 + a_{31}\,x_3)\,x_1' + (x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,,$$

$$\text{(B)}\quad \varepsilon(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x_1' + \varepsilon^2(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,.$$

$$\text{(B')}\quad \varepsilon^2(x_3 + a_{31}\,x_3)\,x_1' + \varepsilon(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,.$$

$$\text{(C)}\quad (x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_1' + (x_2 + a_{31}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,,$$

$$\text{(C')}\quad \varepsilon^2(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_1' + \varepsilon(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,,$$

$$\text{(C'')}\quad \varepsilon(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x_1' + \varepsilon^2(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x_2' + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x_3' + x_3\,x_4' = 0\,.$$

Come sopra, non occorre occuparsi dei sistemi (B'), (C'), (C'').

5. Indichiamo ora le proprietà geometriche caratteristiche delle correlazioni dei tipi (A), (B), (C):

(A). Polarità rispetto ad una quadrica che ha in 0 un contatto del secondo ordine colla simmetrica di F rispetto ad ω.

(B). Divisori elementari $(1-\varrho)\ (1-\varrho)\ (\varepsilon-\varrho)\ (\varepsilon^2-\varrho)$. C'è un punto fondamentale Q_1 sopra α_1 e un altro O_2 sopra α_2; inoltre sono fondamentali tutti i punti di una retta 0 P, passante per 0. Le rette $Q_1 Q_2$ e 0 P sono polari rapporto $\mathcal{A}$. La quadrica φ_1 dei punti d'incidenza e la quadrica φ_2 dei piani d'incidenza, s'intersecano nelle rette $0Q_1$; $0Q_2$, PQ_1, PQ_2. Siano k, k_1, k_2 le curvature, nel punto 0, dell'intersezione di F, φ_1 e φ_2 mediante un piano scelto nella stella 0; si ha $2k = 4k_1 = k_2$.

(*Ca*) $a_{31} = a_{32}$. Polarità rispetto ad una quadrica per la quale valgono le seguenti proprietà:

1) t_1, τ_1 e α_1, α_2 ne sono due coppie di tangenti coniugate:

2) ogni punto di t_1 ha, rispetto ad essa e rispetto a A, il medesimo piano polare.

(*Cb*) $a_{31} \neq a_{32}$. Divisori elementari $(1-\varrho)^3$ $(1-\varrho)$. I punti fondamentali sono i punti di τ_1; i piani fondamentali sono i piani per t_1. Le due quadriche d'incidenza φ_1, φ_2, si toccano lungo quella coppia di tangenti coniugate di F che divide armonicamente t_1 e τ_1. Un punto qualsiasi di t_1 ha lo stesso piano polare rispetto alle tre quadriche φ_1, φ_2 e A.

7. Con la stessa facilità, si potrebbero caratterizzare le omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie *rigata*. Del resto, per una rigata esiste anche un ampio gruppo di omografie e correlazioni che conserva quattro rette successive, anche queste omografie e correlazioni si caratterizzano facilmente, facendo uso delle *tangenti flecnodali*.

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita di diagrammi costituiti da una successione di archi di linee diverse.* Nota dell'ing. LETTERIO LABOCCETTA, presentata dal Corrispondente A. CROCCO.

Si presenta frequentemente nella fisica, ed anche in molte questioni tecniche, il caso di dover rappresentare una grandezza la quale, in diversi intervalli del campo della variabile, è espressa da funzioni diverse della variabile stessa. Avviene cioè che, portando i valori della variabile come ascisse sull'asse delle x, si hanno, su questo, n successivi intervalli, fisicamente distinti,

$$(1) \qquad -\infty\, x_1 \,,\, x_1\, x_2 \,,\, \ldots\, x_{i-1}\, x_i \ldots\, x_{n-1} + \infty \,,$$

in ciascuno dei quali il diagramma rappresentativo è costituito da un arco di curva appartenente ad una delle linee

$$(2) \qquad y_1 = \mathrm{F}_1(x) \ldots \quad y_i = \mathrm{F}_i(x) \ldots \quad y_n = \mathrm{F}_n(x) \,.$$

Si voglia costruire l'equazione di questo diagramma, con esclusione però degli archi delle dette linee che non fanno parte di esso.

A tale scopo si formino, nel modo come si dirà in appresso, delle funzioni « limitatrici » $\varphi_i\binom{1}{0}$ le quali godano la proprietà di avere costantemente il valore $+1$ nell'intervallo i^{mo}, cioè per tutti i valori della variabile compresi fra x_{i-1} e x_i, e costantemente il valore zero per ogni altro valore

della variabile da $-\infty$ a $+\infty$. Ciò posto, è chiaro che, se si forma la funzione

$$(3) \qquad y = F_1(x)\,\varphi_1\binom{1}{0} + \cdots + F_i(x)\,\varphi_i\binom{1}{0} + \cdots F_n(x)\,\varphi_n\binom{1}{0},$$

essa nel primo intervallo prenderà i valori corrispondenti a quelli della funzione $y_1 = F_1(x)$, nell'intervallo i^{mo} prenderà i valori della funzione $y_1 = F_i(x)$ e così via, e costituirà perciò la rappresentazione analitica cercata del diagramma.

Questo metodo di rappresentazione si potrebbe chiamare il metodo dell'« annullamento delle funzioni ».

In pratica è frequente il caso in cui tutte le funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono della stessa natura e dipendenti dallo stesso numero m di parametri, cosicchè differiscono soltanto per i valori delle m costanti che appariscono nella espressione del loro valore. Posto che la forma generale di queste funzioni sia

$$(4) \qquad y_i = F(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}, x),$$

si formi la funzione

$$(5) \qquad y = F\left\{ \prod_{i=1}^{i=n} a_{i1}^{\varphi_i\binom{1}{0}}, \ldots, \prod_{i=1}^{i=n} a_{im}^{\varphi_i\binom{1}{0}}, x \right\}$$

avente anche la forma della (4) ma nella quale ognuna delle costanti a_{ij} sia sostituita dal prodotto $a_{1j}^{\varphi_1\binom{1}{0}} \cdot a_{2j}^{\varphi_2\binom{1}{0}} \cdots a_{nj}^{\varphi_n\binom{1}{0}}$ delle corrispondenti costanti di tutte le n equazioni, ciascuna costante a_{ij} elevata alla potenza indicata dall'esponente $\varphi_i\binom{1}{0}$ che è una funzione limitatrice, come definita innanzi, cosicchè in ogni intervallo i prodotti della (5) si ridurranno ai semplici parametri della (4) corrispondente.

Così dunque la (5) è una funzione di forma costante ma che in ogni intervallo ha parametri di valore diverso.

Questo metodo di rappresentazione potrebbe chiamarsi il metodo della « variazione delle costanti ».

Il problema proposto trovasi così risoluto in modo generale, a condizione tuttavia di saper costruire le funzioni limitatrici $\varphi_i\binom{1}{0}$. Si può giungere in varî modi a formare delle funzioni di questa specie: basterà qui indicarne uno con riferimento ai tre casi che possono presentarsi per la posizione dell'intervallo i^{mo}:

a) che la funzione debba avere il valore zero nell'intervallo $(-\infty, a)$ a sinistra di un punto A di ascissa a e debba avere il valore $+1$ nell'intervallo $(a, +\infty)$ a destra dello stesso punto;

b) che la funzione debba avere il valore $+1$ nell'intervallo $(-\infty, a)$ a sinistra del punto A e debba invece avere il valore zero nell'intervallo $(a, +\infty)$ a destra dello stesso punto;

c) che la funzione debba avere il valore zero nell'intervallo $(-\infty, a)$, il valore $+1$ nell'intervallo (a, b) di lunghezza l compreso fra il punto A e un punto B di ascissa b e, di nuovo, il valore zero a destra del punto B nell'intervallo $(b, +\infty)$.

Cominciando dal primo caso, e supponendo, per maggiore semplicità, che il punto A cada nell'origine, cioè che $a = 0$, si costruisca la funzione

$$(6) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn\, x\right]$$

dove, seguendo le notazioni di Kronecker e Weierstrass, si è posto $sgn\, x = \frac{x}{|x|}$, si è indicato cioè con $sgn\, x$ la funzione « segno di x » che è $+1$ per tutti i valori positivi di x e -1 per tutti i valori negativi di x.

La (6) ha evidentemente la proprietà di essere nulla per tutti i valori negativi di x, $sgn\, x = -1$, cioè nel primo intervallo del campo considerato, e di prendere il valore $+1$ per tutti i valori positivi di x, $sgn = +1$, cioè nel secondo degli intervalli in cui è diviso il campo. Se il punto A, invece di coincidere con l'origine, ha per ascissa $+a$, o $-a$, la funzione diventa rispettivamente

$$(7) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn(x - a)\right]$$

$$(8) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn(x + a)\right]$$

conservando sempre la stessa proprietà di essere nulla a sinistra di A e di avere il valore $+1$ a destra dello stesso punto.

Il secondo caso si deduce immediatamente dal primo cambiando semplicemente in $-$ il segno $+$ del binomio fra parentesi, nelle (6), (7), (8), e si hanno così per le funzioni che prendono il valore $+1$ a sinistra, nel primo intervallo, ed il valore zero a destra di un punto dato A, le espressioni

$$(9) \qquad \varphi_1\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 - sgn\, x\right]$$

$$(10) \qquad \varphi_1\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 - sgn(x - a)\right]$$

$$(11) \qquad \varphi_1\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 - sgn(x + a)\right].$$

Resta da trattare il terzo caso e per questo si farà uso della funzione « intiero di x » di Legendre, adottando per essa la notazione $1x$, con la quale

si intende di indicare il « minimo intiero contenuto in x », vale a dire l'ultimo degli intieri che precedono x a sinistra e quindi, nel caso di x positivo, la parte intiera di x senz'altro e, nel caso di x negativo, la parte intiera aumentata di una unità.

Ciò posto, supponendo di nuovo che A cada nell'origine, $a = 0$ e B a destra di esso, cosicchè sia $b = l$, si scorge che la funzione

$$(12) \qquad \left(\mathrm{I}\frac{l}{|x|}\right)^{\mathrm{I}\frac{|x|}{l}}$$

ha la proprietà: di essere sempre nulla nell'intervallo $(-\infty, -l)$ nel quale è sempre $|x| > l$ e quindi $\mathrm{I}\frac{l}{|x|} = 0$; di avere sempre il valore $+1$ nell'intervallo $(-l, +l)$ nel quale è sempre $|x| < l$ e quindi $\mathrm{I}\frac{|x|}{l} = 0$ (con l'avvertenza, tuttavia, che il punto $x = 0$ è un punto singolare) di avere sempre il valore zero nell'intervallo $(+l + \infty)$ nel quale si ha di nuovo $|x| > l$ come nel primo intervallo.

Se si combina perciò la (12) con una funzione del tipo della (6), scrivendo

$$(13) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn\,x\right]\left[\mathrm{I}\frac{l}{|x|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x|}{l}},$$

si ha una funzione che ha il valore $+1$ nel secondo intervallo $(0, +l)$ ed è nulla nel resto del campo.

Dalla (13) si passa facilmente al caso in cui il punto A, invece di cadere nell'origine, abbia per ascissa $+a$ ed il punto B abbia corrispondentemente per ascissa $a + l$. Basta infatti scrivere

$$(14) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn\,(x - a)\right]\left[\mathrm{I}\frac{a + l}{|x|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x|}{a+l}}$$

combinando la (7) con la (12) dopo aver posto in questa $a + l$ in luogo di l.

Analogamente, se il punto A ha per ascissa $-a$, combinando la (8) con la (12) dopo aver posto in questa $x + a$ invece di x viene

$$(15) \qquad \varphi_2\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left[1 + sgn(x + a)\right]\left[\mathrm{I}\frac{l}{|x + a|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x+a|}{l}}.$$

In tal modo la funzione $\varphi_2\binom{1}{0}$ resta costruita per tutti i casi che possono presentarsi.

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota II di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

6. *In pratica*, data Γ mediante le (4), si calcolino i coefficienti della corrispondente equazione (5), poi quelli della (13) con le formule (12) (ma scritte per $A = du$)

$$(13') \qquad \pi = \gamma - \beta^2 - \beta' \quad , \quad \chi = \delta - 3\beta\gamma' + 2\beta^3 - \beta'' ,$$

indi θ_3 con la (16): si ha così il differenziale normale (17) che è l'*elemento lineare proiettivo* $d\sigma$. Poi si calcoli p_2 con le (15) (ponendovi per S la derivata logaritmica di $\sqrt[3]{\theta_3} = a_1$); poi i valori ottenuti per a_1 e p_2 si sostituiscano nelle (18) e (19) [15].
(Ma naturalmente si può anche operare riferendosi ad un altro A qualunque).

Infine, per costruire la normale n (non la tangente t, evidentemente), è *per ora* indispensabile procurarsi il punto N, quindi le coordinate normali di P: queste si ottengono (con una quadratura) moltiplicando le (4) per λ dato dalla (10) [16].

[15] Segue, da ciò, che θ_3 e p_2 dipendono *dalle derivate dei primi 6 e 7 ordini rispett. di* x, y, z. p_2 *è il primo invariante relativo* di Γ costruito da Halphen per altre vie. La costruzione di tutti gli invarianti relativi dipendenti dalle derivate dei primi 7, 8 o 9 ordini, eseguita pure da Halphen, qui è semplicissima *e per ogni ordine di derivate*, perchè:

1°) *Invariante relativo dipendente dalle derivate dei primi 7 ordini è ogni funzione di* h_3, θ_3 *e* p_2 *che sia covariante*; p. es. $h_3 + 5\theta_3 - a_1 p_2$, $\sqrt{3\theta_3 h_3^2 + a_1^3 p_2^3}/(h_3 + \theta_3)$, ecc.

2°) *Le derivate covarianti successive* $p_3, p_4, \ldots$ *di* p_2 *sono invarianti relativi dipendenti dalle derivate dei primi* 7, 8 ... *ordini rispettivamente*. Quindi:

3°) *Ogni funzione* $f(h_3, \theta_3, p_2, p_3, \ldots p_{2+n})$ *che sia covariante è invariante relativo dipendente dalle derivate dei primi* $7 + n$ *ordini*.

Nella trattazione del Wilczynski il posto di p_2 è tenuto da $\theta_8 = -27\theta_3^2 p_2$ che è covariante di ordine (*peso*) 8; gli altri invarianti relativi vi si deducono da θ_3 e θ_8 con un certo *procedimento Jacobiano*.

[16] Ma, in seguito, si potrà fare a meno della normalizzazione delle coordinate (quindi della quadratura); perchè daremo una definizione *geometrica* di n (ed anche di T e N) (n. 13) che permetterà di determinarla *con sole operazioni algebriche e di derivazione*.

7. Come $\boldsymbol{\Gamma}$ (o una collineare) individua i differenziali A (17) e K (18) (a meno di una trasformazione del parametro u), così viceversa: *due differenziali* $A = a_1\,du$ $(a_1 \neq 0)$ *e* $K = k_1\,du$ *individuano* (*a meno di una collineazione*) *una curva* $\boldsymbol{\Gamma}$ *di cui* A *e* K *sono l'elemento lineare e l'angolo di contingenza, quindi* $I = K : A$ *la curvatura; le coordinate normali* x, y, z *di un suo punto generico costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di*

$$(22) \qquad \varphi_3 + a_1^2\, I\, \varphi_1 + a_1^2 (a_1 + I_1/2)\, \varphi = 0 \quad (^{17}),$$

le derivate covarianti essendo prese rispetto ad A.

Applicando le (8) alla (22), si ha

$$(23) \qquad |x\, x_1\, x_3| = 0 \quad , \quad a_1^2\, I = |x\, x_2\, x_3| : |x\, x_1\, x_2|;$$

ma $|x\, x_1\, x_3| = |x\, x_1\, x_2|_1 = |x\, x_1\, x_2|' - 3S\, |x\, x_1\, x_2|$; quindi la 1ª integrata dà, per la (3), $|x\, x_1\, x_2| = a_1^3$ (18). Dunque: *in coordinate normali* $x\,y\,z$ *valgono le formole*

$$(24) \qquad \theta_3 = a_1^3 = |x\, x_1\, x_2| \quad , \quad I = |x\, x_2\, x_3| : a_1^5 .$$

In particolare, se come parametro u si sceglie l'arco σ, è $a_1 = 1$ ed I funzione di σ; e si ha: *una curva* $\boldsymbol{\Gamma}$ *è individuata a meno di una coll. dalla sua « equazione intrinseca proiettiva »* $I = I(\sigma)$; *le coordinate normali di un suo punto costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di*

$$(22') \qquad \varphi_3 + I\varphi_1 + (1 + I_1/2)\, \varphi = 0 \quad (^{19}),$$

e si possono supporre tali che sia

$$(24') \qquad |x\, x_1\, x_2| = 1 \quad , \quad I = |x\, x_2\, x_3|,$$

le derivate (*ordinarie*) *essendo fatte rispetto a* σ.

Osservazione — σ è un primo *invariante* (integrale) *assoluto* di $\boldsymbol{\Gamma}$; *segue* I, che dipende dalle derivate dei primi 7 ordini di x, y, z (o 3 per coordinate normali); *poi* $I_1 : a_1$, $I_2 : a_1^2$, $I_3 : a_1^3$, ... nei quali il massimo ordine delle derivate aumenta di 1 successivamente. *Ogni altro invariante assoluto è una funzione* (*qualsiasi*) *dei precedenti.*

(17) È la (11) ove si è posto $3p_2 = a_1^2\, I$, per la (19), e $q_3 = \theta_3 + 3p_2/2 = a_1^3 + a_1^2 I/2$ per le (16), (17) e (19).

(18) La costante d'integrazione si può supporre uguale a 1, disponendo del fattore numerico per cui è lecito moltiplicare le coordinate normali; cfr. (13).

(19) Questa equazione è chiamata *forma canonica di Halphen* della (5) dal Wilczynski, loc. cit. (2), pag. 61; il quale invece fa uso costante della più semplice *forma canonica di Laguerre-Forsyth, che è* $\varphi''' + \theta_3\, \varphi = 0$. Ma per ridurre la (5) a tal forma, *occorre risolvere una equazione di Riccati*, mentre che per ridurla alla (22') bastano *due quadrature*, la (10) e la $\sigma = \int a_1\, du$ con $a_1 = \sqrt[3]{\theta_3}$; inoltre essa non è intrinseca come la (22').

8. L'inviluppo delle normali n è *l'evoluta proiettiva* di Γ, che ne è *l'evolvente proiettiva.*

L'evoluta di Γ è il luogo dei suoi centri di curvatura. Perchè le derivate delle coordinate di tal punto C $(x + x_2/I , ...)$ (n. 5) [20] sono $x_1 + x_3/I - x_2 I_1/I^2 = -(1 + I/2)x/I - x_2 I_1/I^2 , ...$ per la (22'), quindi definiscono un punto della stessa n.

Dirò *cerchi proiettivi* le curve le cui normali concorrono in un punto (*centro*). *Essi sono caratterizzati dall'equazione intrinseca* $I = 2\sigma$ [21].

Infatti, affinchè C sia un punto fisso, occorre che siano costanti le sue coordinate non omogenee $(Ix + x_2)/(Iz + z_2)$, $(Iy + y_2)/(Iz + z_2)$: uguagliando a zero le loro derivate ed eliminando x_3 , y_3 , z_3 mediante la (22'), si hanno le equazioni $(I_1 - 2)(xz_2 - zx_2) = 0$, $(I_1 - 2)(yz_2 - zy_2) = 0$ che, per la 1ª delle (24'), sono compatibili solo quando $I_1 = 2$, ossia $I = 2\sigma + c$, con c costante (che si può supporre nulla con opportuna scelta dell'origine degli archi σ).

9. I punti P , T , N sono vertici di un triangolo (che dirò *normale*) di cui due lati sono le rette t , n che inviluppano Γ e la sua evoluta: *il terzo lato* TN *inviluppa la curva luogo del punto* T, perchè le derivate $x_2 , ...$ delle coordinate $x_1 , ...$ di T sono le coordinate di N (supposto le $x , ...$ normali; cfr. n. 5).

Per lo studio proiettivo di Γ nell'intorno di un suo punto P, è naturale assumere come triangolo di riferimento quello normale, perchè definito *in modo intrinseco ed invariante per coll.* Ora le coordinate di ogni punto M del piano sono combinazioni lineari di quelle di P , T , N ,

$$Xx + Yx_1 + Zx_2 \quad , \quad Xy + Yy_1 + Zy_2 \quad , \quad Xz + Yz_1 + Z_2 \tag{25}$$

ed i coefficienti X , Y , Z sono appunto le coordinate di M rispetto a TPN (coordinate *locali*) e col punto unità U $(x + x_1 + x_2 , ...)$.

Supponendo che M stia su Γ in un intorno di P, la sua 1ª coordinata (non locale) può svilupparsi in serie di potenze dell'arco PM $= \sigma$ che arresterò al termine in σ^9:

$$x + x_1\sigma + x_2\sigma^2/2\,! + \cdots + x_9\sigma^9/9\,! + R_{10} \tag{26}$$ [22].

I coefficienti sono i valori di x e delle sue derivate rispetto a σ calcolatate in P, cioè per $\sigma = 0$, e sono tutte esprimibili linearmente in funzione dei primi tre x , x_1 , x_2, mediante la (22') con $f = x$ e quelle che se ne deducono derivando. Eseguendo il calcolo, dopo aver posto

$$I = 2l\,, \tag{27}$$

[20] Da ora innanzi (fino al n. 17) supporrò, come è lecito, che sia P l'origine degli archi σ su Γ ed $u = \sigma$, quindi $\alpha_1 = 1$.

[21] Per la loro determinazione effettiva occorre integrare la (22'), che diventa $\varphi''' + 2\sigma\varphi' + 2\varphi = 0$ ed ammette l'integrale primo $\varphi'' + 2\sigma\varphi =$ costante, ma che si lascia integrare solo mediante serie.

[22] In generale indicherò con R_n un resto infinitesimo con σ di ordine n.

e sostituendo in (26), si ha un'espressione del tipo della 1ª delle (25), con

$$(28)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & 1 - (1 + l_1)\,\sigma 3/3\,! - l_2\sigma 4/4\,! + (2l + 2ll_1 - l_3)\,\sigma 5/5\,! + \\ & + (1 + 8l_1 + 7l_1^2 + 2ll_2 - l_4)\,\sigma 6/6\,! - (4l^2 + 4l^2 l_1 - 17l_2 - \\ & - 25l_1 l_2 - 2ll_3 + l_5)\,\sigma 7/7\,! - (4l + 40ll_1 + 36ll_1^2 + \\ & + 4l_2 l^2 - 25l_2^2 - 31l_3 - 41l_1 l_3 - 2ll_4 + l_6)\,\sigma 8/8\,! - (1 - \\ & - 8l^3 + 21l_1 - 8l^3 l_1 + 111l_1^2 + 91l_1^3 + 108ll_1 l_2 + 4l^2 l_3 - \\ & - 91l_2 l_3 - 51l_4 - 63l_1 l_4 - 2ll_5 + l_7)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,, \end{aligned} \right.$$

$$(28)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & \sigma - 2l\sigma 3/3\,! - (1 + 3l_1)\,\sigma 4/4\,! + (4l + 20ll_1 - 5l_3)\,\sigma 6/6\,! + \\ & + (1 + 12l_1 + 27l_1^2 + 40ll_2 - 8l^3 - 6l_4)\,67/7\,! - (12l^2 + \\ & + 84l^2 l_1 - 29l_2 - 119l_1 l_2 - 70ll_3 - 7l_5)\,68/8\,! - (6l - \\ & - 16l^4 + 96ll_1 + 314ll_1^2 + 224l^2 l_2 - 144l_2^2 - 66l_3 - \\ & - 230l_1 l_3 - 112ll_4 + 8l_6)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,, \end{aligned} \right.$$

$$(28)_3 \quad \left\{ \begin{aligned} Z = {} & \sigma 2/2\,! - 2l\sigma 4/4\,! - (1 + 5l_1)\,\sigma 5/5\,! + (4l^2 - 9l_2)\,\sigma 6/6\,! + \\ & + 2\,(2l - 14ll_1 - 7l_3)\,\sigma 7/7\,! + (1 - 8l^3 + 16l_1 + 55l_1^2 + \\ & + 68ll_2 - 20l_4)\,\sigma 8/8 - (12l^2 + 108l^2 l_1 - 45l_2 - \\ & - 297l_1 l_2 - 138ll_3 + 27l_5)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,. \end{aligned} \right.$$

Queste valgono per ogni punto **M** *di* Γ *in un intorno di* P.

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* (1). Nota III del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

È notevole il fatto, che delle combinazioni osservate nei cristalli di Tremonti, nessuna se ne presenti in quelli del vallone Marro, o si ripeta per i cristalli di monte Viale, nei quali è costante il prisma }104{, da me non rinvenuto. I cristalli di monte Viale sono inoltre molto più ricchi in faccie di quelli da me descritti. Tutte le combinazioni da me notate in questi ultimi sono già note, invece, nella celestite dei giacimenti solfiferi. Si ha, perciò, un nuovo esempio di somiglianze morfologiche fra cristalli di giacimenti molto differenti per età, formazione, ecc. e di differenza, invece, considerevoli fra quelli di giacimenti che presentano le più strette analogie. Anche le costanti cristallografiche della celestite di Tremonti si allontanano da quelle che Billows ha calcolato per i cristalli di monte Viale, mentre

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

sono più vicine a quelle date da Negri per la celestite di Montecchio Maggiore.

De Launay ([1]) considerando la frequenza, con la quale si è rinvenuta la celestina nei terreni del bacino di Parigi. e sopratutto la relazione esistente fra questo minerale e gli estesi depositi gessosi della regione, ritiene che *tale rimarchevole frequenza sia principalmente dovuta alla cura particolare con la quale quella località è stata esplorata*; rileva altresì che tali osservazioni avvalorano l'ipotesi genetica della celestina, secondo la quale « *quand l'eau de mer s'évapore, il se dépose, en même temps que le sulfate « de calcium, un peu de sulfate de strontium ayant sans doute, si on re« monte assez loin, la même origine première, dans les feldspaths des roches « cristallines* »; e dopo di avere esposto che in tutti i casi riscontrati nel suddetto bacino « *il s'agit d'une veritable sécrétion latérale ayant concentré « superficiellement la strontiane empruntée à des épaisseurs de terrains « aujourd'hui détruits* »; opina che « *il est probable que beaucoup d'autres « régions à dépôts gypseux doivent présenter des phénomènes analogues* ».

Ora se questa opinione trova piena conferma nella regione interna e meridionale della nostra isola ([2]), dove la formazione gessoso-solfifera racchiude, specialmente nelle litoclasi, considerevoli masse di celestina, tanto da renderne talvolta redditizia l'estrazione ad uso commerciale ([3]), lo stesso pare non possa dirsi per il territorio della provincia di Messina.

Quivi, infatti, non mancano importanti formazioni gessose estendentesi per parecchi chilometri, costituenti diverse colline, dove un villaggio di 2840 abitanti piglia il nome caratteristico di *Gesso* per il grande sviluppo che questa formazione mostra in quella località.

Orbene, in questa regione non è stata mai segnalata la presenza della celestina; eppure, nel caso nostro, a generarla — secondo la su citata teoria — non avrebbero al certo fatto difetto, ed a brevissima distanza, i minerali primarî citati dal De Launay. È ben noto, infatti, che l'ossatura dei monti peloritani è costituita dalla formazione cristallina, la quale forma il massiccio della catena e risulta da rocce gneissiche predominanti con inclusi blocchi granitici, spesso potenti, presentantisi a vario tipo cristallino e passanti, poi, a rocce schistose, micaschisti, talcoschisti e filladi. I monti Ciccia, S. Rizzo ed Antennamare, che da est a ovest emergono dalla dorsale peloritana, sono per intero costituiti da questa formazione cristallina, la quale, estendendosi con decrescenti contrafforti collinosi da una parte e dall'altra dello spartiacque principale, manda fin dentro al perimetro della distrutta Messina

([1]) De Launay, loc. cit., vol. II, pag. 208.

([2]) Nelle provincie di Caltanissetta e di Girgenti.

([3]) Nel 1880 e 1881 si faceva commercio della celestina di queste località con una ditta di Amburgo, la quale — a quanto pare — si serviva di questo minerale per la raffinazione dello zucchero.

le sue propaggini ioniche, e si estende fino al capo Rasocolmo verso il Tirreno. Ininterrotta prosegue ancora tale formazione seguitando a costituire i picchi della suddetta dorsale, e degradando verso Scaletta da una parte e Castroreale dall'altra, sparisce sotto la potente coltre filladica, per riapparire qui e lì in masse isolate, come al capo Milazzo ed al capo Tindari.

Inoltre fra il sesto ed il dodicesimo chilometro della strada Messina-Gesso, fra le rocce cristalline, spesso si osserva la pegmatite intercalata in vene o lenti.

A dovizia quindi nelle rocce delle regioni circostanti alla citata formazione gessifera sono rinserrati i feldspati dalla cui alterazione avrebbe potuto ben generarsi lo stronzio per pervenire nelle acque marine e dare origine alla celestina — mentre si depositavano gli strati gessosi — con processo identico a quello citato da De Launay; mentre nel nostro territorio si trovano tutt'ora in posto, e poderose, quelle masse cristalline « *aujourd'hui détruites* » nel bacino di Parigi.

Nè la mancanza di ritrovamento di celestina in queste masse gessose, io credo possa attribuirsi a deficiente esplorazione scientifica, essendo il territorio della nostra provincia uno dei più esplorati d'Italia.

Questo fatto mi fa pensare che la nostra celestite possa essere di origine organica. In un recente lavoro, molto importante e suggestivo, il Samoilov [1] ha emesso l'ipotesi che lo stronzio che ha dato origine ai numerosi depositi di celestite del Turkestan possa essere stato accumulato da organismi. Il Samoilov si basa sul fatto che la presenza dello stronzio è stata riconosciuta nello scheletro di animali svariati, come risulta, per esempio, dalle ricerche di O. Vogel, e da quelle di O. Bütschli, che ha stabilito l'esistenza del solfato di stronzio nello scheletro di un gruppo di radiolarî, le Acantaria. Se il Samoilov ha creduto di ammettere l'origine organica per le quantità considerevoli di celestite trovate in un'area vastissima, appare, certo, molto più facile l'ammettere una tale origine per la scarsissima celestite del Messinese, così intimamente associata ai coralli fossili.

Con la celestina, da me segnalata, si completa, per la provincia di Messina, il gruppo dei solfati isomorfi di Ba. Sr. e Pb.; dei quali la barite — rinvenuta da G. Seguenza [2] nei filoni metalliferi di Fiumedinisi — se non frequente si ritrova molto meno raramente della celestina; mentre dell'anglesite — non ostante la ricchezza in galena dei nostri filoni metalliferi — non si conoscono che i pochissimi e minutissimi cristallini determinati dal Traina [3].

[1] *Palaeophysiology: the organic origin of some minerals occurring in sedimentary rocks.* Min. Mag., 1917, XVIII, 95.

[2] *Ricerche mineralog. s. fil. metallif. d. Fiumedinisi e s. dint. in Sicilia.* Mem. R. Accad. Peloritaria, Messina, 1856.

[3] *Sull'Anglesite dei giacimenti metalliferi della Provincia di Messina.* Rend. Accad. Lincei, 1905, 1° sem., pag. 220.

Mineralogia. — *Sull'idocrasio dell'Alpe delle Selle* (*Valle della Germanasca*) [1]. Nota di E. GRILL, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Tra i calcescisti mesozoici della parte meridionale della Valle della Germanasca, diramazione di quella del Chisone, affiorano delle eufotidi più o meno prasinitizzate e delle serpentine che devonsi considerare come appartenenti alla grande amigdala di rocce verdi del Monviso, situata una ventina di chilometri più a sud. Il lembo settentrionale di questa enorme lente arriva infatti, dopo aver culminato, attraverso la Valle del Pellice, nelle superbe punte del Granero, del Barrant, della Bruna e della Fionira, fino ad affacciarsi, tra il Colle Giuliano e il Passo della Fionira, nel Vallone delle Miniere [2], sull'Alpe delle Selle, una delle località mineralogicamente più interessanti del Comune di Prali.

La porzione di rocce verdi che rimane compresa tra il Passo del Lupo e il Passo Brard e che costituisce la sponda superiore destra del Vallone suddetto, è dovuta ad eufotidi fortemente epigenizzate [3] ed a serpentine scistose, ricoperte, verso valle, da falde detritiche con parecchi grossi blocchi formanti un cumulo caotico in quell'avvallamento imbutiforme noto col nome di Crò delle Brusà, verso i 2.200 metri sul livello del mare.

È precisamente qui che l'estate scorsa (1921) rinvenni alcuni massi tondeggianti di granatite rosea, le cui cavità sono tappezzate da cristalli di diopside, di granato rossigno, di idocrasio, di epidoto-clinozoisite, di clinocloro e di magnetite, minerali già ben noti per le Valli di Susa, di Lanzo, e per il Gruppo di Voltri nell'Appennino Ligure, ma, finora, poco o punto conosciuti per la valle del Chisone.

Al Crò delle Brusà il clinocloro è, assieme al granato, la specie più abbondante, tanto che incontrasi, si può dire, ad ogni passo, e presentandosi in grossi cristalli, di 8 a 10 cm. nella dimensione loro maggiore, è possibile raccoglierne, in breve tempo, una grande quantità. Questo minerale fu già da me studiato chimicamente in una precedente Nota [4]; gli altri,

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studi Superiori di Firenze.

[2] Chiamato così per la esistenza di filoncelli di calcopirite e di pirite cuprifera che diedero luogo, per il passato, ad una saltuaria e ben poco importante escavazione della quale si hanno ancora palesi segni nelle gallerie, in gran parte diroccate, che aprivansi sul fianco orientale della piccola valletta.

[3] V. Novarese, *Sul rilevamento geologico eseguito nel 1894 in Valle della Germanasca* Boll. R. Com. Geol. fasc. 3, Roma, 1894.

[4] E. Grill, *Contributo allo studio dei minerali della Valle del Chisone* (*Alpi Cozie*) Atti della Soc. tosc. di Sc. nat., Memorie, vol. XXXI, Pisa 1916.

all'infuori dell'idocrasio che qui descrivo, formeranno l'oggetto di una prossima pubblicazione.

L'idocrasio dell'Alpe delle Selle comparisce sotto forma di una incrostazione bruno-rossastra, dello spessore di circa 1 cm., rivestente la granatite, la quale granatite, nella zona a contatto col minerale, assume una struttura più minuta e compatta. In sezione sottile si nota che la roccia è costituita, in quella parte, da un reticolo di granato roseo, isotropo o lievemente birifrangente, racchiudente oltre a numerose lamelle plurigeminate, quasi incolore e insensibilmente pleocroiche di clinocloro, che estinguono in modo onduloso, anche granuli grossetti di magnetite e altri pochi da riferirsi ad un termine epidotico.

Fig. 1.

La incrostazione bruno rossastra di idocrasio che, a sua volta, presentasi attraversata da una venuzza più chiara, ma pur sempre della stessa natura, è dovuta ad un fitto intreccio di cristalli bacillari o addirittura aghiformi. Il forte sviluppo secondo l'asse [z] caratterizza e differenzia questi cristalli da quelli di altri giacimenti, nei quali l'idocrasio si presenta, come è noto, con un abito tozzo o addirittura appiattito secondo la base. Per aspetto e colore essi sarebbero invece rassomiglianti ai cristalli di Rocca Rossa (Valle di Susa) (1), di Ussel (Valle di Aosta) (2) e all'idocrasio del Roc Neir n. 2 (Piano della Mussa) (3) che per tonalità di tinta è identico all'idocrasio cosidetto manganesifero (4) del Becco della Corbassera presso Ala di Stura. Nelle località menzionate l'idocrasio è, di solito, in individui anche assai grandi, trasparenti, ricchi di facce; all'Alpe delle Selle, invece, fu trovato in cristalli, per lo più imperfetti e opachi, i maggiori con dimensioni di solo mm. 2 × mm. 11, fortemente striati nel senso dell'asse verticale. Pochi e rari cristalli terminati ad una estremità e con buone facce anche nella zona prismatica, di colore giallo topazio e limpidissimi, potei avere solo osservando, uno per uno, tutti i numerosi frammentini che si ottengono rompendo, con le dovute cautele, alcune masserelle, meno compatte, del minerale in parola. Trattasi sempre però di cristallini davvero molto piccoli, misurando essi 1/3 di mm. di spessore

(1) F. Zambonini, *Su alcuni minerali della Rocca Rossa e Monte Pian Real (Val di Susa)* Rend. R. Acc. Lincei, vol. X Roma 1901.

(2) A. Pelloux, *Sopra alcuni minerali dei dintorni di Saint Vincent e Châtillon in Val d'Aosta.* Annali del Museo di Stor. nat. di Genova, vol. VI (XLVI), 1913.

(3) G. Struever, *I giacimenti minerali di Saulera e della Rocca Nera* ecc., Rend. Rend. R. Acc. Lincei, Vol. VIII. Roma, 1899.

(4) Parmi sia stato chiamato un pò impropriamente manganesifero, visto che esso, secondo una analisi eseguita nel 1887 da J. H. Vogel, (C. Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. IV, p. 931 Dresda 1916), conterrebbe solo tracce di manganese.

per 3 mm. di lunghezza, i quali forniscono tuttavia immagini della mira abbastanza luminose che permettono buone misure, in base alle quali riconobbi le forme: *m*{110}; *a*{100}; *f*{210}; *p*{111}; *s*{311}, osservate poi anche al microscopio, e unite nella combinazione rappresentata nella fig. 1.

Trascrivo sotto, mettendoli a confronto con i valori teorici ricavati dalle costanti V. v. Zepharovich, gli angoli misurati:

(100):(210) =	estremi	26.° 50′ — 26°.27′	26.° 42′	(media di	3	misure)	calc.	26.° 34′
(100):(110) =	»	45. 20 — 44.41	45. 10	»	3	»	»	45. 0
(311):(3$\bar{1}$1) =	»	31. 45 — 31.35	31. 40	»	2	»	»	31. 38
(311):(010) =	»	74. 35 — 74.10	74. 25	»	3	»	»	74. 11
(110):(111) =	»	52. 48 — 52.36	52. 42	»	2	»	»	32, 45 ½
(111):($\bar{1}\bar{1}$1) =	»	74. 40 — 74.30	74. 35	»	2	»	»	74. 29

L'analisi chimica fu fatta partendomi da un materiale purissimo, cioè su frammenti completamente vitrei, ottenuti frantumando prima grossolanamente alcuni pezzetti della incrostazione bruno-rossastra ed eliminando poi le poche lamelle di clinocloro presenti ed i detriti più minuti.

La polvere dell'idocrasio ha colore cacao-chiaro e schiarisce all'arroventamento (lampada di Mecker) diventando anche compatta per una parziale fusione. Mescolata con fluoruro di calcio e bisolfato potassico essa impartisce alla fiamma una fugace ma netta colorazione verde. Il fluore venne cercato secondo il metodo di H. Rose modificato da J. C. Minor e S. L. Penfield ma con esito negativo. L'aggiunta di peridrolo al filtrato della silice dà una intensa colorazione giallo-arancione, ciò che rivela subito un notevole contenuto in titanio.

I risultati analitici quantitativi avuti sono i seguenti:

SiO_2	37.38
Ti_2O_3	3.59
Al_2O_3	15.65
B_2O_3	0.83
Cr_2O_3	tracce
Fe_2O_3	2.09
FeO	0.31
MnO	0.08
CaO	36.35
MgO	2.21
Na_2O / K_2O	0.54
H_2O a — 110°	0.24
H_2O a + 110°	1.37
Fl	assente
	100.64
p. sp. =	3.41

Dai quali valori non si ricava una formula semplice come accade, del resto, per molti altri idocrasî.

L'idocrasio dell'Alpe delle Selle, il cui colore bruno-rossastro ritengo sia dovuto non al manganese presente che è pochissimo, bensì al titanio, risulta anche discretamente borifero pur essendo sempre ben lontano dall'avere la ricchezza in B_2O_3 della varietà wiluite della Siberia Occidentale che A. Noll trovò ammontare a ben 6,12 %.

La percentuale di Ti_2O_3 è invece assai elevata ed è superata, finora, soltanto da quella (4.28 %) riscontrata da P. Jannasch e P. Weingarten [1] nell'idocrasio bruno-scuro del Vesuvio, che secondo recenti ricerche di E. T. Wherry e W. H. Chapin [2], non conterrebbe però B_2O_3 ma sarebbe, come è noto, ora fluorifero ed ora no.

Dopo gli studi di C Hlawatsch [3] alcuni ritengono che gli idocrasî privi di fluoro siano otticamente positivi, mentre sarebbero negativi quelli fluoriferi. Questa regola non risulterebbe confermata dall'esame di parecchi cristalletti dell'Alpe delle Selle, i quali manifestarono tutti allungamento negativo. Può invece darsi che il carattere ottico dipenda piuttosto dalla posizione che hanno alcuni elementi ferro o titanio nella molecola del minerale e siamo forse anche qui in presenza di cristalli misti stereoisomeri che, secondo lo Zambonini [4], sarebbero assai diffusi in natura.

L'idocrasio da me studiato ha un pleocroismo assai netto con $o > e$, avendo il raggio ordinario colore giallo topazio e quello straordinario colore analogo ma assai più chiaro.

Per la luce del sodio ho trovato che $\omega = 1{,}728$, $\varepsilon = 1{,}724$. per cui $\omega - \varepsilon = 0{,}004$.

(1) P. Jannasch e P. Weingarten, Z. anorg. Chem. XI, *40*, 1896; Vedi anche F. Zambonini, *Mineralogia vesuviana*. p. 269, Napoli 1910.

(2) E. T. Wherry e W. H. Chapin. Zeitschr. für Krist. und Petrogr. XLVIII. p. 126. 1911.

(3) C. Hlawatsch, *Bestimmung der Doppelbrechung für verschieden farben an einigen Mineralien*. Tsch. min. Mith. XXI, p. 107, Wien 1902.

(4) F. Zambonini, *Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto*. Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, fasc 3°, 4°, 5°, 6°, Vol. XXX. Roma, 1921.

Fisica. — *Sulle condizioni elettriche di formazione della grandine.* Nota di Alessandro Artom, presentata dal Corrisp. L. Palazzo.

1. Le moderne teorie dell'elettricità, le osservazioni sperimentali eseguite nelle regioni elevate dell'atmosfera rese possibili dallo sviluppo della aeronautica ed alcuni fenomeni constatati nelle comunicazioni radiotelegrafiche permettono, a mio avviso, di chiarire notevolmente la genesi della formazione della grandine.

Mi propongo di riassumere queste recenti osservazioni e sopratutto di esporre, come, secondo il mio modo di considerare il fenomeno della grandine, esso possa frequentemente attribuirsi alla ionizzazione dei raggi ultravioletti contenuti nella luce solare ed alle particolari condizioni della conducibilità elettrica dell'ambiente in cui si forma.

A conferma di tali concetti ricorderò pure una serie di esperienze da me eseguite e pubblicate da oltre un ventennio [1] e che credo possano dimostrare la funzione dell'elettricità atmosferica nella formazione della grandine.

Queste esperienze mi hanno condotto a ritenere che, in qualche speciale caso, negli istanti in cui la grandine si forma, le forze elettriche possono intervenire provocando sul primo nucleo centrale del chicco di grandine delle impulsioni di carattere rotatorio le quali sono appunto spiegabili basandosi sul fatto che l'ambiente in cui si forma la grandine è costituito da un mezzo reso debolmente conduttore dalla ionizzazione ed in cui si trovano immersi dei corpi isolanti cioè dei nuclei di ghiaccio.

* * *

Per studiare la genesi della grandine credo opportuno ricordare alcune recenti osservazioni sulla ionizzazione atmosferica ossia sulla esistenza di masse di elettricità positiva o negativa moventesi liberamente nell'atmosfera stessa. Seguendo un mio modo di considerare il campo elettrico atmosferico ritengo che esso si possa paragonare, nelle sue linee generali, al campo elettroionico di un immenso tubo termoionico in cui il sole rappresenti il filamento di lampada incandescente costituita da carbone o di altra materia disgregabile a temperatura elevatissima e la terra funzioni da piastra negativa.

[1] Alessandro Artom, *La formazione della grandine*, Torino, 1900.

Il campo elettroionico atmosferico essendo però naturalmente soggetto alle variazioni dovute al moto di rivoluzione della terra attorno al sole e di quello che la terra compie seguendo l'eclittica, non che delle variazioni di temperatura e pressione il paragone da me fatto sussiste tenendo conto delle dette condizioni di variabilità e di altre a cui non è qui il caso di accennare.

A conferma di tal modo di considerare il campo elettroionico terrestre ricorderò che è generalmente ammesso che la ionizzazione atmosferica debba attribuirsi alle seguenti cause:

1°) Emissione dovuta al sole considerato in quanto è un corpo incandescente a temperatura elevatissima di corpuscoli elettrizzati negativamente.

2°) Azione ionizzante dei raggi ultravioletti della luce solare.

Inoltre la ionizzazione è attribuita alla emanazione radioattiva nell'aria dovuta alle sostanze radioattive contenute nella scorza terrestre e ad altre cause il cui carattere è probabilmente in minor relazione col fenomeno della grandine.

Per lo scopo di questo studio conviene per ragioni intuitive soffermarsi sulla azione ionizzante dei raggi ultravioletti della luce solare. È notorio come il Lénard abbia dimostrato che i raggi ultravioletti hanno, come i raggi Bécquérel, la proprietà di far apparire cariche libere in seno ai gas da essi attraversati. La luce solare contiene le radiazioni di Schumann le quali essendo di piccolissima lunghezza d'onda sono capaci di ionizzare l'atmosfera. Ma è necessario osservare che, appunto per la loro minima lunghezza d'onda, queste radiazioni si arrestano prevalentemente nelle regioni elevate dell'atmosfera ed al livello del suolo i loro effetti ionizzanti sono molto attenuati.

Orbene è essenziale insistere sulla concidenza, non certo fortuita, che le cadute di grandine si verificano più generalmente nell'estate, non solo ma nelle ore più calde del giorno, cioè dopo il mezzogiorno, ore in cui precisamente la ionizzazione dovuta ai raggi ultravioletti solari è fortissima.

È pure importante osservare che, reciprocamente, nelle ore seguenti alla mezzanotte in cui la ionizzazione atmosferica è quasi nulla, raramente si hanno temporali grandiniferi. Le osservazioni esposte fanno già intuire la probabile connessione della ionizzazione atmosferica dovuta ai raggi ultravioletti solari con le cadute di grandine.

L'azione ionizzante della luce solare è inoltre chiaramente confermata per altra parte dai fenomeni osservati nelle comunicazioni radiotelegrafiche a grandi distanze.

È notorio infatti che durante il giorno le trasmissioni radiotelegrafiche a distanze notevoli sono enormemente ridotte di intensità; invece, a parità di energia trasmessa, le stesse trasmissioni sono sentite assai più fortemente durante la notte. Questi fatti sono verosimilmente da attribuirsi all'assorbimento della energia delle onde elettromagnetiche radiotelegrafiche, per parte

di ioni di diverso segno esistenti nell'atmosfera in quantità enormemente maggiore durante il giorno che non durante la notte.

È ben noto inoltre che l'osservatore radiotelegrafico constata al levare del sole il progressivo indebolimento della ricezione radiotelegrafica, mentre al tramonto riconosce il progressivo accrescimento della intensità di ricezione.

È pure notorio che nel periodo del levare e del tramonto del sole si osservano con maggiore intensità i cosidetti « atmosferici » cioè quei disturbi che spesso rendono la ricezione radiotelegrafica confusa e generalmente indecifrabile.

Ricordo ancora, siccome avente relazione colla ionizzazione solare, il fatto che durante gli eclissi solari si è notato il rinforzo della ricezione radiotelegrafica tra grandi distanze precisamente come accade durante la notte.

È opportuno tener presente, che, esaminati i chicchi di grandine mediante elettroscopi od elettrometri, si riconosce sempre, come ebbi anche ad osservare io stesso, in essi una notevole elettrizzazione.

Questo fatto messo in relazione con tutto quanto si è esposto relativamente alla ionizzazione dovuta ai raggi solari, dimostra già chiaramente come un intimo nesso possa esistere fra ionizzazione solare e la formazione della grandine.

2. La relazione che verosimilmente può esistere fra la ionizzazione solare e la grandine è confermata dalle seguenti considerazioni.

Nelle giornate piuttosto calde si formano delle intense correnti d'aria dal basso intense all'alto e che sono quindi capaci di trasportare ad altezze molto elevate il vapor acqueo prodotto dalla evaporazione terrestre. È appunto a queste correnti d'aria che si deve il fatto che i nembo-cumuli (cumul-nimbus) d'onde proviene quasi sempre la grandine, confinano nelle loro regioni superiori cogli strati freddissimi dell'atmosfera.

Se questi nembo-cumuli sono attraversati dalle radiazioni solari di piccolissima lunghezza d'onda, come quelle dette di Schumann (da 2000 a 1000 angström) le quali stanno alla estremità dello spettro dell'ultravioletto e che sono capaci di ionizzare il vapor d'acqua, la nucleazione ionica può compiersi in modo particolare.

Essa può dar luogo alla trasformazione improvvisa del vapor d'acqua, la cui temperatura si sia repentinamente abbassata per effetto di espansione adiabatica, in granuli di ghiaccio amorfo, i quali costituiscono verosimilmente i primi nuclei del chicco di grandine.

È notorio infatti che il primo nucleo del chicco è caratterizzato dall'aspetto spugnoso in causa delle minute bollicine d'aria imprigionate nel globulo di ghiaccio al momento della sua improvvisa formazione.

La nucleazione ionica e la trasformazione in ghiaccio, è favorita, oltrechè dalla bassa temperatura dell'ambiente, anche dall'abbassarsi della pressione.

Ora, precisamente, l'avvicinarsi dei temporali grandiniferi è accompa-

gnato dall'abbassamento della pressione atmosferica, come è notorio dalle comuni osservazioni barometriche.

3. Si può quindi spiegare coi fenomeni esposti la formazione del primo nucleo del chicco di grandine

Ma, come è notorio, qualunque sia la loro forma e grandezza, i chicchi di grandine sono caratterizzati da una struttura a strati concentrici attorno al primo nucleo.

La formazione degli strati è molto verosimilmente da attribuirsi alla solidificazione istantanea di goccie d'acqua in stato di soprafusione che si depositano attorno ai primi nuclei durante la loro caduta.

Occorre ancora osservare che le grandinate tipiche a grossi chicchi sono accompagnate dal sopravvenire di fatti eventuali temporaleschi cioè dallo stabilirsi di campi elettrici elevatissimi localizzati, tra nube e nube o fra nubi e terra in direzioni varie e di tale intensità da « polarizzare » lo spazio da essi attraversato.

Onde si avrà a considerare, dal punto di vista elettrico, la sovrapposizione dell'effetto normale della ionizzazione solare a quelli, accidentali, degli intensi campi elettrici costituitisi fra nubi temporalesche.

L'accrescimento del chicco dipende poi dalla natura dell'ambiente su cui agiscono i campi elettrici.

Se, ad esempio, l'ambiente è costituito da goccioline d'acqua in cui si trovino ad essere immersi, per effetto della loro caduta, i primi nuclei dei chicchi, si possono verificare dei particolari fenomeni dovuti alla conducibilità elettrica del mezzo.

È notorio che l'acqua ed il vapor acqueo umido, di fronte al ghiaccio che è ottimo isolante, hanno proprietà di debole conducibilità elettrica.

Se il campo elettrico è piuttosto elevato si può avere trasporto di cariche per convezione attraverso alle goccioline liquide così da accumulare notevoli quantità di elettricità sui primi nuclei dei chicchi.

Ora vi sono dimostrazioni sperimentali che fanno ritenere che, in queste condizioni, il campo elettrico ha l'effetto di dar luogo a coppie di rotazione le quali tendono ad imprimere ai ghiaccioli dei moti rotatorî attorno ad assi passanti pel loro interno.

Si possono, in questi căsi, verificare condizioni elettriche analoghe a quelle dei fenomeni ben noti ai fisici, sotto il nome di « Rotazioni elettrostatiche dei corpi dielettrici immersi in mezzi debolmente conduttori » studiati da parecchi scienziati specialmente stranieri (1).

Queste rotazioni erano così messe in evidenza: dentro a recipienti contenenti, benzolo, solfuro di carbonio, etere o trementina, era stabilito un campo elettrico di parecchie migliaia di volt fra lastre metalliche immerse nel liquido.

(1) G. Quincke, Wied. Annalen, 1896.

Sospendendo in seno agli isolanti liquidi dei corpi solidi di potere isolante più elevato di quello del liquido, come paraffina, zolfo, cristalli di aragonite, quarzo, tormalina, si osservano rapide rotazioni di questi corpi solidi attorno all'asse di sospensione.

Più tardi Graetz [1] sostituì al filo di sospensione due punte attorno alle quali la rotazione poteva compiersi in modo durevole: essa si manteneva finchè durava il campo elettrico.

Anzi, come caso particolare, il Graetz, confermò l'esperienza sostituendo ai liquidi isolanti lo spazio di tubi di media rarefazione ed in cui l'aria era ionizzata dal campo elettrico da cui era attraversata

Il fenomeno fu studiato da parecchi autori e fu anche ricavata da H. Hertz l'espressione matematica del momento di rotazione di una sfera isolante, in funzione della intensità del campo e della differenza fra la conduttività elettrica del mezzo ambiente e quella della sostanza dielettrica soggetta a rotazione.

Nel 1900 ho eseguito una serie di esperimenti, i quali, a parer mio, presentano molta analogia colle condizioni elettriche delle grandinate più violente, cioè quelle in cui è lecito fare l'ipotesi che i chicchi siano soggetti per virtù del campo elettrico a delle « impulsioni rotatorie ».

Sospeso, ad esempio, nel benzolo, la cui conduttività elettrica può ritenersi non molto diversa da quella del vapor d'acqua, un pezzo di ghiaccio od un pizzico di neve alquanto compressa, se il campo è elevato, questi corpi sospesi prendono rapidamente a rotare, mantenendo lo stesso senso finchè la torsione del filo di sospensione lo permette.

Dopo pochi istanti, il corpo per l'effetto meccanico di rotazione assume nettamente forma di solido di rivoluzione.

È appunto la forma di solido di rivoluzione quella che presentano i chicchi di grandine nelle tipiche grandinate.

Questo aspetto risulta chiaro spesso alla superficie, ma più evidentemente ancora osservando il chicco nelle sue sezioni, nelle quali si notano non raramente stratificazioni elicoidali dovute alla composizione del moto rotatorio coll'azione della gravità.

I movimenti rotatorî hanno la loro interpretazione fisica nel fatto che i ghiaccioli o primi nuclei si trovano in un mezzo reso debolmente conduttore dalla ionizzazione preesistente.

4. Le ipotesi da me avanzate dànno ragione della possibilità che si formino dei chicchi di grossa mole ed è notorio invero che se ne osservarono alcuni anche del peso di molte centinaia di grammi.

Può accadere infatti che, l'azione rotatoria del campo elettrico operando su qualche casuale forma del primo nucleo ad esempio quella di un fascio

(1) L. Graetz, Wied. Annalen, 1900.

di aghetti disposti in direzioni inclinate, venga questo nucleo di forma particolare ad essere sollecitato da una componente verticale od inclinata diretta dal basso all'alto, così da permettere opponendosi alla gravità, a questo particolare nucleo, di soggiornare maggior tempo nel suo ambiente di formazione.

In queste condizioni il chicco può naturalmente caricarsi molto di nevischio o di ghiaccioli e raggiunto un peso tale da sorpassare la componente dal basso all'alto creata dalle azioni elettriche, cadere poi al suolo.

* * *

Le condizioni fisiche perchè i chicchi di grandine abbiano a costituirsi sono quindi caratterizzate dalla necessità che, nell'ambiente di formazione, possano sussistere contemporaneamente del vapor acqueo, allo stato di soprafusione e dei globuli di ghiaccio: in altri termini, è necessario si verifichi la coincidenza che del materiale sospeso allo stato liquido, venga a contatto con del materiale allo stato solido.

Tali condizioni devono avvenire nelle regioni dell'atmosfera prossime alle linee isotermiche della temperatura dello zero gradi, le quali determinano appunto la zona di formazione della grandine.

Orbene è chiaro che quelle condizioni termiche sono eccezionalmente realizzabili tanto nei climi a temperature eccessivamente alte, quanto nei climi a temperature eccessivamente basse.

Si constata, infatti, che nei climi tropicali e nei climi polari le precipitazioni grandinifere si manifestano assai raramente. Con maggior frequenza la grandine si produce, invece, nelle regioni a climi temperati, perchè in quelle latitudini le condizioni fisiche sopra esposte, si possono assai sovente verificare.

Fisiologia. — *La glicosuria nell'uomo sottoposto a rarefazione atmosferica* [1]. Nota I del dott. A. Aggazzotti, presentata dal Socio P. Foà.

P. Bert [2] aveva osservato che gli animali tenuti per qualche ora ad una bassa pressione avevano talora glicosuria; il fenomeno si presentava in modo irregolare e non poteva essere riprodotto a volontà. Le analisi del sangue fatte sui cani da Dastre [3] nelle stesse condizioni sperimentali rilevarono anche una notevole iperglicemia, se la rarefazione era stata forte

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino.

[2] Bert P., *La pression barométrique*. Paris, G. Masson, 1878.

[3] Dastre A., *De la glycemie asphyxique*. C. R. Acad. de Scienc, LXXXIX, 669, 1879.

150-250 mm., e non troppo prolungata. La glicosuria e la iperglicemia erano per questi AA. simili a quelle che si avevano nell'asfissia lenta in vasi chiusi, cioè dipendenti dall'anossiemia. Questa, irritando il fegato, determinava una più attiva mobilitazione del glicogeno in esso contenuto, indipendentemente da una incompleta combustione dello zucchero.

Camis (1) sull'uomo avrebbe trovata una forma di glicosuria da rarefazione atmosferica simile a quella osservata da P. Bert sugli animali; essa si manifestava in modo costante per depressioni notevolmente minori 326-430 mm. e che agivano per soli 20-40 minuti. Sul determinismo di questa glicosuria Camis non si pronuncia con sicurezza, esclude però possa trattarsi di un eccesso di CO^2, essendo la ventilazione sotto alla campana molto forte e, pure dando molta importanza al fattore emotivo, crede che uno dei fattori principali sia la scarsità di ossigeno; ciò egli desume anche da un esperimento fatto in volo, nel quale osservò che appena atterrati dopo 50 minuti di volo, l'orina del pilota, che aveva respirato O^2 oltre i 3000 m. non conteneva glucosio, mentre l'orina dell'A., che aveva respirato aria atmosferica, ne conteneva tracce. La quota massima raggiunta fu di 4560 m.

I risultati di questi esperimenti sarebbero in contrasto con quelli che ho ottenuti studiando il limite di assimilazione del glucosio in alta montagna (2). Avevo infatti constatato che durante il soggiorno al Colle D'Olen 2901 m. s. m. la quantità di glucosio che si poteva ingerire senza avere glicosuria era molto superiore a quella di Torino, 240 m. s. m. e ciò anche quando si era nelle stesse condizioni di riposo, di dieta e di temperatura ambiente.

Poichè mi pareva che negli esperimenti di P. Bert e di Camis avessero agito dei fattori che non avevamo negli esperimenti fatti al Colle D'Olen, come l'asfissia dei tessuti per una eccessiva rarefazione, l'azione dell'anidride carbonica, lo stimolo emotivo, fattori che per sè soli potevano dare glicosuria, mi sono proposto di ripetere sull'uomo gli esperimenti sulla glicosuria da rarefazione, eliminando i fattori sopradetti.

I soggetti in esperimento furono tutti giovani di 18-20 anni, generalmente soldati, candidati all'aviazione, che venivano messi isolatamente o a due e anche a tre per volta nella grande camera pneumatica dell'Istituto di Fisiologia. L'esperimento procedeva sempre nello stesso modo; in 15-20 minuti la pressione scendeva a circa 380 mm. e rimaneva costante su questo valore per 40-45 minuti, poi, fermate le pompe, in 5-10 minuti si tornava alla pressione normale; complessivamente l'esperimento durava circa un'ora. Per evitare l'azione emotiva, prima della prova, il soggetto veniva sempre

(1) Camis M., *La glicosuria fisiologica nell'uomo sottoposto a rarefazione atmosferica.* Rend. della R. Accademia dei Lincei. XXVIII. 101. 1919.

(2) Aggazzotti A., *L'assimilazione del glucosio in alta montagna.* Giorn. della R. Accad. di Medic. di Torino, LXXXIV, 177, 1922.

tranquillizzato sulla inocuità dell'esperimento, e gli venivano dati giornali illustrati e periodici, che doveva leggere nella camera pneumatica; questa poi era sufficiente ampia per permettere ai candidati di starsene comodamente seduti. L'evacuazione dell'aria veniva fatta contemporaneamente con due sistemi di pompe indipendenti, per poter mantenere una ottima ventilazione. Le analisi dei campioni di aria presi a varî momenti dell'esperimento non rilevarono mai una quantità di CO^2 superiore a 0,2 %.

In ogni esperimento si raccoglieva l'orina secreta nell'ora che precedeva la prova della campana, l'orina secreta nell'ora successiva durante la rarefazione, e l'orina secreta nell'ora dopo esciti dalla camera pneumatica. Su questi campioni di orina si determinava il peso specifico col picnometro, il potere riduttore col metodo di Nylander, l'albumina coagulabile col metodo del riscaldamento.

I singoli esperimenti sono riportati nelle tabelle seguenti; l'esame dei risultati ottenuti sarà fatto in una Nota seguente (III).

Tabelle riassuntive degli esperimenti.

Proprietà fisico-chimiche dell'orina *prima, durante* e *dopo* la rarefazione.

Numero Data		Orina secreta in 1 ora cc.	Peso specifico	Reazione di Nylander Colore del precipitato	Albumina coagulabile	*Osservazioni*
I 5-III 1922	Prima	65	1022.4	negativa bianco	assente	D. T. Soggetto affètto da glicosuria alimentare molto forte.
	Durante	233	1010.1	negativa bianco	assente	Esperimento fatto al mattino 2 ore dopo la prima colazione di solo latte e caffè.
	Dopo	105	1011.5	negativa bianco	assente	Durata dell'esperimento 65 minuti. Pressione minima raggiunta 472 mm.
II 7 II 1922	Prima	46	1030.0	negativa giallo sporco	assente	P. M. Soggetto normale, studente.
	Durante	28	1031.0	tracce giallo bruno	assente	Esperimento fatto al pomeriggio 4 ore dopo il pasto del mezzogiorno.
	Dopo	50	1029.0	negativa giallo	assente	Durata della rarefazione 56 minuti. Pressione minima 484 mm.
III 8-II 1922	Prima	15	1024.3	negativa giallo scuro	assente	P. M. (Vedi esperim. II).
	Durante	97	1016.1	negativa bianco	assente	Esperimento fatto al mattino 2 ore dopo la prima colazione.
	Dopo	68	—	negativa bianco	assente	Durata della rarefazione 65 minuti. Pressione minima 479.5 mm.

Numero Data		Orina secreta in 1 ora cc.	Peso specifico	Reazione di Nylander Colore del precipitato	Albumina coagulabile	*Osservazioni*
IV 5-III 1922	Prima	25	1026.1	negativa giallo scuro	assente	P. G. Soldato. Soggetto normale.
	Durante	42	1025 4	negativa bianco	assente	Esperimento fatto al mattino 3 ore dopo la prima colazione.
	Dopo	77	1017.4	tracce grigio chiaro	assente	Durata della rarefazione 65 minuti. Pressione minima 428 mm.
V 5-III 1922	Prima	24	1029.5	negativa rosso scuro	velo	M. G. Soldato. Soggetto con lieve albuminuria senza cilindruria.
	Durante	62	1022 9	negativa rosa	assente	Esperimento vedi n. IV.
	Dopo	27	1024.8	negativa rosso scuro	assente	
VI 5-III 1922	Prima	40	1020.1	negativa bianco	assente	M. Gu. Soldato. Soggetto normale.
	Durante	120	1008.1	negativa bianco	assente	Esperimento vedi n. IV.
	Dopo	144	1009 5	negativa bianco	assente	
VII 9-III 1922	Prima	39	1017.1	negativa bianco	assente	M. Gi. Soldato. Soggetto normale.
	Durante	70	1013.5	negativa bianco	assente	Esperimento fatto al mattino.
	Dopo	272	1012.8	negativa bianco	assente	Durata della raref. 60 minuti. Pressione minima 398.5 mm.
VIII 10-III 1922	Prima	27	—	negativa bianco giallo	tracce	B. L. Soldato. Affètto da albuminuria senza cilindruria.
	Durante	81	—	negativa giallo rosa	parecchia	Esper. vedi n. XII Nota seg.
	Dopo	24	—	negativa rosso mattone	tracce evidenti	Dopo 25 minuti di permanenza nella camera pneumatica ha sintomi di malessere, con disturbi vaso-motorii cutanei, nausea, dolore di capo. Si deve interrompere l'esperimento.
IX 14-III 1922	Prima	210	1008.9	negativa bianco	assente	C. U. Soldato. Soggetto normale.
	Durante	570	1005 0	negativa bianco	assente	Esperimento fatto al mattino.
	Dopo	45	1019.1	negativa giallo	assente	Durata della raref. 57 minuti. Pressione minima 393 mm.

Biologia. — *Sulle variazioni di resistenza della capsula in uova di Teleostei* [1]. Nota del dott. Ettore Remotti, presentata dal Socio B. Grassi.

Non sarà sfuggito a chi ha avuto occasione di seguire lo sviluppo di uova di Teleostei che la capsula, resistente a notevoli azioni meccaniche, che su essa si esercitino nei primi tempi dello sviluppo, verso il termine di questo ha in forte grado perduto tale caratteristica, così che i deboli movimenti della larvetta, giunta a compimento, sono sufficienti per lacerarla ed aprire a questa una via.

Tale diminuzione di resistenza, facilmente apprezzabile ad una semplice osservazione, può essere più esattamente dimostrata e, se vogliamo, anche misurata mediante un semplice dispositivo applicabile a uova di notevoli dimensioni come quelle dei Murenoidi e nelle quali si può inoltre isolare, senza difficoltà, la capsula.

L'apparecchio, che sarà descritto nel prossimo lavoro in esteso, permette di seguire la progressiva variazione di resistenza durante il corso dello sviluppo e, naturalmente, le variazioni che per via sperimentale si siano determinate.

Che il fenomeno rappresenti un mirabile adattamento alle necessità di sviluppo del nuovo organismo è ovvio; era però interessante indagare il meccanismo per il quale esso può verificarsi. Questo lo scopo delle ricerche su cui io qui brevemente riferisco, riservandomi una più minuta esposizione nel lavoro definitivo.

Nelle mie esperienze mi sono prevalentemente servito di uova di Murenoidi.

È noto come in queste il vitello sia circondato da un ampio spazio occupato dal liquido perivitellino: questo appunto, dalle osservazioni compiute, mi par logico debba avere una parte importante nelle modificazioni che la capsula subisce durante lo sviluppo.

Le nostre attuali conoscenze sulla chimica degli esseri viventi, per quanto ancora ben lontane dal penetrare le leggi intime dei fenomeni biologici, ci hanno svelato, nel campo delle azioni enzimatiche e delle reazioni immu-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina diretto dal prof. Sanzo.

nitarie, tutta una serie importantissima di fatti, che gettano una luce nuova sulle più nascoste reazioni dei tessuti e dei liquidi organici.

Le ricerche che, guidato da questi concetti, ho appunto eseguito sulle proprietà del liquido perivitellino, mi hanno portato a risultati che mi sembrano lumeggiare il meccanismo della fuoriuscita della larva dalla capsula.

Esporrò qui brevemente alcune esperienze.

Prendiamo due gruppi di uova di una qualsiasi specie di Murenoidi, tutte ad eguale stadio e, precisamente, all'inizio dello sviluppo; mettiamone uno, quale controllo, in un comune recipiente d'acqua marina, l'altro, lasciando invariate le rimanenti condizioni, in contatto con liquido perivitellino estratto da uova della stessa specie, ma ad uno stadio di sviluppo più avanzato [1]. Si verifica un caratteristico risultato: mentre le uova di controllo proseguono normalmente nel loro sviluppo, le altre presentano una maggior percentuale:

1°) di precocità di schiusa, senza che l'embrione manifesti una corrispondente precocità di sviluppo;

2°) di mortalità.

I due fenomeni possono verosimilmente essere riferiti alla medesima causa: una precoce alterazione e diminuzione della resistenza capsulare per opera del liquido perivitellino.

Infatti ulteriori ricerche, intraprese per misurare direttamente la resistenza della capsula, mettono in rilievo l'abbassamento del limite di rottura di quest'ultima allorchè l'uovo venga tenuto, fin dai primi stadî di sviluppo, nelle condizioni sperimentali sopra esposte; abbassamento che si ottiene ancora operando direttamente su capsule isolate, in confronto di altre tenute, invece, in ambiente marino normale.

Il caso surriferito di precocità di schiusa si verificherà quando l'azione del liquido perivitellino si svolga con intensità moderata, così che la larva riesca a raggiungere un sufficiente grado di sviluppo, compatibile con la vita libera del plancton, prima che la capsula abbia diminuito la propria resistenza al punto da poter essere lacerata sotto la minima azione.

Il secondo caso non rappresenta se non una condizione esagerata del primo, in quanto la morte della larva avverrebbe tutte le volte che l'azione del liquido perivitellino sulla capsula — sia per minor resistenza di questa, variazioni individuali, sia per altre cause non ancora precisabili — si esplica con intensità o rapidità maggiore e in modo da perturbare molto precocemente i processi osmotici, donde squilibrii che l'embrione troppo arretrato non può affrontare, o influenze nocive sull'embrione medesimo troppo precocemente

[1] L'abbondanza con cui, alcuni giorni, queste uova vengono pescate nello Stretto di Messina, permette di estrarre notevole quantità di liquido perivitellino.

esposto all'azione del liquido perivitellino che, per appartenere a stadî notevolmente più avanzati, può avere un'azione tossica.

Riservando di precisare lo svolgimento del fenomeno, con ricerche in corso sulle proprietà enzimatiche del liquido perivitellino, pare fin da ora verosimile che un tale processo possa riferirsi a un'azione digestiva di questo sulla capsula in relazione all'attività di un particolare enzima nel liquido stesso verso la fine dello sviluppo.

Ciò avrebbe per risultato di offrire alle larve, con l'indebolimento della capsula, la possibilità di uscire dalla propria prigione a sviluppo completo.

L'azione esplicata dal liquido perivitellino risentirebbe poi delle condizioni di temperatura e di salsedine dell'acqua marina, come ci risulta dal comportamento di uova che, per determinate ragioni sperimentali [1], erano poste, anche temporaneamente, in ambiente a concentrazione salina diversa da quella dell'acqua di mare normale.

Ciò potrebbe anzi avere, insieme con le variazioni del peso specifico e del coefficiente di dilatazione termica, importanza nella spiegazione di alcuni meccanismi di distribuzione orizzontale di questi elementi del plancton, p. es., come essi variamente si distribuiscano da un mare all'altro, benchè non vi sia, per quanto si sappia, che una piccola differenza di salsedine o di temperatura.

Fisiologia. — *Ricerche sulla variazione della radiosensibilità degli spermatociti oligopirenici in Paludina vivipara Linn.* [2]. Nota II del dott. Cesare Artom, presentata dal Socio B. Grassi [3].

Risulta da una mia Nota precedente [4] che gli spermatociti oligopirenici di *Paludina vivipara*, sono, durante il periodo di accrescimento, specificamente sensibili all'azione dei raggi Röntgen.

Come è ben noto, i suddetti elementi, provenienti (quasi con certezza) da cellule germinative, le quali non passano attraverso le fasi di divisioni spermatogoniali; attraversano un periodo di assimilazione molto intenso, di-

(1) E. Remotti, *Variazioni di peso specifico nelle uova galleggianti dei Teleostei durante lo sviluppo*, Memoria LXXX, R. Comitato Talassografico Italiano.

E. Remotti, *Sul comportamento del coefficiente di dilatazione termica in uova di Teleostei*, Memoria XC, R. C. T. I.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

(3) Presentata nella seduta del 3 giugno 1922.

(4) *Osservazioni preliminari sulla radiosensibilità di alcuni stadî della spermatogenesi oligopirenica di Paludina vivipara.* Rendiconti Accademia Lincei, vol. XXXI, serie V, 1° sem., 1922.

ventano ipertrofici, non riducono il numero dei cromosomi; e dopo una prima e una seconda divisione dànno luogo (attraverso complicati stadî) ai così detti spermi *oligopirenici*, del tutto aberranti da quelli normali o *eupirenici*.

In generale nei casi di spermatogenesi di mammiferi influenzata da raggi Röntgen, pare (secondo la scuola di Regaud) [1] che le fasi spermatogoniali sieno specificamente radiosensibili. Esse lo sono però sempre durante quel periodo di intensa assimilazione che intercede sicuramente in ogni elemento cellulare tra cariocinesi e cariocinesi. Per quanto le osservazioni di Mohr stabiliscano invece, per la spermatogenesi di un Ortottero, una radiosensibilità specifica (ottenuta con sali di Radio) al riguardo degli spermatociti in accrescimento, subito dopo, terminata l'ultima divisione spermatogoniale, rimane però sempre il fatto che, in ambedue i casi, è uno stadio di intenso metabolismo nucleare quello che si rivela maggiormente sensibile all'azione dei raggi.

Siccome poi d'altra parte pare oramai assodato che i nuclei in cui i cromosomi sono bene individualizzati, raddoppiati di massa e pronti a ripartirsi in due cellule figlie, sono in complesso poco radiosensibili, così una conclusione unica può forse trarsi dai lavori di Regaud e di Mohr: che cioè le sostanze presenti nel nucleo durante la sintesi nucleinica, devono essere di natura chimica tale da disintegrarsi facilmente, sia sotto l'azione dei raggi Röntgen, sia sotto l'azione dei raggi delle sostanze radioattive. Ciò che rimane ancora dubbio è la possibilità di stabilire se esista una specifica radiosensibilità per una piuttosto che per un'altra tappa della spermatogenesi: probabilmente essa varia da tipo a tipo di animali, e non vi è quindi da stupirsi dell'apparente contraddizione tra i risultati della scuola di Regaud e i risultati di Mohr.

In complesso pertanto, l'avere potuto determinare che lo spermatocito oligopirenico di *Paludina* è, durante il primo periodo di accrescimento, spiccatamente radiosensibile, deve riguardarsi come una ulteriore dimostrazione, assai persuasiva, fatta su un materiale veramente di elezione, che realmente elementi cellulari di cui la maggiore caratteristica è di percorrere uno stadio di intensa assimilazione, offrono una radiosensibilità specifica, come vuole del resto anche la nota legge di Tribondeau e Bergonié. Tale legge, desunta da molteplici osservazioni e accettata, mi pare, nel suo complesso dalla maggior parte dei radiologi, stabilisce in definitiva una radiosensibilità massima al riguardo degli elementi destinati a moltiplicarsi rapidamente, sempre però in quel periodo per lo più breve, che intercede tra cariocinesi e cariocinesi.

Vi è solo da osservare che l'elemento da me preso in considerazione è caratterizzato da un intenso periodo di assimilazione che lo conduce non

[1] Per le indicazioni bibliografiche si consultino principalmente i lavori di G. Hertwig, di Mohr in Archiv. f. mikroskopische Anatomie, 92° vol., 1919, e di Alverdes; lavori tutti già presi in considerazione nella Nota precedente.

già ad una cariocinesi immediata, ma invece ad uno stadio ipertrofico assai notevole. Forse le mie osservazioni possono, per questo riguardo, meglio entrare nell'àmbito di quelle molto interessanti del Regaud (1) relative alle cellule del Sertoli del testicolo di mammiferi, in cui pare che i suddetti elementi, per i quali è cessata, si può dire completamente, la fase di moltiplicazione, presentano egualmente una radiosensibilità abbastanza spiccata, variabile però in coincidenza con periodi di attività funzionale più o meno elevata.

Date queste sommarie premesse, a me è sembrato interessante sperimentare se lo spermatocito oligopirenico di un organismo *eterotermo* come la *Paludina*, fosse egualmente radiosensibile anche nella stagione fredda, quando cioè, in modo molto evidente, l'attività funzionale di tutte le cellule del testicolo è notevolmente ridotta.

Le osservazioni molteplici e sempre accompagnate da adeguati controlli, mi permettono oramai di affermare che realmente nella stagione fredda, con temperature varianti nei miei acquarî all'aperto da 2° a 12° centigradi, anche erogando dosi di raggi piuttosto elevate, non si ottiene mai quella caratteristica esplosione di picnosi nucleari che ho osservato invece nei mesi di maggio e giugno dell'anno precedente, erogando una dose di raggi molto minore.

Neppure nella prima metà di aprile, con temperature oscillanti negli acquarî da 8° a 16° centigradi, gli spermatociti oligopirenici sono specificamente radiosensibili; lo diventano invece nella 2ª metà di aprile, con temperature oscillanti tra i 12° e i 22° centigradi.

Infatti i testicoli irradiati precisamente l'8 aprile con dosi corrispondenti a circa $^2/_3$ della dose di eritema, ed osservati successivamente dopo dieci, diciotto e trenta giorni dalla data dell'irradiazione, gli elementi oligopirenici erano quasi tutti perfettamente normali; viceversa nei testicoli irradiati il 22 aprile con la stessa dose di raggi ed esaminati il 2 maggio, si osserva una vera esplosione di picnosi nucleari in quasi tutti gli spermatociti oligopirenici.

In base a questi fatti si può trarre una seconda conclusione; e che cioè l'azione dei raggi sullo spermatocito oligopirenico non si fa praticamente sentire a distanza, quando essi sono stati erogati in un tempo in cui le condizioni di temperatura e forse la stagione non hanno ancora sufficientemente elevata l'attività funzionale del suddetto elemento cellulare.

Non appena questa attività funzionale raggiunge un certo grado, lo spermatocito oligopirenico diventa subito spiccatamente radiosensibile, come lo dimostra all'evidenza la caratteristica degenerazione nucleare che interviene dopo pochi giorni dall'irradiazione.

(1) C. Regaud, *Sur les variations de la radiosensibilité des cellules nourricières de l'épithelium seminal chez le rat.* Comptes Rendus de la Société de Biologie, 1913.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio MATTIROLO leggeva nella seduta del 2 giugno 1922, la seguente commemorazione del defunto Accademico ANTONINO BORZÌ :

Messe gloriosa, nobilissima, profondamente lacrimata, ha falciato la morte, nel breve volgere di pochi mesi nel ristretto campo della Botanica italiana! Giovanni Arcangeli (m. 16 luglio 1921), Pasquale Baccarini (m. 24 luglio 1919). Odoardo Beccari (m. 25 ottobre 1921), Saverio Belli (m. 7 aprile 1919), Antonino Borzì (m. 24 agosto 1921). Giovanni Briosi (m. 20 luglio 1919), Giuseppe Cuboni (m. 3 novembre 1920). Pietro Andrea Saccardo (m. 12 febbraio 1920), Stefano Sommier (m. 3 gennaio 1922); tutti ancora nel pieno rigoglio delle forze dell' ingegno, ci furono ineluttabilmente rapiti; e alcuni di essi quando le condizioni di loro salute non potevano far sospettare prossima la fine!

Fra questi dolorosissima e quasi fulminea fu la scomparsa del nostro illustre Consocio ANTONINO BORZÌ, la cui fibra robusta si spezzò avanti tempo, il giorno 24 dell'agosto scorso.

Aveva lasciato Palermo per ritemprare nel dolce clima della diletta toscana, la mente affaticata, e dopo pochi giorni accorrevano i figli per raccoglierne l'ultimo respiro nell'ospedale di Lucca, dove egli si è spento in seguito ad una operazione chirurgica, resasi improvvisamente necessaria.

La notizia della catastrofe riferita dai giornali, sollevò generale senso di doloroso stupore e di sbigottimento, per la tragica fatalità che rubava al paese uno dei più eletti ingegni, nel momento nel quale molto avrebbe saputo compiere in prò della Scienza.

* * *

ANTONINO BORZÌ, nacque il 20 di agosto dell'anno 1852 a Castroreale di Messina, da Pietro e Dorotea Lucifero. L'infanzia e la giovinezza egli trascorse nella contemplazione dell' incantevole paesaggio dei monti peloritani, dove l'occhio spazia su panorami che hanno per sfondo l'azzurro del mare; dove il verde scuro degli agrumeti, quello gaio dei vigneti e le distese glauche degli oliveti, smaltati di bianche casette, contrastano colle tinte calde dei calcari e dei graniti, colle tonalità scure dei Gneiss disegnanti il profilo del capo Tindari; dove il possente sole siculo ad ogni momento muta le impressioni dei colori, attenua o rinforza il tono delle ombre, spegnendosi in vaporosità di viola e d'oro.

La contemplazione di tale meraviglioso angolo del mondo agì sulle facoltà di sentimento e di pensiero del giovinetto e ne orientò la mente verso i sogni dell'arte.

L'« ambiente », che egli più tardi doveva così efficacemente studiare nei rapporti col regno vegetale, si era imposto alla mentalità sveglia, ardita del giovane sì che egli (che per esigenze di famiglia) non potè esprimere col magistero dei colori, le armonie della natura, si determinò a studiarle, dipingendo più tardi colla penna, vibrante anch'essa di colori, le sensazioni che assillavano la sua mente, mentre andava interrogando i segreti della natura, le relazioni, i contrasti, gli scopi degli esseri animatori il bel paese natìo.

È così che la sua mente elevandosi al disopra della pura esposizione descrittiva della materialità delle forme, riescì poi a rispecchiare note di sapienza con espressioni che rivelano nell'anima dello scrittore la concezione poetica della natura, che agisce come una forza attiva sulla terra; creatrice armoniosa di ordine, e regolatrice degli svariatissimi rapporti che legano fra loro gli innumerevoli corpi viventi, e questi all'ambiente, nella quale forza, Egli, come il suo grande maestro Federico Delpino, riconosceva un fondamento psichico, vitalistico e finalistico.

Rivoltosi alla Botanica (dopo gli studî secondarî compiuti nella vicina Messina), ottenuta una borsa di studio, Antonino Borzì si inscrisse alla Scuola Forestale di Vallombrosa, alla quale accorrevano numerosi i giovani della nuova Italia attrattivi dalla fama dei maestri, fra i quali meritatamente vanno ricordati il fondatore dell'Istituto G. Adolfo Bérenger, l'insigne coltissimo storico della foresta, e Federico Delpino, scienziato che per la originalità e la genialità della mente, per la indipendenza assoluta del pensiero e la sagacia delle osservazioni, ha fatto stupire il mondo.

Le lezioni del Delpino svolte al cospetto dei verdi panorami dell'Appennino toscano su materiali viventi sul posto, impartite senza alcun contorno di sussiego cattedratico, rivelarono al giovane naturalista le ragioni di quel mondo che egli adorava e che il maestro andava illustrando con argomenti rispondenti alle aspirazioni, alle tendenze dell'animo suo, interpretandolo alla luce di teorie affascinanti, legarono ben presto l'allievo al maestro, così che il giovinetto divenne in breve il collaboratore del biologo insigne e lo seguì da vicino nel periodo più brillante delle sue geniali ricerche.

Terminati gli studî, dopo qualche tempo passato a Firenze con Filippo Parlatore, fu il Borzì di nuovo a Vallombrosa presso il maestro, del quale divenne assistente, sostituendolo nell'insegnamento, quando questi fu chiamato a Genova nell'anno 1875, alla cattedra già resa illustre da Giuseppe De Notaris.

A ventitre anni Antonino Borzì conseguiva brillantemente l'onore della cattedra lasciata dal Delpino; egli poteva quindi guardare fidente l'avvenire

che gli sorrideva con i più lieti auspici. Infatti, nominato nell'anno 1879 in seguito a concorso, passò da Vallombrosa a Messina; e quindi nel 1892, chiamato a Palermo, vi rimase sino alla morte.

Questa, in breve, la carriera accademica e didattica del Borzì, integrata da frequenti viaggi di istruzione nei differenti paesi dell'Europa nordica ed in Tripolitania.

Il Borzì, nato naturalista, fu un botanico completo, perocchè la sua attività (esplicatasi in più di 200 lavori) si svolse in tutti i campi della scienza, in molti dei quali impresse orme durevoli e vedute originali, che io vorrei poter lumeggiare davanti a voi, per darvi una idea della importanza e dell'interesse dell'opera sua, se i limiti nei quali il Regolamento accademico costringe questa mia rievocazione me lo permettessero, siccome sarebbe desiderio mio.

Sarò quindi costretto a passare sotto silenzio molti degli studî da lui compiuti; sorvolare sopra altri, per potere insistere sopra quelli di importanza maggiore, che ci fanno meglio apprezzare le doti e l'indole del suo ingegno, l'originalità delle vedute ricche di promesse per l'avvenire della nostra scienza [1].

* * *

Allo studio delle Alghe, specialmente appartenenti ai tipi inferiori (tanto marine quanto d'acqua dolce) dedicò il Borzì gran parte della sua attività scientifica segnatamente nel periodo nel quale visse a Messina, seguendole attraverso le varie fasi evolutive, studiandole coi metodi culturali preconizzati da Areschoug, Thuret, Tulasne, De Bary, Nageli, Schwendener e da lui tecnicamente perfezionati.

[1] Impossibile del resto sarebbe la enumerazione e la discussione di tutte le contribuzioni scientifiche uscite dalla fervida mente del Borzì.

La sola lista dei suoi lavori occupa parecchie pagine!

Credo utile quindi rinviare il lettore agli elenchi bibliografici contenuti nelle commemorazioni dei suoi allievi e ai varî periodici da lui diretti, dei quali mi sono valso per la presente sommaria rievocazione dell'opera sua.

1°) Bollettino del R. Orto Botanico di Palermo. Volumi da I a IX editi dall'anno 1897 al 1912.

2°) Bollettino del R. Orto Botanico di Palermo. Nuova serie 1914-1921.

3°) *Contribuzioni alla Biologia vegetale.* Volumi I a IV; 1894-1909.

4°) Bollettino di studî ed informazioni del R. Giardino Coloniale di Palermo. Volumi I a VI, Palermo, 1914-1920.

5° Malpighia.

Rivolgo profonde azioni di grazie alla Direzione del R. Orto Botanico di Palermo, e per essa al prof. Domenico Lanza, per aver voluto in questa circostanza, porre liberalmente a disposizione del R. Orto di Torino tutte queste importanti pubblicazioni e favorire i dati biografici principali della carriera del compianto Collega.

Gli studî sulle *Chlorophyceae* e quelli sulle *Myxophyceae*, densi di fatti e di interpretazioni sagacemente pensate, che si rivelano sopratutto nei nuovi adattamenti vegetativi e nei meccanismi sessuali (che egli illustrò con figure che testimoniano la sua perizia di disegnatore) gli conquistarono un posto eminente fra gli Algologi e gli fecero decretare l'ambìto premio Desmazières dell'Accademia di Francia.

I numerosissimi lavori che Borzì, per più di 40 anni, dedicò a questi esseri, si possono essenzialmente compendiare nei risultati biologici che egli stesso, in parte, riassunse nel Capitolo VII dei suoi *Problemi di Filosofia botanica.*

Considerati nel complesso, dimostrano essi infatti nelle Alghe inferiori e segnatamente nelle *Cyanophyceae*, una plasticità ed una mutabilità di forme tale da sconvolgere e distruggere le barriere che i sistematici della scuola « *statica* » avevano ritenuto di interporre, non solo fra le specie inferiori, ma altresì fra molti dei gruppi superiori.

Il polimorfismo marcatissimo di questi esseri che Borzì ha studiato in modo speciale, nei generi: *Oscillaria*, *Scytonema*, *Stigonema*, *Lingbia* ecc., dimostra la necessità di un radicale lavoro di coordinamento per definire le entità sistematiche, perocchè centinaia e centinaia di specie non avranno alcun diritto ad essere considerate entità specifiche, quando si adotteranno metodi adatti per osservare una stessa forma sotto la influenza di condizioni di *habitat* diversi e col controllo diligente di colture in laboratorio.

Egli chiarì il significato del polimorfismo nelle Alghe inferiori come una prova del fatto, che le forme maggiormente polimorfe sono quelle nelle quali manca un atto copulativo, in modo che la funzione generativa sessuale acquista il valore di una azione riparatrice e instauratrice, destinata a porre un limite all'infinito succedersi di forme tanto differenti, tanto suscettive di variazioni e tanto mutevoli.

L'atto sessuale, secondo il Borzì, avrebbe il còmpito di conservare, attraverso la discendenza, le forme colle caratteristiche proprietà loro, di conservarle variabili quali esse sono e dentro i limiti assegnati alla proprietà loro di variare.

Questi studî portano l'A. a ritenere che la moltiforme plasticità del corpo delle Alghe inferiori e l'azione moderatrice della generazione sessuale abbiano avuta la più grande importanza nella costituzione di entità sistematiche nettamente definite, divenute poi stabili.

Molti fatti interessanti, forse non tutti ancora completamente dimostrati, osservò il Borzì intorno alle meravigliose facoltà delle Alghe inferiori di resistere alle estreme basse temperature, come alla secchezza, al calore; alle loro facoltà di reviviscenza; al modo di comportarsi quando disseccate e ridotte in minutissimi frustuli, disperse fra la polvere delle strade o la sabbia, conservate da secoli in erbario, si dimostrano capaci di riprendere rapidamente il rigogliò primiero e dopo poche ore di pioggia ricoprire il terreno.

Quantunque occupato da altre ricerche non abbandonò mai gli studî algologici e sulle predilette *Myxophycaee* scrisse ancora nel 1917 una importante contribuzione.

*
* *

Allo studio di alcuni funghi parassiti di Alghe attese anche il Nostro; e nella questione della sessualità degli ascomiceti portò idee nuove e vi scoperse Generi nuovi, cosicchè anche nel campo della micologia il suo contributo non fu certamente scarso, essendosi egli pure occupato delle questioni riguardanti l'ufficio dei gonidii lichenici.

Il *Protochytrium spirogiraee*, singolare organismo i cui microscopici plasmodii si fondono in *Myxoamebe*, che ridanno nuovi plasmodii e cisti, dalle quali si producono novelli plasmodii, fu da lui seguito in tutte le fasi dello sviluppo e studiato nelle affinità sistematiche che inducono a ritenerlo come appartenente alla piccola famiglia delle *Hydromyxinae* di Klein.

Quale anatomico egregiamente dotato si rivelò il Borzì nei molti lavori pubblicati in special modo nella Malpighia, nel Giornale botanico italiano e nelle Contribuzioni di Biologia di cui egli coi suoi allievi pubblicò quattro notevoli volumi; gli studî sulla formazione delle radici delle Monocotiledoni; le ricerche sulla morfologia e sull'accrescimento dello stipite delle palme compiuti col suo allievo dott. Catalano vanno fra questi suoi lavori specialmente ricordati, come quelli che rivelano attitudini e doti di ricercatore e di osservatore altamente encomiabili.

Fra gli studî micologici del Borzì stimo di dover segnalare quello che ci ha fatto conoscere il nuovo genere *Bargellinia* e la sua nuova specie, la *Bargellinia monospora*, vivente nel condotto uditivo esterno, affetto da catarro, e da escoriazione epidermica, osservata dall'A. sopra se stesso.

L'interessante fungillo (il cui valore patologico ci è sconosciuto) ha micelio settato, delicatissimo, fruttifica per mezzo di aschi bruni monospori, dentro ai quali si svolgono spore globose che le esterne parvenze farebbero rassomigliare a quella dei *Sepedonium*.

L'interesse grande del fungo (purtroppo non più osservato), sta nel fatto che esso rappresenta la forma più semplice di quei misteriosi *Gymnoasci* così refrattarî alle prove di cultura, i cui cicli di sviluppo ci sono perciò ancora per la massima parte ignoti.

La *Bargellinia*, assai vicina ad un altro Genere nuovo, pure descritto dal Borzì, l'*Eremothecium Cymbalariae*, coi generi *Podocapsa* e *Oleina*, fatti conoscere da van Tieghem; con *Eremascus* di Eidam ed *Endomyces* Reess, rappresenta per il notevole carattere della riduzione del numero delle spore nell'asco, il tipo più semplice di ascomiceto finora noto nella scienza, e nel quale gli aschi si formerebbero senza presentare alcun fenomeno che possa essere interpretato come la espressione di un qualsiasi atto sessuale cariogamico.

*
* *

Come fisiologo, il Borzì si è rivelato negli studî sulla sensibilità delle piante. Argomento gravissimo che egli ha trattato dimostrando che la ragione intima nei movimenti dei vegetali, non riposi essenzialmente sopra un fondamento di nozioni di indole esclusivamente meccanica e fisica; ma che le ragioni del moto spettino alle attività vitali del plasma.

Tale asserzione egli derivò non solo da una serie di esperimenti sull'azione degli ipnotici e dei tetanizzanti, e prendendo in esame i principali agenti modificatori delle attività del plasma; ma dimostrò, sopratutto con argomenti derivati dalla anatomia stessa degli organi sensibili, che permettono la trasmissione attiva degli stimoli, dei quali con ogni diligenza scrutò la struttura sottile.

Secondo il Nostro il plasma capace di essere influenzato dall'azione degli stimoli esterni, modifica il proprio potere di imbizione e trasmette alla membrana cellulare, cui strettamente aderisce, il potere di variare di posizione, di contrarsi, di espandersi come l'analogo protoplasma di un elemento nervoso posto nelle identiche condizioni fisiologiche, agisce sulla sostanza delle fibre muscolari e induce variazioni nello stato meccanico di queste, determinandone i movimenti. [1]

I concetti derivati da questi studî egli espose in lavori di laboratorio, in conferenze varie, che rivelano tutto il fervore di passione che egli ebbe per un argomento particolarmente adatto alla sua mentalità filosofica; e in questo campo è certo che il Borzì ha portato contributi notevolissimi espressi nel modo più attraente.

Conferenziere brillante, sia per le qualità letterarie, sia per la scelta sempre opportuna degli argomenti, il Borzì si è dimostrato, in numerose occasioni, di discorsi inaugurali; ma sopratutto vanno qui ricordate le relazioni nitide, convincenti colle quali seppe egli risolutamente combattere per raggiungere lo scopo di istituire un Istituto coloniale presso l'Orto botanico di Palermo, di cui diremo più avanti.

Della perizia nel campo della sistematica e della sua conoscenza delle specie italiane, lasciò il Borzì testimonianze notevolissime.

Non solo i funghi e le Alghe i Licheni ebbero le sue cure, ma in pubblicazioni varie egli si interessò della Flora sicula, della Flora delle nostre colonie e sopratutto si dimostrò valente monografo del, quasi incoercibile, genere *Quercus*.

Ai forestali, per i quali ebbe sempre tenerezze e cure, perchè gli ricordavano l'indirizzo e lo scopo dei primi suoi studî botanici, lasciò il *Compendio della flora forestale italiana*, opera che, iniziata dapprima con di-

segno più vasto e destinata ad un pubblico scientifico, interrotta al 2° fascicolo, fu sostituita dal *Compendio* indirizzato invece a scopi essenzialmente pratici.

Sotto la nuova veste il lavoro ottenne il più lusinghiero dei successi, così il volume che oggi rappresenta una rarità bibliografica, richiederebbe l'onore di una nuova edizione.

*
* *

Educato alla scuola di Federico Delpino e da lui prediletto fra gli allievi, era naturale che il Borzì rivolgesse i più importanti suoi contributi scientifici alla trattazione di questioni di indole biologica, che egli più tardi sintetizzava nel volume dei: *Problemi di filosofia botanica*, da lui devotamente dedicato al maestro, e che venuto in luce dopo la morte dell'Autore ne rappresentano il testamento scientifico.

Le idee animatrici delle sue dottrine, rispecchiano, in gran parte, quelle del Delpino; ma nella maniera di osservare e nel metodo scientifico da lui seguito, io non dubito di affermare (nè credo di mancare del dovuto rispetto al sommo biologo genovese) chè l'opera dell'allievo segna un passo avanti a quella del maestro, perchè Egli ha riconosciuto la necessità dello esperimento rigoroso come fondamento indispensabile di qualsiasi deduzione filosofica.

La botanica, scienza per eccellenza di osservazione, non può procedere senza la conoscenza esatta dell'intima struttura, del modo di funzionare dei vegetali, delle loro facoltà di reazione ecc. Essa deve inoltre giovarsi di ogni più perfetto mezzo tecnico di osservazione, e di necessità ricorrere al sussidio delle scienze sorelle, in altre parole costrurre su basi matematicamente sicure.

La genialità nella scienza, se ha talora dei lampi rivelatori della verità assoluta, può condurre ad interpretazioni tanto più funeste quanto più, giudicando a priori, ci appaiono convincenti.

Quante belle teorie affascinanti il finalismo ci ha rivelate che poi abbiamo veduto crollare di fronte alla realtà dei fatti!

L'ammettere a priori che ogni manifestazione di forma di un essere vivente debba servire ad uno scopo determinato, induce «*inconsciamente*» alla ricerca di spiegazioni, le quali, se possono dimostrare la genialità del ricercatore; se offrono la seduzione della soluzione di problemi difficili, non dimostrano ugualmente che la soluzione prospettata sia la vera, la quale soltanto sarà tale, quando possa essere dimostrata da esperimenti ineccepibili; e meglio a me pare nella scienza il dubbio, che le spiegazioni ad oltranza. Ma non è qui il caso, trattandosi di ricerche che si lanciano coraggiosamente nel campo della ricostruzione dei fenomeni della vita seguendo

una base puramente vitalistica, di ragionare sui concetti favorevoli od avversi a queste teorie.

Ritenne il Borzì che la vita di relazione, i rapporti cioè fra l'individuo vivente e l'ambiente che lo circonda, sieno diretti e regolati sempre da un fondamento psichico; e che lo studio delle abitudini, dei costumi, degli intenti e in generale di qualunque fenomeno della materia vivente riferibile alla vita di relazione nell'ambiente abbia carattere strettamente vitalistico, determinato da un principio che li regola, li coordina, congruamente li dispone a fini prestabiliti, pure agendo spessissimo nella completa inconsapevolezza (*Problemi*, loc. cit., pag. 12), si dimostrò, come il maestro, « finalista » convinto.

Studî, ricerche, esperimenti di laboratorio dedicò il Borzì ai rapporti ecologici coordinati alla difesa dei vegetali contro l'azione meccanica dell'aria, considerando egli tale azione morfogeno-meccanica, come uno dei più potenti fattori ecologici, all'azione dei quali nell'infinito corso dei secoli, egli riconosce la potenza di aver plasmato la fisionomia particolare delle singole forme dei vegetali.

Questa funzione a cui diede il nome di *aerofilattica* è dall'Autore considerata come una proprietà degli organi aerei delle piante terrestri, regolatrice e moderatrice dei processi di assorbimento radicale dei liquidi contenuti nel terreno, in modo che la funzione acquifera si riduca al *minimum*, estremo tollerabile, secondo le particolari condizioni dell'ambiente.

Della funzione *udofilattica*, ossia delle disposizioni protettive contro gli effetti delle precipitazioni acquee si occupò pure il Borzì, investigando le disposizioni regolatrici dei rapporti fra l'acqua e gli organi aerei delle piante terrestri diretti ad assicurare il normale esercizio delle funzioni essenziali della vita.

L'*udofilattismo* sarebbe, secondo l'A., non soltanto diretto a prevenire gli effetti fisici e meccanici dovuti all'azione dell'acqua che cade; ma a stabilire un regime di rapporti tali da impedire che la superficie degli organi aerei delle piante rimanga perennemente inondata e ricoperta di acqua, ma si conservi in diretto contatto con l'atmosfera durante la caduta della pioggia.

Agli effetti di questa funzione il Nostro accorda la più grande importanza morfogena, riconoscendo che essa dovette principalmente esplicarsi nei tempi che precedettero l'attuale assetto dei climi e della forma della superficie della terra, nel periodo nel quale avveniva il passaggio della vegetazione dalla vita acquatica a quella terrestre, e il nostro pianeta era dominato da immani bufere di pioggia, di grandine, di neve, che le testimonianze geologiche dimostrano ancora.

Dell'ecologia della disseminazione, con particolare amore, si occupò ritenendo Egli che il còmpito di questa funzione debba essere quello di contenere dentro giusti confini, la invasione dei vegetali sulla terra e di assicurare i consorzî floristici nel tempo e nello spazio, secondo le loro caratteristiche fisionomie.

La funzione disseminativa rappresenta, per il nostro Autore, una forza di coesione che tiene raccolti e tenacemente legati assieme gli individui ai climi e ai luoghi, tendendo a limitare in modo stabile le loro aree di vegetazione.

Egli pensa che le infinite varietà delle disposizioni meccaniche e strutturali, agiscano come agenti moderatori e regolatori delle distanze alle quali possono giungere i semi; in modo che l'area di disseminazione presenta, secondo le specie, dei limiti massimi costanti e determinati, da non poter essere oltrepassati, senza il concorso di circostanze eccezionali (non rare in natura), sopra tutto per opera della attività dell'uomo e degli animali; e che in natura la disseminazione a grandi distanze non rappresenti mai una congruenza necessaria alla diffusione della specie al di là dei limiti della sua area naturale.

Le ricerche fatte anzi lo portano a negare ogni possibilità di spontanea disseminazione *longinqua* cioè, senza il concorso diretto o indiretto, cosciente o incosciente dell'uomo, a meno che non si tratti di casi (del resto molto rari), di regioni poste in condizioni di clima accessibili alla immigrazione di specie per via acquea, come lo sono molte terre dei climi tropicali.

Così è che la diffusione e la invasione dei vegetali sulla terra procede a piccole tappe, dentro i limiti del dominio di ogni Flora e la straordinaria quantità di germi prodotti da ogni individuo serve a mantenere inalterato l'equilibrio costitutivo, di fronte alle molte cause di insuccesso: mentre per tale via le popolazioni vegetali accrescono più e più il loro coefficiente di densità e i legami di convivenza divengono più intimi e raggiungono pieno effetto.

Un carattere peculiare della mentalità e dell'opera botanica del Borzì è la simpatia manifesta colla quale la sua attenzione di ricercatore e di pensatore si è rivolta ai fenomeni fitogeografici e la tendenza di concedere una parte assolutamente preponderante al metodo ecologico nel loro studio.

Come il suo maestro il Borzì è stato un appassionato osservatore dei fenomeni vegetali « *in vivo* » estendendo tuttavia la sua attenzione dalla considerazione degli individui singoli a quella dei consorzî che essi costituiscono fra di loro ed al meccanismo biologico molto complesso, mediante il quale le associazioni si costituiscono e si mantengono una volta che hanno raggiunto uno stato di equilibrio.

Traccie di questo indirizzo troviamo diffuso in tutta la sua attività scientifica, specialmente del periodo più recente, ricerche originali, articoli e discorsi riassuntivi, lavori suggeriti ad allievi, ed essa informa quasi completamente il suo volume postumo.

Ai fondamenti ecologici delle associazioni vegetali dedica il Borzì un capitolo speciale del suo volume postumo, che io vorrei trasportato come conclusione.

Infatti, data la tendenza della vegetazione ad occupare lo spazio disponibile sino a saturazione, tanto che lo stato culminale della associazione vegetale si verifica nel momento in cui l'equilibrio raggiunto è perfetto, il

Borzì ha rapidamente sintetizzate le disposizioni dell'apparato vegetativo, mediante le quali gli individui singoli concorrono e questo equilibrio, spesso raggiungendo una singolare convergenza di forme fra le specie sistematicamente assai lontane; e ricercata poi la controprova della scarsa penetrabilità delle associazioni mature e chiuse, nelle difficoltà colle quali gli elementi avventizî riescono ad acclimatarsi, partecipando alla costituzione di consorzî spontanei colle specie locali.

Conc zione nella quale risiede la giustificazione teorica della fisionomia caratteristica che la vegetazione assume nei differenti paesi ed in ciascun di essi nelle differenti stagioni.

*
* *

Ma i risultati più tangibili, più fecondi, più accessibili anche alla massa del pubblico, furono dal Borzì ottenuti, quando egli diresse le sue facoltà di organizzatore alla attuazione di un ideale lungamente meditato e strenuamente sostenuto in mezzo a difficoltà di ogni sorta, quali in generale si oppongono al trionfo delle buone idee.

Antonino Borzì ebbe il merito di intuire i bisogni agrarî della nuova Italia, sorta finalmente a dignità di nazione una e indipendente.

Il triste spettacolo dell'esodo delle più possenti energie popolari, co strette ad emigrare verso lidi stranieri in cerca di condizioni di vita meno umilianti e disperate di quelle che l'agricoltura patria immiserita dai sistemi ingordi di sfruttamento dei lavoratori può loro concedere; la contemplazione dolorosa della decadenza agricola del mezzogiorno dove l'empirismo, la fossilizzazione delle idee, i metodi antiquati di coltura refrattarî alle innovazioni del progresso moderno non riescono se non miseramente a sfruttare i benefizî di un ambiente ecologico e di un clima eccezionalmente favorevole propizio alle più variate coltivazioni redditizie, fecondate dalla fonte eterna inesauribile di ogni energia; la preoccupazione del problema che si riferisce all'avvenire agricolo del mezzogiorno (che io non dubito di affermare sia fra quelli più importanti che la nuova Italia dovrà risolvere), lo fecero apostolo convinto della efficacia della ricerca scientifica dalla quale devono emanare i concetti animatori di ogni progresso nel campo della pratica. Sopratutto fiducioso nell'avvenire della scienza italiana, il Borzì dedicò tutto sè stesso allo studio delle condizioni più adatte alla vegetazione nell'ambiente meridionale, così vario, così diverso nelle sue manifestazioni da quello della parte settentrionale della penisola; cercò di saggiare sperimentalmente e di acclimatare nell'Orto di Palermo una quantità di piante utili, nel duplice intento di raccomandare quelle più appropriate alle colonie nostre e di utilizzare quelle più convenienti alle condizioni del mezzogiorno.

In questa nobile iniziativa io mi compiaccio riconoscere il merito non solo scientifico, ma patriottico del Borzì, perchè è tempo oramai che gli ita-

liani abbiano la moderna concezione dei fini della scienza e che, oltre che alla scienza pura, orientino i loro studî e le loro ricerche verso le applicazioni pratiche, feconde di risultati, e ritornino all'agricoltura con fede e con amore non solo, ma coll'intendimento di procedere seguendo la via sicura che la scienza sola può loro indicare.

L'Italia, checchè si dica, (così varia nelle condizioni climatiche dal nord al sud) è un paese agricolo, e solo come tale potrà risorgere.

Sono le industrie tributarie all'agricoltura quelle che dobbiamo creare, proteggere, alle quali dobbiamo rivolgere il più serio fervore di studî scientifici.

Ma però non basta riuscire produrre in quantità: produrre a buon mercato la massa vegetale servendosi delle colture e dei concimi; assicurare l'allevamento del bestiame coi mezzi più appropriati; occorre conoscere le piante nei materiali che le compongono, in quelli che producono esse stesse; scegliere le specie, le varietà migliori e saperle razionalmente coltivare.

È dover nostro quindi quello di creare numerosi centri di studî pratici di distribuirli nei varî ambienti climatici ed ecologici del paese, dotarli largamente, perchè uomini fattivi, seriamente preparati al difficile cómpito, possano spiegare la loro intelligenza e la loro attività di propaganda a profitto dell'agricoltura nazionale.

È necessario creare varietà di reddito, migliorare le specie attualmente coltivate, col mezzo delle ibridazioni, delle selezioni; adattare ai terreni le colture meglio rispondenti alle condizioni del suolo.

Per queste ragioni io vorrei che l'esempio dato e l'ideale che mosse il Borzì fossero compresi, meditati, fecondati dal Governo con larghezza di vedute e di mezzi, ma sopratutto con serietà di propositi, e colla convinzione che il danaro meglio impiegato è quello destinato alla redenzione economica del paese, sazio di discorsi, di parole e di politicanti.

La storia agricola di molte nazioni ammonisce che il problema agrario del mezzogiorno non è un problema insolubile.

La Sicilia, come la Sardegna, come il nostro mezzogiorno, possono ritornare come lo erano un tempo, fiorenti di campi, di mandre, di boschi; offrire ai loro figli attivi, sobrî perseveranti nel lavoro, oggi obbligati ad espatriare, colla dovizia dei prodotti del suolo, la facilità conseguente di vita.

Animato da questi convincimenti che oggi (malgrado le difficoltà del momento, la Dio mercè, sorridono ad una schiera animosa di giovani, i quali proseguono con energia mirabile l'ideale della redenzione agricola del mezzogiorno), Antonino Borzì si dedicò alla ricerca di mezzi atti a raggiungere lo scopo.

Alla sua mente la istituzione di un Orto sperimentale destinato allo studio delle piante utili, adatte alle esigenze climatiche del mezzogiorno, apparve il mezzo sicuro di convincimento e di propaganda delle sue idee, il sistema più pratico per giungere ad un risultato; mentre il paese affer-

mava i suoi diritti naturali alla espansione coloniale, reclamata dalla sua storia, dalle attitudini del suo popolo e dalle esuberanti energie di lavoro.

E fu appunto in questo periodo di tempo che il Borzì lanciò e sostenne il progetto dell'Orto coloniale.

L'idea ed il progetto, prospettati sotto questi auspici, furono finalmente compresi dagli uomini che stavano al Governo, così che nell'anno 1913 una legge approvata dal Parlamento Nazionale istituiva presso l'Orto botanico di Palermo il tanto desiderato e sospirato Orto coloniale, inaugurato poi solennemente nel 1917 e il Borzì vedeva finalmente attuato il sogno per il quale tanto tenacemente aveva combattuto.

*
* *

I meriti di Antonino Borzì, l'opera accademica e didattica e le attitudini di organizzatore, culminate (come si è detto) nella fondazione dell'Istituto coloniale di Palermo, furono universalmente riconosciute e premiate.

Socio di tutte le principali Accademie italiane e straniere, insignito di auree medaglie, di titoli cavallereschi, di premî internazionali, dottore « *Honoris Causa* » della nobilissima Università di Upsala, accademico nazionale dei Lincei e ultimamente (purtroppo pochi giorni prima della sua morte!) Socio della Società italiana dei XL, raccolse omaggi ed onori che testimoniano la gratitudine del Governo e degli scienziati, associata a quella del Comune e della Provincia di Palermo di cui egli fu benemerito.

Per 50 anni circa, seguendo con incrollabile fede un programma che alle idealità della scienza pura, associava quello della utilità pratica, intesa nel senso di suscitare nell'animo degli italiani una coscienza coloniale e la visione della importanza di provvedere al rinnovamento dell'agricoltura nelle regioni meridionali, seppe dotare il paese di un Istituto sul quale è lecito fondare le più liete speranze.

Eccitando fervore di studî intorno a queste questioni Antonino Borzì, a parer mio, ha elevato a sè stesso il monumento che additerà l'opera sua alla riconoscenza dei posteri.

COMMEMORAZIONI DI ANTONINO BORZÌ (Maggio 1922)

1. F. Cavara, *Antonino Borzì*. Agricoltura coloniale, anno XVI, n. 1, pag. 1, 1922.
2. F. Cortesi, *Antonino Borzì*. Rivista di Biologia, vol. III, fasc. VI, Roma, 1921 (contiene un saggio bibliografico delle pubblicazioni del Borzì).
3. » » *Antonino Borzì*. Rivista coloniale, anno XVI, 1921.
4. G. Catalano, *Di Antonino Borzì nel suo pensiero scientifico e nel suo carattere*. Discorso commemorativo pronunziato all'Orto botanico di Palermo nella adunanza straordinaria della Società Orticola di Mutuo Soccorso del 6 novembre 1921.

G. C.

INDICE DEL VOLUME XXXI, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1922 — 1º Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

L

M

N

O

P

R

S

T

V

Z

INDICE PER MATERIE

A

B

C

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876 84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-VII
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche. matematiche e naturali* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 11°, Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXX. (1862-1921). Fasc. 11°-12°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. XIII, Fasc. 13°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 9°.
Notizie degli Scavi di Antichità. Vol. I-XVIII. Fasc. 12°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*